

Dr. Nurlina, S.Si., M.Pd  
Hartono Bancong, S.Pd., M.Pd., Ph.D

# *Fisika Kuantum*

## **Untuk Pemula:**

Panduan Mudah untuk Memahami  
Teori Fisika Kuantum

**Dr. Nurlina, S.Si., M.Pd**  
**Hartono Bancong, S.Pd., M.Pd., Ph.D**

# *Fisika Kuantum untuk pemula:*

**Panduan Mudah untuk Memahami Teori Fisika Kuantum**



**LPP**  
**UNISMUH MAKASSAR**  
**2020**

**FISIKA KUANTUM UNTUK PEMULA:  
Panduan Mudah untuk Memahami Teori Fisika Kuantum**

Penulis:

**Dr. Nurlina, S.Si., M.Pd**

**Hartono Bancong, S.Pd., M.Pd., Ph.D**

ISBN: 978-623-7349-37-2

Editor:

**Dewi Hikmah Marisda**

Penyuting:

**Ma'ruf,**

Desain Sampul dan Tata Letak

**BERKAH UTAMI**

Penerbit:

**LPP UNISMUH MAKASSAR**

**ANGGOTA IKAPI**

**NO. 021/Anggota Luar Biasa/SSL/2019**

Distributor:

CV CAHAYA TIMUR

Jl. Hertasning Barat I No. 20

Makassar 90222

Tlp.0411863197 Fax. 0411863197 HP. 081355625779

Cetakan Pertama: 2020

*Hak cipta dilindungi undang-undang*

*Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan dengan  
cara apapun tanpa ijin dari penerbit*

Perpustakaan Nasional: Katalog Dalam Terbitan (KDT)



# PRAKATA

Buku ini ditulis guna memenuhi keperluan akan materi pelajaran untuk kuliah Fisika Kuantum pada perguruan tinggi. Keperluan ini sangatlah terasa karena buku pelajaran untuk kuliah Fisika Kuantum pada perguruan tinggi kebanyakan berbahasa Inggris, dan jumlahnya pun terbatas. Buku *Fisika Kuantum untuk Pemula* dimaksudkan sebagai salah satu buku rujukan bagi mahasiswa program S1 yang memprogramkan mata kuliah Fisika Kuantum. Materi buku ini bersumber dan diramu ulang dari bahan kuliah fisika modern dan fisika kuantum yang penulis sajikan pada mahasiswa semester V dan VI pada program Studi Pendidikan Fisika Universitas Muhammadiyah Makassar dan diperkaya dengan berbagai literatur yang relevan.

Untuk dapat memahami fisika kuantum dengan baik, mahasiswa hendaknya telah mengikuti kuliah fisika dasar, fisika matematika, dan fisika modern serta telah memiliki keterampilan dan pengetahuan tentang kalkulus khususnya integral dan persamaan diferensial. Namun demikian pendekatan matematika formal telah diusahakan seminimal mungkin agar mahasiswa yang belum memiliki kemampuan matematika yang memadai tidak kehilangan minat untuk membaca dan mengkajinya. Selain itu, penguraian materi pada buku ini menggunakan bahasa sederhana, mudah dimengerti dan dipahami.

Buku ini terdiri atas enam bab. Bab 1 membahas mengenai awal mula lahirnya fisika kuantum, konsep fisika klasik, radiasi benda hitam, batasan teori fisika klasik, dan prinsip korespondensi. Bab 2 membahas cahaya sebagai partikel. Pada bab ini disajikan bukti-bukti eksperimen yang menunjukkan bahwa cahaya berperilaku sebagai partikel. Bab 3 mendiskusikan teori gelombang de Broglie dan asas ketidakpastian Heisenberg. Kemudian Bab 4 membahas metodologi fisika kuantum. Bab 5 membahas sistem dengan potensial sederhana yang terdiri atas potensial tangga, potensial tangga persegi, sumur potensial dan osilator harmonik sederhana. Bab 6 mendiskusikan penerapan metode Schrödinger pada sistem atom Hidrogen (model dasar). Dengan demikian, mahasiswa yang

mempergunakan buku ini dapat memiliki pemahaman yang komprehensif tentang fisika kuantum.

Kami mengucapkan banyak terima kasih kepada rekan dosen dan semua pihak yang telah membantu dalam penerbitan perdana buku ini. Kami menyadari buku ini tidak bebas dari berbagai kesalahan dan kekurangan. Semua kesalahan dan kekurangan yang ada menjadi tanggung jawab kami secara pribadi. Saran dan kritik dari para pembaca adalah nutrisi yang sangat diharapkan untuk memperbaiki buku ini di masa yang akan datang.

Makassar, Desember 2020

Penulis

# DAFTAR ISI

|  |           |
|--|-----------|
| Prakata.....   | iii       |
| Daftar Isi .....   | v         |
| Daftar Tabel .....   | vii       |
| Daftar Gambar .....  | viii      |
| <b>BAB I LAHIRNYA FISIKA KUANTUM .....</b>                                   | <b>1</b>  |
| 1.1 Pendahuluan .....  | 1         |
| 1.2 Konsep Fisika Klasik .....   | 2         |
| 1.3 Radiasi Benda Hitam.....   | 4         |
| 1.4 Batasan Teori Fisika Klasik .....  | 18        |
| 1.5 Prinsip Korespondensi.....   | 19        |
| <b>BAB II CAHAYA SEBAGAI PARTIKEL .....</b>                                  | <b>23</b> |
| 2.1 Pendahuluan .....  | 23        |
| 2.2 Efek Fotolistrik.....  | 25        |
| 2.3 Efek Compton .....   | 37        |
| 2.4 Foton Sebagai Partikel .....   | 42        |
| 2.5 Spektroskopi Atom Hidrogen.....  | 47        |
| 2.6 Atom Hidrogen Model Bohr .....   | 47        |
| <b>BAB III GELOMBANG MATERI DAN ASAS KETIDAKPASTIAN<br/>HEISENBERG .....</b> | <b>57</b> |
| 3.1 Pendahuluan .....  | 57        |
| 3.2 Postulat de Broglie .....  | 59        |
| 3.3 Eksistensi Gelombang Materi .....  | 61        |
| 3.4 Percobaan Davisson dan Germer .....                                      | 64        |
| 3.5 Persamaan Gelombang (Beiser 91-98).....                                  | 67        |
| 3.6 Penafsiran Fungsi Gelombang .....  | 68        |
| 3.7 Prinsip Ketidakpastian.....  | 74        |
| 3.8 Asas Ketidakpastian Heisenberg.....                                      | 80        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>BAB IV METODOLOGI FISIKA KUANTUM .....</b>                       | <b>87</b>  |
| 4.1 Persamaan Gelombang .....                                       | 87         |
| 4.2 Persamaan Schrodinger .....                                     | 88         |
| 4.3 Sifat-Sifat suatu Fungsi Gelombang.....                         | 93         |
| 4.4 Persamaan Gerak Heisenberg.....                                 | 93         |
| <br>  |            |
| <b>BAB V SISTEM DENGAN POTENSIAL SEDERHANA .....</b>                | <b>101</b> |
| 5.1 Pendahuluan.....  | 101        |
| 5.2 Potensial Tangga.....   | 103        |
| 5.3 Potensial Tangga Persegi.....                                   | 104        |
| 5.4 Sumur Potensial Persegi Tak Terhingga .....                     | 107        |
| 5.5 Sumur Potensial Persegi Terhingga.....                          | 109        |
| 5.6 Sumur Potensial Persegi dengan Dinding .....                    | 111        |
| 5.7 Osilator Harmonis Sederhana.....                                | 114        |
| <br>  |            |
| <b>BAB VI PENERAPAN METODE SCHRODINGER PADA SISTEM</b>              |            |
| <b>ATOM HIDROGEN (MODEL DASAR) .....</b>                            | <b>121</b> |
| 6.1 Sistem Fisik Atom dan Representasinya Secara Matematika         | 121        |
| 6.2 Struktur Persamaan Gelombang Schroedinger untuk Sistem          |            |
| Atom Hidrogen.....  | 123        |
| 6.3 Pemecahan Persamaan Anguler $\psi(\theta, \varphi)$ .....       | 126        |
| 6.4 Pemecahan Persamaan Radial .....                                | 129        |
| <br>  |            |
| <b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>   | <b>139</b> |
| <br>  |            |
| Apendiks 1 Beberapa Konstanta .....                                 | 140        |
| Apendiks 2 Beberapa Integral .....                                  | 141        |
| Apendiks 3 Transformasi Koordinat Cartesian ke Koordinat Bola ..... | 142        |
| Apendiks 4 Osilator Fisis .....                                     | 144        |
| <br>  |            |
| <b>GLOSSARY.....</b>  | <b>146</b> |

## DAFTAR TABEL

|  |     |
|--|-----|
| Tabel 6.1 Fungsi <i>Spherical Harmonics</i> , $\Psi_{lm}(\theta, \varphi)$ ..... | 128 |
| Tabel 6.2 Persamaan Radial Untuk Sistem Atom Hidrogen.....                       | 130 |
| Tabel 6.3 Bilangan Kuantum Sistem Atom Hidrogen .....                            | 134 |

## DAFTAR GAMBAR

|  |    |
|--|----|
| Gambar 1.1 Warna benda yang cukup panas sehingga memancarkan cahaya, maka warnanya akan bergantung pada temperatur.....  | 5  |
| Gambar 1.2 Lubang berperilaku sebagai benda hitam .....  | 6  |
| Gambar 1.3 Distribusi spektral radiansi benda hitam pada temperatur yang berbeda.....  | 8  |
| Gambar 1.4 Kecocokan teori Rayleigh-Jeans dengan data eksperimen hanya pada panjang gelombang tinggi atau frekuensi rendah .....   | 12 |
| Gambar 2.1 Skema diagram dari peralatan yang digunakan oleh Lenard untuk menunjukkan efek fotolistrik dan untuk menunjukkan bahwa partikel yang dipancarkan dalam proses adalah elektron. .... | 26 |
| Gambar 2.2 Arus fotolistrik dan potensial $V$ untuk dua harga intensitas cahaya yang berbeda. Jika $V < -V_0$ tidak akan ada arus .....  | 27 |
| Gambar 2.3 Kebergantungan potensial pemerhenti $V$ terhadap frekuensi cahaya $\nu$ untuk logam Kalium, Cesium dan Tembaga .....  | 29 |
| Gambar 2.4 Grafik ketidakbergantungan energi kinetik foto elektron terhadap intensitas cahaya .....  | 30 |
| Gambar 2.5 Grafik kuat arus fotoelektrik terhadap waktu, dihitung sejak saat penyinaran pertama .....  | 31 |
| Gambar 2.6 Grafik kuat arus fotoelektrik terhadap intensitas cahaya untuk cahaya dengan frekuensi tertentu. Potensial penghalang dipasang nol .....  | 32 |
| Gambar 2.7 Geometri Hamburan .....   | 38 |
| Gambar 2.8 Hasil eksperimen Compton .....  | 38 |
| Gambar 2.9 Model Atom Bohr ( $Z = 1$ bagi hidrogen) .....  | 49 |
| Gambar 2.10 Tingkat-tingkat energi atom Hidrogen .....   | 50 |

|   |     |
|---|-----|
| Gambar 2.11 Sebuah elektron melompat dari keadaan $n_1$ ke keadaan $n_2$ , dan memancarkan radiasi elektromagnet (sebuah foton cahaya) .....  | 52  |
| Gambar 3.1 Percobaan Davisson dan Gremer. Elektron terhambur pada sudut $\theta$ dari sebuah Kristal nikel .....  | 64  |
| Gambar 3.2 Kiri: Intensitas hamburan sebagai fungsi dari energi kinetik elektron (eV). Terjadi maksimum pada $\theta = 50^0$ dengan energi kinetik 54 Ev. Kanan: Intensitas hamburan sebagai fungsi dari sudut hamburan $\theta$ pada energi kinetik 54eV. .... | 65  |
| Gambar 3.3 Hamburan Bragg .....   | 66  |
| Gambar 3.4 Sifat harmonik (selaras) sederhana .....   | 68  |
| Gambar 3.5 Pengukuran posisi sebuah elektron .....  | 76  |
| Gambar 3.6 Percobaan Einstein yang seolah-olah bertentangan dengan Relasi Heisenberg .....  | 78  |
| Gambar 5.1 Potensial Tangga untuk $E < V_0$ .....   | 103 |
| Gambar 5.2 Fungsi Gelombang .....   | 104 |
| Gambar 5.3 Potensial Tangga Persegi .....   | 105 |
| Gambar 5.4 Fungsi Gelombang .....   | 106 |
| Gambar 5.5 Sumur Potensial .....  | 106 |
| Gambar 5.6 Sumur Potensial Persegi Tak Terhingga .....  | 107 |
| Gambar 5.7 Fungsi-Fungsi Eigen .....  | 108 |
| Gambar 5.8 Sumur Potensial Persegi Terhingga .....  | 109 |
| Gambar 5.9 Syarat Kontinu .....   | 110 |
| Gambar 5.10 Keadaan Energi .....  | 111 |
| Gambar 5.11 Sumur Potensial Persegi dengan Dinding .....  | 112 |
| Gambar 5.12 Grafik Persamaan Schrödinger di daerah $x > a$ .....  | 113 |
| Gambar 5.13 Bentuk Fungsi-Fungsi Keadaan .....  | 114 |
| Gambar 5.14 Osilator Harmonis Sederhana .....   | 115 |
| Gambar 5.15 Fungsi-Fungsi Keadaan .....   | 117 |
| Gambar 6.1 Sketsa Koordinat $(x,y,z)$ Dan Koordinat $(\sigma, \theta, \mu)$ .....   | 122 |



# BAB I

## LAHIRNYA FISIKA KUANTUM

Pada bab ini Anda akan mempelajari tentang awal mula lahirnya fisika kuantum, konsep fisika klasik, radiasi benda hitam, batasan teori fisika klasik, dan prinsip korespondensi. Oleh karena itu, setelah mempelajari bab ini anda diharapkan memiliki kemampuan untuk:

1. Menjelaskan awal mula lahirnya fisika kuantum
2. Menjelaskan konsep fisika klasik
3. Menjelaskan radiasi benda hitam
4. Menjelaskan batasan teori fisika klasik
5. Menjelaskan prinsip korespondensi

### 1.1 Pendahuluan

Pada akhir abad ke 19, semakin jelas bahwa Fisika (konsep-konsep Fisika) memerlukan revisi atau penyempurnaan. Hal ini disebabkan beberapa hasil eksperimen dan gejala-gejala Fisika yang tidak bisa dijelaskan dengan konsep-konsep Fisika yang telah ada pada saat itu (Fisika klasik). Lahirnya teori kuantum yang disarankan oleh Planck karena teori klasik gagal menjelaskan distribusi energi dalam spektrum yang dipancarkan oleh benda hitam. Teori yang dikemukakan oleh Rayleigh dan Jeans tampak seluruhnya tidak sesuai dengan hasil eksperimen. Dalam mengatasi kesulitan tersebut, Planck pertama kali menyadari kemungkinan adanya pelanggaran atau kesalahan dari hukum equipartisi energi yang merupakan dasar dari teori klasik. Hukum ekuipartisi menganggap bahwa energi total rata-rata mempunyai harga yang sama untuk semua gelombang tegak dalam rongga dan tidak bergantung pada frekuensinya.

Di dalam suatu pertemuan ahli Fisika Jerman pada tanggal 14 Desember 1900, Max Planck mengemukakan karya ilmiahnya yang berjudul “*On the Theory of the Energi Distribution Law of the Normal Spektrum*”. Walaupun karya ini pada awalnya tidak menarik perhatian orang namun

pada akhirnya disadari bahwa karya Planck telah membawa perubahan besar dalam dunia Fisika sehingga tanggal pertemuan tersebut dianggap sebagai hari kelahiran Fisika kuantum.

Munculnya teori kuantum memperluas jangkauan penyelidikan dunia Fisika. Jika Fisika klasik mempelajari fenomena Fisika dalam dunia makroskopis, maka Fisika kuantum mengkaji partikel-partikel elementer dan mencoba menemukan hukum-hukum yang mengatur tingkah laku partikel-partikel tersebut. Sebuah partikel dikatakan elementer jika partikel itu tidak terdiri dari bagian-bagian yang lebih sederhana. Dengan batasan ini maka proton, elektron dan neutron dapat dianggap sebagai partikel elementer sedangkan atom hidrogen atau inti uranium tidak dapat. Jika dalam suatu sistem Fisika terdapat variabel dinamis yang mempunyai dimensi dengan nilai numerik dapat dibandingkan dengan tetapan Planck  $h$  ( $6,626 \times 10^{-34}$  J/s), maka sistem tersebut harus dikaji dalam kerangka mekanika kuantum. Sebaliknya, apabila dimensinya sangat besar dibandingkan dengan tetapan Planck  $h$ , maka teori Fisika klasik cukup teliti untuk digunakan.

## 1.2 Konsep Fisika Klasik

Konsep-konsep Fisika klasik tercakup dalam dua kelompok besar, yakni Mekanika Newtonian (klasik, non-kuantum) dan Elektromagnetika klasik. Mekanika Newtonian membahas partikel-partikel yang dianggap bergerak di bawah pengaruh gaya-gaya yang mengikuti hukum gerak (Hukum Newton)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad 1.1$$

dengan  $\vec{F}$  adalah resultan gaya yang bekerja pada partikel;  $\vec{p} = m\vec{v}$  adalah momentum garis partikel dengan massa  $m$  dan kecepatan  $\vec{v}$  dan  $t$  menyatakan waktu. Elektromagnetika klasik membicarakan medan listrik  $\vec{E}(\vec{r})$  dan medan magnet  $\vec{B}(\vec{r})$  dan sumber-sumbernya, yaitu muatan listrik  $q$  dan arus listrik  $I$ . Hukum-hukum elektromagnetika klasik diformulasikan sebagai persamaan-persamaan Maxwell,

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon c^2}\end{aligned}$$

Dan

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

dengan  $c$  adalah kelajuan cahaya,  $\rho$  adalah rapat muatan ruang,  $\epsilon$  adalah permitivitas ruang hampa, dan  $\vec{j}$  adalah rapat arus. Untuk ruang bebas, persamaan di atas menjadi

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{dan} \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad 1.2$$

Persamaan-persamaan Maxwell dalam ruang bebas memberikan persamaan medan listrik dan medan magnet yang terpisah sebagai

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dan} \quad \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

adalah persamaan gelombang elektromagnet dalam ruang bebas. Penyelesaian persamaan gelombang berbentuk

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[ \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right] \quad 1.3$$

Dan

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[ \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right] \quad 1.4$$

dengan  $\omega$  adalah frekuensi sudut gelombang, dan  $k$  adalah vektor gelombang pada arah rambat gelombang, yang besarnya adalah  $k = \omega/c$ . Dalam Fisika klasik, fenomena alam dapat dispektrumkan dengan Mekanika Newton yang menguasai partikel, dan elektromagnetika yang menguasai medan elektromagnetik atau radiasi. Kedua komponen Fisika klasik tersebut dapat dipandang sebagai terpisah satu dengan yang lain, tetapi terkait melalui persamaan Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad 1.5$$

yang menyatakan gaya yang dialami oleh partikel bermuatan listrik  $q$  bergerak dengan kecepatan  $\vec{v}$  dalam medan elektromagnet  $\vec{E} \cdot \vec{B}$ .

### 1.3 Radiasi Benda Hitam

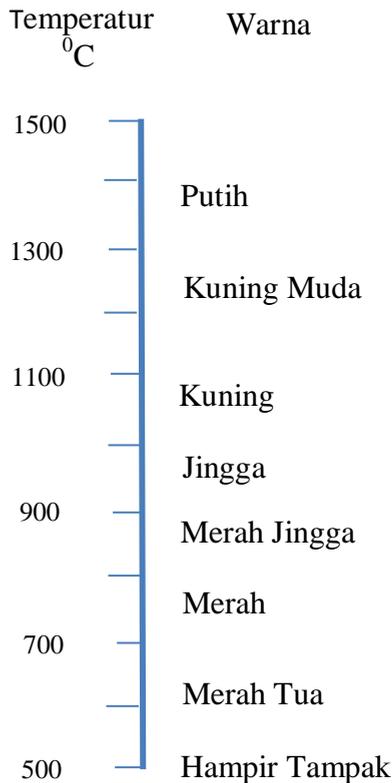
Salah satu penyebab lahirnya fisika kuantum adalah ditemukannya beberapa gejala pada radiasi benda hitam pada akhir abad 19 yang tidak dapat dijelaskan dengan teori yang telah ada pada saat itu. Untuk mendapatkan teori yang cocok, ternyata ilmuwan harus merombak pemikirannya tentang konsep energi, khususnya energi radiasi. Keyakinan lama bahwa energi bersifat malar (kontinu) dirombak menjadi kenyataan baru yang menyatakan bahwa energi dapat bernilai diskret. Disinilah pertama kali muncul konsep pengkuantuman energi. Selain itu, tetapan Planck yang menjadi ciri khas fisika kuantum, juga ditemukan dalam rangka perumusan teori radiasi benda hitam.

#### 1.3.1 Radiasi Termal

Radiasi yang dipancarkan oleh sebuah benda karena suhunya disebut radiasi termal. Semua benda memancarkan radiasi semacam ini ke sekelilingnya dan juga menyerap radiasi dari lingkungannya. Jika sebuah benda pada mulanya memiliki suhu yang lebih tinggi daripada sekelilingnya, maka benda itu lama kelamaan akan bertambah dingin karena energi yang dipancarkannya lebih besar daripada yang diserapnya. Ketika keseimbangan termal tercapai, radiasi yang dipancarkan sama dengan radiasi yang diserap.

Spektrum radiasi yang dipancarkan oleh sebuah benda hampir tidak bergantung pada materi penyusun benda itu, akan tetapi sangat ditentukan oleh suhunya. Pada temperatur biasa, kebanyakan benda terlihat bukan karena benda itu memancarkan cahaya, akan tetapi pemantulan cahaya ke mata kita. Jika tidak ada cahaya yang mengenainya, benda-benda itu tidak akan terlihat. Pada suhu yang lebih tinggi, benda-benda akan memancarkan cahayanya sendiri dan akan terlihat meskipun di dalam ruangan yang gelap. Pada umumnya, benda-benda pada suhu beberapa ratus Kelvin belum dapat terlihat karena spektrumnya masih berada pada daerah inframerah. Jadi, benda yang terlihat memancarkan cahayanya sendiri adalah benda yang sangat panas. Makin tinggi suhu benda, makin tinggi frekuensi radiasi yang dipancarkannya. Hal ini dapat dilihat dari warna pancaran benda itu. Adanya hubungan antara suhu sebuah benda dengan frekuensi pancarannya

dimanfaatkan dalam primeter optik. Dengan alat ini, suhu benda dapat diketahui dengan mengamati warnanya atau frekuensi radiasi yang dipancarkan<sup>14</sup>

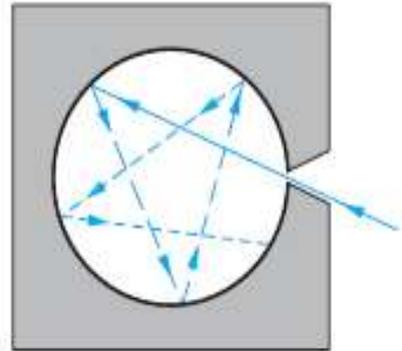


Gambar 1.1 Warna benda yang cukup panas sehingga memancarkan cahaya, maka warnanya akan bergantung pada temperatur

Penelitian tentang radiasi termal dimulai pada tahun 1859 oleh Kirchhoff yang memperlihatkan bahwa untuk panjang gelombang ( $\lambda$ ) tertentu, perbandingan antara daya pancar sebuah benda (E) dengan daya serap benda itu (A) adalah sama untuk semua benda. Daya pancaran sebuah benda (E) didefinisikan sebagai banyaknya energi yang dipancarkan pada panjang gelombang  $\lambda$  persatuan luas. Sedangkan daya serap benda (A) didefinisikan sebagai bagian dari radiasi yang datang yang dapat diserap.

Selanjutnya didapatkan bahwa untuk semua benda hitam, yaitu benda yang menyerap semua radiasi yang jatuh padanya ( $e = 1$ ), fungsi  $(\lambda, T)$  merupakan fungsi yang berlaku umum.

Untuk menyelidiki fungsi ini dengan baik, diperlukan benda yang benar-benar memiliki sifat sebagai benda hitam sesuai yang telah didefinisikan. Benda semacam ini sesungguhnya tidak ada di alam semesta. Sebuah lubang kecil pada dinding sebuah rongga, secara praktis dapat dianggap memiliki sifat-sifat sebuah benda hitam sempurna. Bila energi radiasi masuk melalui lubang tersebut, kemungkinan untuk keluar lagi dari lubang tersebut tidak ada. Energi radiasi akan dipantulkan berkali-kali oleh bagian dalam rongga tersebut dan setiap kali terpantul intensitasnya berkurang sesuai dengan koefisien absorpsi dinding rongga.



Gambar 1.2  
Lubang berperilaku sebagai  
benda hitam

Jadi dapat dikatakan bahwa setiap energi radiasi yang jatuh pada lubang, seluruhnya akan diserap sehingga bila ada radiasi yang datang dari lubang tersebut dapat dianggap sebagai radiasi benda hitam. Untuk itu, kita dapat memanaskan rongga tersebut pada temperatur  $T$  sehingga dari rongga itu akan keluar energi radiasi.

Kirchhoff telah memperlihatkan bahwa berdasarkan hukum kedua termodinamika, radiasi di dalam rongga yang suhunya  $T$  adalah radiasi yang isotropik (fluks energi yang tidak bergantung kepada arah) dan homogen (sama pada semua arah). Radiasi ini sama pada semua rongga yang suhunya  $T$  untuk setiap panjang gelombang tertentu.

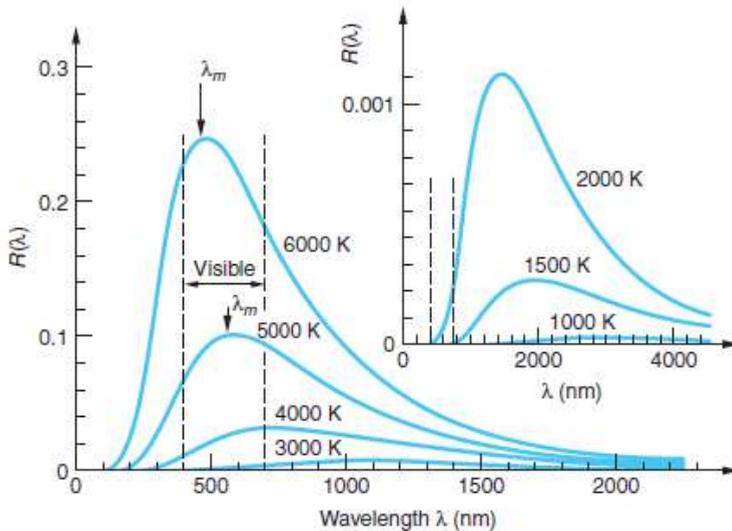
### 1.3.2 Data Eksperimen Radiasi Benda Hitam

Ada 3 hal penting yang akan dibicarakan tentang data eksperimen radiasi benda-hitam, yaitu: distribusi radiasi spektral (*spectral radiancy distribution*), Hukum Pergeseran Wien, dan Hukum Stefan-Boltzmann.

### 1.3.2.1 Distribusi Radiasi Spektral

Untuk menyelidiki spektrum radiasi benda-hitam, didefinisikan suatu fungsi distribusi yang disebut distribusi radiasi spektral. Yang dimaksud dengan radiasi adalah banyaknya energi yang dipancarkan tiap satu satuan luas permukaan benda tiap satuan waktu. Karena energi persatuan waktu disebut daya, maka radiasi dapat pula dikatakan sebagai daya pancar persatuan luas. Keterangan “**spektral**” pada ungkapan “distribusi radiasi spektral” dimaksudkan untuk menjelaskan bahwa distribusi radiasi tersebut dirumuskan untuk mendeskripsikan radiasi yang disumbangkan oleh masing-masing komponen spektrum. Komponen spektrum dapat dicirikan dengan salah satu dari kedua besaran berikut, yaitu panjang gelombang atau frekuensi. Jika frekuensi yang dipilih, maka distribusi radiasi spektral menyatakan distribusi radiasi (daya pancar persatuan luas permukaan benda-hitam per satuan waktu) yang disumbangkan oleh komponen spektrum yang berfrekuensi tertentu. Karena radiasi pada komponen spektrum juga bergantung pada temperatur benda-hitam maka fungsi distribusi radiasi spektral juga bergantung pada temperatur benda-hitam.

Jika fungsi distribusi radiasi spektral dilambangkan  $R_T(\nu)$ , maka  $R_T(\nu) d\nu$  menyatakan radiasi benda-hitam yang bertemperatur  $T$  dan disumbangkan oleh komponen spektrum yang berfrekuensi dari  $\nu$  sampai  $\nu+d\nu$ . Data eksperimen radiasi benda-hitam, khususnya distribusi radiasi spektralnya, secara kualitatif disajikan pada Gambar 1.3. sebagai berikut



Gambar 1.3. Distribusi spektral radiasi benda hitam pada temperatur yang berbeda

Berdasarkan gambar tersebut tersebut dapat diketahui bahwa spektrum radiasi benda-hitam berupa spektrum kontinu dengan radiasi yang beragam masing-masing komponen spektrum. Komponen spektrum berfrekuensi sangat rendah memiliki radiasi sangat lemah. Seiring dengan kenaikan frekuensi, radiasi itu berangsur-angsur naik sampai mencapai batas tertentu kemudian turun lagi. Pada temperatur tertentu, selalu terdapat satu komponen spektrum yang radiasinya paling kuat.

### 1.3.2.2 Hukum Pergeseran Wien

Gambar 1.3 juga menunjukkan bahwa pada setiap temperatur tertentu selalu terdapat komponen spektrum yang radiasi paling besar. Semakin tinggi temperatur benda, semakin tinggi pula frekuensi komponen spektrum yang radiasinya paling besar. Jika frekuensi komponen spektrum dengan radiasi terbesar itu dilambangkan  $\nu_{maks}$ , maka dari grafik tersebut didapatkan hubungan bahwa  $\nu_{maks} \sim T$ , atau

$$\nu_{maks} = \alpha T, \tag{1.6}$$

Dengan  $\alpha$  suatu tetapan yang nilainya sebesar  $5,87 \times 10^{10} \text{ K}^{-1} \text{ s}^{-1}$ . Rumusan tersebut merupakan bentuk lain dari rumusan  $\lambda_{\text{maks}} T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m.K}$ , yang pertama kali ditemukan secara empiris oleh Wien. Oleh karena itu, sebagai penghormatan atas karyanya, ungkapan diatas disebut Hukum Wien. Hukum ini juga sering disebut sebagai **Hukum Pergeseran Wien**. Kata “pergeseran” mengacu pada kenyataan bahwa jika temperatur berubah (naik/turun) maka nilai  $\nu_{\text{maks}}$  akan bergeser (naik/turun).

Perlu ditegaskan bahwa indeks “maks” pada  $\nu_{\text{maks}}$  digunakan untuk menandai bahwa komponen spektrum yang frekuensinya  $\nu_{\text{maks}}$  tersebut memiliki radiasi paling besar, bukan untuk menyatakan nilai maksimum bagi  $\nu$  itu sendiri. Hal ini nampak jelas ditunjukkan oleh Gambar 1.3, bahwa pada sebarang temperatur,  $\nu$  dapat bernilai sebarang: dari 0 sampai  $\infty$ . Penjelasan serupa berlaku untuk  $\lambda_{\text{maks}}$ . Untuk menghindari kesalahan tafsir, ada baiknya jika  $\nu_{\text{maks}}$  kita baca sebagai frekuensi utama dan  $\lambda_{\text{maks}}$  kita baca sebagai panjang gelombang utama.

### 1.3.2.3 Hukum Stefan Boltzman

Luasan dibawah grafik  $R_T(\nu)$ , yaitu  $\int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu$ , menyatakan radiasi benda-hitam yang dilambangkan oleh seluruh komponen spektrum pada temperatur  $T$ . Dengan kata lain, luasan tersebut menyatakan energi termal yang dipancarkan oleh tiap satuan luas permukaan benda-hitam tiap satuan waktu pada temperatur  $T$  tertentu. Berdasarkan Gambar 1.3 dapat disimpulkan bahwa semakin tinggi temperatur benda-hitam semakin tinggi pula energi termal yang dipancarkan. Kenaikan energi termal terhadap temperatur tersebut ternyata sangat cepat.

Energi termal yang dipancarkan per satuan waktu oleh tiap satuan luas permukaan benda-hitam yang bertemperatur  $T$ , dilambangkan  $R_T$ , ditemukan secara empiris oleh Stefan dan dirumuskan sebagai berikut:

$$R_T = \sigma T^4 \quad (1.7)$$

Dengan  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \text{ .K}^{-4}$  yang disebut tetapan Stefan-Boltzmann. Persamaan (1.7) dikenal dengan **Hukum Stefan-Boltzmann**

### 1.3.3 Rumusan Teoritis

Penjabaran teoretis radiasi benda-hitam pada umumnya dilakukan melalui telaah radiasi didalam rongga, bukan radiasi yang dipancarkan dari lubang di dinding rongga. Hal ini disebabkan karena sudah tersedia teori yang mapan tentang radiasi rongga, yaitu teori gelombang elektromagnetik Maxwell. Selain itu, ada hubungan yang sederhana antara radiasi yang dihasilkan lubang didinding suatu rongga dengan rapat energi (per satuan volume) didalam rongga itu.

Untuk mempelajari spektrum radiasi didalam rongga, didefinisikan suatu fungsi distribusi yang disebut **distribusi rapat energi spektral**, yaitu distribusi energi termal yang terkungkung dalam tiap satuan volume rongga yang disumbangkan oleh komponen spektrum tertentu. Jika fungsi distribusi rapat energi spektral dilambangkan  $\rho_T(v)$  maka  $\rho_T(v) dv$  menyatakan energi termal per satuan volume rongga yang bertemperatur  $T$  dan disumbangkan oleh komponen spektrum yang berfrekuensi dari  $v$  sampai  $v + dv$ . Fungsi distribusi rapat energi spektral  $\rho_T(v)$  secara kualitatif sama dengan fungsi distribusi radiasi spektral  $R_T(v)$ . Hubungan kedua besaran tersebut adalah

$$R_T(v) = \frac{c}{4} \rho_T(v) \quad 1.8$$

Dengan  $c$  menyatakan laju cahaya dalam ruang vakum.

Untuk menjelaskan secara teoritis ketiga data eksperimen sebagaimana disebutkan didepan, langkah yang paling strategis adalah menjabarkan rumusan distribusi rapat energi spektral  $\rho_T(v)$ . Hal ini disebabkan karena dua data yang lain, yaitu hukum Wien dan hukum Stefan-Boltzmann, dapat dijabarkan dari  $\rho_T(v)$ . Oleh karena itu, kita fokuskan perhatian kita pada penjabaran  $\rho_T(v)$  tersebut.

Terjadinya radiasi di dalam rongga dijelaskan sebagai berikut. Diasumsikan dinding rongga berupa konduktor. Maka, jika dipanaskan, elektron-elektron pada dinding rongga akan fereksitasi secara termal sehingga berosilasi. Berdasarkan teori Maxwell, osilasi elektron ini menghasilkan radiasi elektromagnet. Radiasi ini akan terkungkung di dalam rongga dalam bentuk gelombang-gelombang tegak (*standing wave*). Karena

dinding rongga berupa konduktor maka di dinding rongga terjadi simpul-simpul gelombang. Terdapat tak berhingga banyak ragam gelombang tegak (masing-masing ditandai dengan frekuensi atau panjang gelombangnya) di dalam rongga. Namun demikian, cacah ragam yang memiliki frekuensi dalam rentang  $dv$  tentu jumlahnya terbatas.

Cacah ragam gelombang tegak (di dalam rongga) yang memiliki frekuensi dari  $\nu$  sampai  $\nu+dv$ , dilambangkan  $N(\nu)dv$  adalah

$$N(\nu)dv = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 dv \quad 1.9$$

dengan  $V$  menyatakan volume rongga. Untuk setiap ragam gelombang, terdapat tak berhingga banyak gelombang yang seragam, dengan energi yang mungkin berbeda-beda bergantung pada amplitudo medannya.

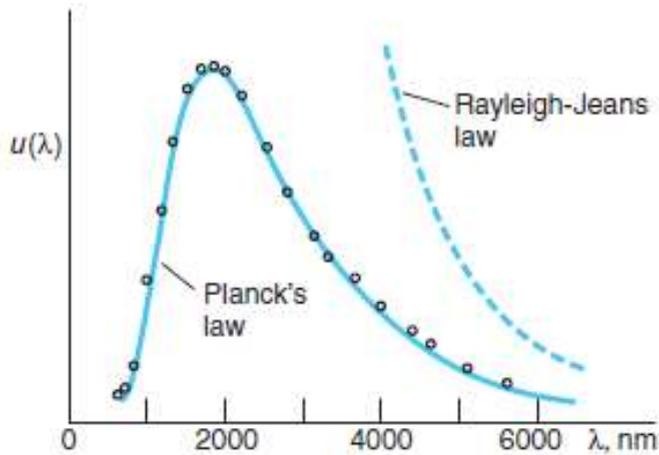
Untuk mendapatkan rapat energi spektral, langkah selanjutnya adalah menentukan energi rata-rata tiap ragam yaitu energi termal rata-rata bagi sekumpulan gelombang tegak yang seragam. Sebab, berdasarkan definisinya, rapat energi spektral dapat diperoleh dengan mengalikan energi rata-rata tiap ragam dengan cacah ragam yang berfrekuensi dalam rentang  $dv$  dibagi volume rongga, yaitu

$$\rho_T(\nu)dv = \frac{N(\nu)}{V} \langle \epsilon \rangle dv \quad 1.10$$

Penghitungan yang dilakukan Rayleigh dan Jeans menghasilkan nilai  $\langle \epsilon \rangle = k_B T$ , dengan  $k_B$  **tetapan Boltzman** yang nilainya  $1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ . Substitusi Persamaan (1.9) dan  $\langle \epsilon \rangle = k_B T$  ke dalam Persamaan (1.10) menghasilkan

$$\rho_T(\nu)dv = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2 dv \quad 1.11$$

Jelaslah bahwa hasil ini tidak cocok dengan data eksperimen. Data eksperimen menunjukkan bahwa untuk frekuensi sangat tinggi  $\rho_T(\nu)$  bernilai nol; sementara itu menurut teori Rayleigh dan Jeans,  $\rho_T(\nu)$  bernilai tak hingga besar. Perhatikan Gambar 1.4 sebagai berikut



Gambar 1.4. Kecocokan teori Rayleigh-Jeans dengan data eksperimen hanya pada panjang gelombang tinggi atau frekuensi rendah

Penghitungan yang dilakukan Planck menghasilkan

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{h\nu}{e^{\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)} - 1} \quad 1.12$$

dengan  $h$  tetapan Planck yang nilainya sebesar  $6,63 \times 10^{-34}$  J.s. Substitusi Persamaan (1.12) dan (1.9) ke dalam (1.10) menghasilkan

$$\rho_T(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)} - 1} d\nu \quad 1.13$$

Hasil penjabaran Planck ini cocok dengan data eksperimen.

Berikut akan diuraikan secara singkat bagaimana Rayleigh-Jeans dan Planck menghitung nilai energi rata-rata tiap ragam tersebut.

### 1.3.3.1 Teori Rayleigh – Jeans

Berdasarkan teori Maxwell, energi tiap ragam gelombang tegak dalam rongga dapat bernilai sebarang, mulai dari nol sampai tak berhingga bergantung pada amplitudonya. Energi rata-rata tiap ragam dihitung berdasarkan **statistika Boltzmann** yang menyatakan bahwa sejumlah besar (ansambel statistik) entitas fisis sejenis yang terbedakan dan berada pada kesetimbangan termal pada temperatur  $T$ , fraksi entitas fisis yang memiliki energi  $\varepsilon$  sebanding dengan faktor Boltzmann  $\exp(-\varepsilon/k_B T)$ . Statistika ini

sepenuhnya dapat digunakan mengingat bahwa sekumpulan gelombang tegak dalam rongga tersebut memenuhi syarat berlakunya statistika itu. Ingat bahwa semua gelombang tegak tersebut adalah sejenis dan terbedakan, dan juga berada dalam kesetimbangan termal antara satu dengan lainnya. Berdasarkan statistika Boltzmann dan mengingat bahwa energi tiap ragam bernilai sebarang (bergantung pada amplitudonya), maka energi tiap rata-rata sebesar

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon P(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^{\infty} P(\varepsilon) d\varepsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon e^{-\varepsilon/k_B T} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon/k_B T} d\varepsilon} \quad 1.14$$

Dengan  $P(\varepsilon)$  menyatakan fungsi distribusi Boltzmann

$$\frac{1}{k_B T} e^{-\varepsilon/k_B T}$$

Integrasi persamaan (1.14) dapat diselesaikan sebagai berikut. Karena  $\frac{d}{dT} e^{-\varepsilon/k_B T} = \frac{\varepsilon}{k_B T^2} e^{-\varepsilon/k_B T}$  maka  $\varepsilon e^{-\varepsilon/k_B T} = k_B T^2 \frac{d}{dT} e^{-\varepsilon/k_B T}$ . Dengan demikian, persamaan (1.14) dapat ditulis sebagai

$$\langle \varepsilon \rangle = k_B T^2 \frac{\frac{d}{dT} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon/k_B T} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon/k_B T} d\varepsilon} \quad 1.15$$

Selanjutnya, karena  $\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon/k_B T} d\varepsilon = k_B T$  maka persamaan (1.15) dapat diubah menjadi

$$\langle \varepsilon \rangle = k_B T^2 \frac{\frac{d}{dT} k_B T}{k_B T} = \frac{k_B^2 T^2}{k_B T} = k_B T \quad 1.16$$

Begitulah proses perhitungan energi rata-rata tiap ragam menurut teori Rayleigh dan Jeans.

Sebagaimana telah dinyatakan di depan, hasil perhitungan ini menyebabkan rumusan distribusi rapat energi spektral yang dihasilkan tidak cocok dengan eksperimen, khususnya pada frekuensi tinggi (daerah ultraviolet). Perlu dicatat bahwa langkah-langkah yang dilakukan Rayleigh dan Jeans sepenuhnya tidak bertentangan dengan teori yang ada saat itu. Oleh karena itu, kegagalan Rayleigh-Jeans sekaligus merupakan kegagalan fisika yang telah dikembangkan sampai saat itu. Peristiwa itu, dalam sejarah fisika, dikenal sebagai **bencana ultraviolet**.

### 1.3.3.2 Teori Planck

Persamaan (1.10) memberi petunjuk bahwa kunci utama untuk mendapat teori radiasi benda-hitam yang benar adalah ketepatan dalam merumuskan energi rata-rata tiap ragam. Berdasarkan persamaan itu, dan kenyataan bahwa teori Rayleigh-Jeans cocok untuk frekuensi rendah, maka *energi rata-rata tiap ragam harus bergantung pada frekuensi. Tegasnya: pada frekuensi tinggi bernilai nol dan frekuensi rendah bernilai  $k_B T$ .* Pemikiran seperti inilah yang mengantarkan Planck berhasil merumuskan teori yang benar. Berikut diuraikan secara singkat bagaimana Planck merumuskan teorinya.

Karena langkah yang ditempuh Rayleigh dan Jeans sudah konsisten dengan teori-teori yang ada saat itu, maka Planck mencoba mengajukan hipotesis yang benar-benar baru pada saat itu. Planck mengajukan hipotesis *bahwa energi tiap ragam tidaklah berupa sebarang nilai dari nol sampai tak berhingga, melainkan harus merupakan salah satu dari sederetan nilai diskret yang terpisah secara seragam dengan interval  $\Delta\varepsilon$ .* Jadi energi tiap ragam haruslah salah satu dari nol,  $\Delta\varepsilon, 2\Delta\varepsilon, 3\Delta\varepsilon, \dots, n\Delta\varepsilon$ , dengan  $n = 1, 2, 3, \dots$

Untuk menghasilkan energi rata-rata yang bergantung pada frekuensi, maka energi tiap ragam juga harus bergantung pada frekuensi. Ini berarti bahwa  $\Delta\varepsilon$  harus berbanding lurus terhadap  $\nu$ . Kesebandingan ini dapat diubah menjadi kesamaan dengan mengajukan suatu besaran yang berdimensikan energi kali waktu (yaitu aksi) sebagai faktor kesebandingannya. Jika tetapan kesebandingan itu kita lambangi  $h$  maka energi tiap ragam haruslah salah satu dari nilai

$$\varepsilon_n = nh\nu, n = 0, 1, 2, \dots \quad 1.17$$

karena energi tiap ragam tidak bersifat kontinu maka perhitungan energi rata-rata melalui proses integrasi seperti pada persamaan (1.14) tidak lagi dapat digunakan. Sebagai gantinya harus digunakan cara penjumlahan biasa, tentu saja harus meliputi seluruh energi yang mungkin dimiliki setiap ragam, yaitu:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_n \varepsilon_n e^{-\varepsilon_n/k_B T}}{\sum_n e^{-\varepsilon_n/k_B T}} = \frac{\sum_n nh\nu e^{-nh\nu/k_B T}}{\sum_n e^{-nh\nu/k_B T}} = k_B T \frac{\sum_n n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_n e^{-n\alpha}} \quad 1.18$$

Dengan  $\alpha = hv/K_B T$ . Persamaan (1.18) dapat disederhanakan sebagai berikut. Karena  $\frac{d}{d\alpha} e^{-n\alpha} = -n e^{-n\alpha}$ , maka  $n\alpha e^{-n\alpha} = -\alpha \frac{d}{d\alpha} e^{-n\alpha}$ . Dengan demikian persamaan (1.18) tadi dapat diubah menjadi

$$\langle \varepsilon \rangle = k_B T (-\alpha) \frac{\frac{d}{d\alpha} \sum_n e^{-n\alpha}}{\sum_n e^{-n\alpha}} \quad 1.19$$

Selanjutnya, dari hubungan:

$$\sum_n e^{-n\alpha} = 1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + e^{-3\alpha} + e^{-4\alpha} + \dots$$

Dan 
$$\frac{1}{1-e^{-\alpha}} = 1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + e^{-3\alpha} + e^{-4\alpha} + \dots$$

Diperoleh hubungan

$$\sum_n e^{-n\alpha} = \frac{1}{1-e^{-\alpha}} \quad 1.20$$

Dengan demikian, derivatif pada pembilang dipersamaan (1.19) menghasilkan

$$\frac{d}{d\alpha} \sum_n e^{-n\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{1-e^{-\alpha}} \right) = -\frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2} \quad 1.21$$

Substitusi persamaan (1.21) dan (1.20) ke dalam persamaan (1.19) diperoleh

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\alpha k_B T}{e^{\alpha} - 1} \quad 1.22$$

Karena  $\alpha = hv/K_B T$ , maka

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{hv}{e^{hv/k_B T} - 1} \quad 1.23$$

Begitulah cara Planck merumuskan energi rata-rata tiap ragam gelombang tegak dalam rongga yang bertemperatur T.

Apakah rumusan tadi telah memenuhi harapan Planck, yaitu: pada frekuensi rendah bernilai  $K_B T$  dan pada frekuensi tinggi bernilai nol? Pertanyaan itu dapat dijawab dengan mengamati nilai limit  $\langle \varepsilon \rangle$  pada  $v \rightarrow \infty$  dan pada  $v \rightarrow 0$ . Kedua nilai limit tersebut dapat dihitung dengan kaidah **L'Hospital** sebagai berikut.

$$\lim_{v \rightarrow 0} \langle \varepsilon \rangle = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{hv}{e^{hv/k_B T} - 1} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{hv}{(h/k_B T) e^{hv/k_B T}} = k_B T$$

Dan

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \langle \varepsilon \rangle = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{hv}{e^{hv/k_B T} - 1} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{hv}{(h/k_B T) e^{hv/k_B T}} = \frac{k_B T}{\infty} = 0$$

Jelaslah bahwa rumusan nilai energi rata-rata tiap ragam gelombang tadi telah memenuhi harapan Planck, yaitu: pada frekuensi rendah bernilai  $k_B T$  dan pada frekuensi tinggi bernilai nol.

Akhirnya, dengan memasukkan persamaan (1.23) ke dalam persamaan (1.10) diperoleh rapat energi persatuan volume rongga pada temperatur  $T$  yang dihasilkan oleh ragam gelombang yang berfrekuensi antara  $\nu$  dan  $\nu+d\nu$  sebagai berikut.

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu \quad 1.24$$

Persamaan itu menunjukkan bahwa pada temperatur  $T$  tertentu, rapat energi radiasi menuju nol jika frekuensinya menuju tak hingga. Ini sesuai dengan data eksperimen. Pencocokan dengan seluruh data eksperimen dilakukan dengan memilih nilai  $h$ . Hasil terbaik dari nilai tersebut adalah

$$h = 6,634 \times 10^{-34} \text{ J.S.} \quad 1.25$$

Tetapan tersebut selanjutnya disebut tetapan *Planck*.

Keberhasilan Planck dalam memecahkan masalah ini, khususnya yang berkaitan dengan ketetapan  $h$ -nya, merupakan tonggak sejarah yang sangat penting bagi perkembangan fisika sekaligus sebagai awal lahirnya fisika kuantum. Sebagaimana diketahui, besaran *aksi*  $h$  (aksi = energi kali waktu) selalu muncul dalam setiap persamaan fisika produk fisika kuantum.

Jika dinyatakan dalam  $\lambda$  melalui hubungan  $c = \lambda\nu$ , teori planck, persamaan (1.19), tadi menjadi

$$\rho_{T(\lambda)d\lambda} = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/(\lambda k_B T)} - 1} \quad 1.26$$

Berdasarkan persamaan (1.26) tersebut dapat dirumuskan Hukum Pergeseran Wien dan Hukum Stefan-Boltzman.

### Contoh Soal

1. Sebuah rongga pemancar pada 6000 K mempunyai lubang berdiameter 0,1 mm pada dindingnya. Hitunglah daya radiasi melalui lubang tersebut untuk panjang gelombang 5500 Å sampai dengan 5510 Å.

**Jawab**

Dik.  $\lambda = 5500 \text{ \AA} = 5,5 \times 10^{-7} \text{ m}$

$$r = \frac{1}{2} d = \frac{1}{2} (0,1 \text{ mm}) = 0,05 \text{ mm} = 0,05 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$h = 6,53 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$T = 6000\text{K}$$

$$k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

Penyelesaian:

$$R(\lambda) = \left(\frac{c}{4}\right) \left(\frac{8\pi}{\lambda^4}\right) \left[\left(\frac{hc}{\lambda}\right) \frac{1}{e^{hv/k_B T} - 1}\right] = \frac{3,74 \times 10^{-16}}{5,0 \times 10^{-23} \times 77,9}$$

$$= 9,60 \times 10^{13} \text{ watt/m}^3$$

$$\text{Luas pemancar (A)} = \pi r^2 = \pi (0,05 \times 10^{-3})^2 = 7,85 \times 10^{-9} \text{ m}^2$$

$$\Delta\lambda = (5510 - 5500) \text{ \AA} = 10 \text{ \AA} = 10 \times 10^{-9} \text{ m}$$

Daya yang dipancar

$$P = R(5500)A \Delta\lambda =$$

$$9,60 \times 10^{13} \times 7,85 \times 10^{-9} \times 10 \times 10^{-9} \text{ milliwatt}$$

$$= 0,00075 \text{ milliwatt} = 0,75 \text{ watt}$$

2. Cahaya matahari tiba dipermukaan bumi dengan laju sekitar 1,4 kW/m<sup>2</sup> ketika matahari berada di atas kepala. Jari-jari rata-rata orbit bumi adalah 1,5 x 10<sup>11</sup> m dan jari-jari matahari adalah 7,0 x 10<sup>8</sup> m. Dari angka-angka tersebut, carilah temperatur permukaan matahari dengan anggapan bahwa matahari memancarkan cahaya seperti benda hitam sempurna.

**Jawab**

Kita mulai dengan mencari daya total P yang dipancarkan matahari. Luas bola yang berjari-jari R yang sama dengan jari-jari orbit bumi adalah 4πR<sup>2</sup>. Karena radiasi matahari jatuh bumi (berbentuk bola) dengan laju P/A 1,4 kW/m<sup>2</sup>, maka

$$P = \left(\frac{P}{A}\right) (4\pi R^2) = (1,4 \times 10^3 \text{ W/m}^2) (4\pi) (1,5 \times 10^{11} \text{ m})^2$$

$$P = 3,96 \times 10^{26} \text{ W}$$

Kemudian, kita cari laju radiasi matahari R. Jika r adalah jari-jari matahari, maka luas permukaannya adalah 4πr<sup>2</sup> dan

$$R = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{3,96 \times 10^{26} \text{ W}}{(4\pi) (7,0 \times 10^8 \text{ m})^2} = 6,43 \times 10^7 \text{ W/m}^2$$

Emisivitas benda hitam sempurna,  $e = 1$ , maka

$$T = \left( \frac{R}{e\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} = \left( \frac{\frac{6,43 \times 10^7 W}{m^2}}{(1)(5,67 \times 10^{-8} W/m^2 K^4)} \right)^{\frac{1}{4}} = 5,8 \times 10^3 K$$

#### 1.4 Batasan Teori Fisika Klasik

Dalam teori relativitas, terdapat suatu tetapan yang digunakan sebagai kriterium, kapan suatu masalah hendaknya dipecahkan dengan cara relativistik atau nonrelativistik. Tetapan itu adalah kecepatan cahaya  $c = 3 \times 10^8$  m/s. Bila sesuatu masalah berkenaan dengan kecepatan yang kecil dibandingkan dengan kecepatan cahaya maka masalah ini cukup diselesaikan dengan cara nonrelativistik. Sebaliknya, bila suatu masalah berkaitan dengan kecepatan yang mendekati kecepatan cahaya maka teori relativitas hendaknya digunakan.

Pertanyaan yang timbul adalah apakah dalam fisika kuantum juga terdapat suatu tetapan yang dapat dijadikan kriterium yang merupakan batasan antara fisika klasik dengan fisika kuantum? Jawabnya, tetapan itu benar ada. Tetapan itu tidak lain dari tetapan Planck  $h$  yang mempunyai harga

$$h = 6,626 \times 10^{-27} \text{ erg s}$$

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

ini berarti bahwa jika suatu masalah fisika yang berkenaan dengan variabel dinamis dengan dimensi yang sesuai dengan dimensi tetapan Planck harga numeriknya dapat dibandingkan dengan harga numerik tetapan Planck maka penyelesaiannya dapat dilakukan dengan menggunakan fisika klasik.

Misalnya sebuah benda berbentuk mistar massa  $m = 20$  g panjangnya 0,5 m diputar dengan sumbu pada ujungnya dengan kecepatan sudut 1 rad/s. Momen inersia  $\frac{1}{2} m L^2 = \frac{1}{2} \times 0,02 \times (0,5)^2 = 0,0025$  kg m<sup>2</sup>. Momentum sudut =  $2,5 \times 10^{-3}$  kg m<sup>2</sup>/s. Bandingkan dengan  $h = 6,626 \times 10^{-34}$  Js, momentum sudut ini jauh lebih besar daripada  $h$ , malahan  $2,5 \times 10^{-3}$  masih lebih besar dari  $10^{26} h$ . Oleh karena itu, untuk sistem seperti ini, fisika klasik cukup teliti digunakan

## 1.5 Prinsip Korespondensi

Telah dilihat bahwa model Bohr memungkinkan kita untuk menghitung panjang gelombang berbagai transisi dalam atom hidrogen yang kesesuaiannya dengan panjang gelombang yang diamati dalam berbagai spektrum pancar dan serap sangatlah mengesankan. Namun, untuk memperoleh kesesuaian ini, Bohr “terpaksa” harus mengajukan dua postulat yang merupakan suatu loncatan yang radikal dari fisika klasik. Terutama postulat yang mengatakan bahwa sebuah elektron dalam model atom Bohr, yang mengalami percepatan sewaktu beredar dalam garis edar lingkaran, tidak meradiasikan energi elektromagnet (kecuali ia berpindah ke garis edar lainnya). Ini melanggar hukum fisika klasik, yang mengatakan bahwa sebuah partikel bermuatan meradiasikan energi elektromagnet bila mengalami percepatan. Perhatikan bahwa di sini kita melakukan suatu hal yang sangat berbeda dari yang kita lakukan dalam kajian mengenai teori relativitas khusus. Teori relativitas khusus menyatakan bahwa energi kinetik dalam bentuk  $K = E - E_0$ , sedangkan fisika klasik memberi bentuk yang berbeda  $K = \frac{1}{2} m v^2$ ; tetapi telah ditunjukkan bahwa  $E - E_0$  tersederhanakan menjadi  $\frac{1}{2} m v^2$  apabila  $v \ll c$ . Jadi, kedua pernyataan ini sebenarnya tidaklah terlalu berbeda – yang satu merupakan hal khusus dari yang lainnya. Dilema yang berkaitan dengan elektron yang dipercepat bukanlah semata-mata persoalan fisika atom (sebagai satu contoh dari fisika kuantum) sebagai suatu hal khusus dari fisika klasik, melainkan apakah elektron yang dipercepat meradiasikan energi elektromagnet atau tidak !!! Dilema ini dipecahkan oleh Bohr dengan mengajukan azas persesuaian (*Correspondence – Principle*), yang mengatakan bahwa hukum fisika klasik hanya berlaku dalam ranah klasik, sedangkan hukum fisika kuantum berlaku dalam ranah atom; pada ranah di mana keduanya bertumpang tindih, kedua himpunan hukum fisika itu harus memberikan hasil yang sama.

Mari kita lihat bagaimana azas ini dapat diterapkan pada atom Bohr. Menurut fisika klasik, sebuah partikel bermuatan listrik yang bergerak sepanjang sebuah lingkaran meradiasikan gelombang elektromagnet dengan frekuensi yang sama dengan frekuensi gerak melingkarnya. Untuk gerak edar elektron dalam atom, periode gerak melingkar adalah jarak tempuh satu

gerak edar,  $2 \pi r$ , dibagi dengan laju edar  $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ , dengan  $K$  adalah energi kinetik. Jadi, dengan menggunakan pernyataan (1.31) bagi energi kinetik, periode  $T$  diberikan oleh

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{2K/m}} = \frac{(\pi r)(\sqrt{2m})(\sqrt{8\pi\epsilon_0 r})}{e} \quad (1.47)$$

Karena frekuensi  $\nu$  adalah kebalikan dari periode  $T$ , maka

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{e}{\sqrt{16\pi^3\epsilon_0 m r^3}} \quad (1.48)$$

Dengan menggunakan pernyataan (1.36) bagi jari-jari orbit yang diperkenankan, diperoleh

$$\nu_n = \frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \frac{1}{n^3} \quad (1.49)$$

Sebuah elektron “klasik” yang bergerak dalam orbit lingkaran berjari-jari  $r_n$  akan meradiasikan gelombang elektromagnet dengan frekuensi  $\nu_n$  ini.

Jika diperbesar jari-jari atom Bohr menjadi sangat besar mulai dari objek berukuran kuantum ( $10^{-10}$  m) hingga ke ukuran laboratorium ( $10^{-3}$  m), dapatlah kita harapkan bahwa atomnya berperilaku secara klasik. Karena jari-jari bertambah dengan pertambahan  $n$  seperti  $n^2$ , kita harapkan bahwa untuk  $n$  pada rentang  $10^3 - 10^4$ , atomnya berperilaku secara klasik. Karena itu, marilah kita hitung frekuensi radiasi yang dipancarkan oleh atom yang demikian apabila elektron meloncat turun dari orbit  $n$  ke  $n - 1$ . Menurut Persamaan (1.41), frekuensinya adalah

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{me^4}{64\pi^3\epsilon_0^2\hbar^3} \left( \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{me^4}{64\pi^3\epsilon_0^2\hbar^3} \left( \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} \right) \end{aligned} \quad (1.50)$$

Jika  $n$  besar sekali, kita dapat mendekati  $n - 1$  dengan  $n$  dan  $2n - 1$  dengan  $2n$ , yang memberikan

$$\begin{aligned}
 \nu &= \frac{m e^4}{64 \pi^3 \epsilon_0^2 \hbar^3} \left( \frac{2n}{n^4} \right) \\
 &= \frac{m e^4}{64 \pi^3 \epsilon_0^2 \hbar^3} \left( \frac{1}{n^3} \right)
 \end{aligned}
 \tag{1.51}$$

Ini identik dengan Persamaan (1.49) bagi frekuensi klasik. Elektron “klasik” berspiral secara mulus menuju inti atom, sambil meradiasi dengan frekuensi yang diberikan oleh Persamaan (1.49), sedangkan elektron “kuantum” meloncat dari orbit  $n$  ke  $(n - 1)$  dan kemudian ke orbit  $(n - 2)$ , dan seterusnya, meradiasi dengan frekuensi yang diberikan oleh Persamaan (1.51).

### Latihan

1. Jelaskan mengapa Fisika kuantum ada?
2. Jika bintang merah dan bintang putih memancarkan energi dengan laju yang sama, dapatkah kedua bintang itu berukuran sama? Jika tidak, mana yang lebih besar? Mengapa?
3. Suatu cavity radiator bersuhu 400K mempunyai lubang berdiameter 0,20 mm di dindingnya. Hitunglah daya pancaran melalui lubang ini dalam selang panjang gelombang 6600 Å<sup>0</sup> sampai dengan 6620 Å<sup>0</sup>!
4. Bintang surya terlihat gelap, walaupun temperaturnya sekitar 5000 K karena permukaan surya yang lain lebih panas yaitu 5800 K. Bandingkan laju radiasi dari permukaan dengan emisivitas yang sama dengan temperatur 5000 dan 5800 K
5. Berapakah banyaknya modus gelombang berdiri yang bebas dengan panjang gelombang antara 9,5 dan 10,5 nm yang dapat timbul pada rongga berbentuk kubus bersisi 1 m? Berapakah banyak panjang gelombang antara 99,5 dan 100 mm (Petunjuk /; Buktikan dahulu bahwa  $g(\lambda) d\lambda = 8\pi L^3 d\lambda/\lambda^4$ )
6. Andaikan bahwa permukaan matahari bersuhu 8600k. Diameter dan massa dari matahari berturut-turut  $1,4 \times 10^9$  m dan  $2,0 \times 10^{30}$  kg.
  - a. Gunakan hukum Stefan-Boltzman untuk menghitung daya radiasi termal yang dipancarkan matahari.

- b. Berapa banyakkah matahari kehilangan massa per detik karena pemancaran ini?
7. Suatu benda bertemperatur  $400^{\circ}\text{C}$ . Pada temperatur berapakah radiasi energinya menjadi dua kali lipat?
  8. Sebuah benda hitam memancarkan  $1\text{ kW}$  pada temperatur  $500^{\circ}\text{C}$ . Pada laju berapah benda tersebut akan memancarkan energi bila temperaturnya menjadi  $750^{\circ}\text{C}$ ?

## **BAB II**

### **CAHAYA SEBAGAI PARTIKEL**

Pada bab ini Anda akan mempelajari efek fotolistrik, efek Compton, foton sebagai partikel, spektroskopi atom hidrogen, dan atom hidrogen model Bohr. Oleh karena itu, setelah mempelajari bab ini Anda diharapkan memiliki kemampuan untuk:

1. Menjelaskan efek fotolistrik
2. Menjelaskan efek Compton
3. Menjelaskan foton sebagai partikel
4. Menjelaskan spektroskopi atom hidrogen
5. Atom hidrogen model Bohr

#### **2.1 Pendahuluan**

Kuantitas energi yang pertama kali dicanangkan oleh Max Planck pada tahun 1900 baru mendapat pengakuan secara umum ketika Einstein menjelaskan efek fotolistrik dengan baik lima tahun kemudian. Efek fotolistrik pertama kali merupakan suatu gejala yang pertama kali dilakukan oleh Hertz ketika dia melakukan percobaan-percobaan mengenai gelombang elektromagnetik. Pada saat itu elektron belum ditemukan. Setelah elektron ditemukan oleh Thomson, penelitian efek fotolistrik semakin giat dilakukan dan mencapai puncaknya setelah Einstein dapat menjelaskannya. Sebelumnya, teori klasik gagal menjawab pertanyaan: mengapa pada frekuensi yang berada di luar frekuensi ambang, tidak ada elektron ke luar dari logam walaupun intensitas cahaya yang digunakan cukup besar.

Menurut Einstein, cahaya terdiri dari zarah atau kuantum cahaya yang disebut foton. Foton-foton ini bersifat sebagai partikel, memiliki momentum, energinya bergantung pada frekuensinya. Dengan teori kuantum cahaya ini, gambaran tentang hakekat cahaya semakin rumit. Sangat mudah membayangkan bahwa elektron adalah sebuah partikel, oleh karena massanya dapat dihitung dengan sebuah akselerator dapat dipercepat.

Melalui suatu prosedur dapat dihitung energi kinetiknya. Tetapi rasanya sulit memikirkan bahwa cahaya terdiri dari partikel-partikel yang tidak mempunyai massa diam dan tidak dapat dipercepat.

Sebaliknya, gejala-gejala interferensi dan difraksi pada cahaya mendukung teori undulasi Huygens yang menganggap bahwa cahaya sebagai gejala gelombang. Namun akhirnya gagal menjelaskan gejala-gejala lain, seperti efek fotolistrik dan efek Compton. Oleh karena itu sangat sulit untuk menyatakan apa sesungguhnya cahaya itu. Apakah cahaya itu berupa partikel atau gejala gelombang. Beberapa gejala fisik hanya dapat diterangkan dengan menganggap cahaya sebagai gelombang, tetapi terdapat jugagejala-gejala lainnya yang hanya dapat dijelaskan dengan menganggap cahaya sebagai partikel. Untuk menjawab pertanyaan itu akhirnya kedua pandangan disatukan dalam prinsip komplementaris yang menganggap bahwa cahaya bersifat dua, pada suatu keadaan bersifat sebagai gelombang tetapi pada keadaan lain bersifat sebagai partikel. Yang jelas bahwa kedua sifat tersebut tidak diperlihatkan secara serentak atau bersama-sama. Pandangan ini akhirnya diperluas, tidak hanya mengenai foton tetapi juga partikel-partikel elementer lainnya seperti elektron, neutron, dan sebagainya. Semua partikel ini mempunyai hakekat yang sama dalam artian bahwa semuanya memiliki sifat partikel dan gelombang.

Dalam serangkaian eksperimen, J.J. Thomson berhasil meyakinkan bahwa sinar katoda adalah berkas yang terdiri dari partikel-partikel bermuatan, ukurannya lebih kecil dan kurang padat dibandingkan dengan atom. Partikel ini sekarang dikenal sebagai elektron. Salah satu besaran elektronik yang penting adalah perbandingan antara muatan elektron dengan massanya. Dengan mempercepatnya melalui sebuah beda potensial yang diketahui, kemudian membelokkannya dalam sebuah medan magnet, besaran ini dapat dihitung. Muatan elektron pertama kali ditetapkan oleh R.A. Milikan pada tahun 1913 melalui sebuah percobaan yang dikenal sekarang sebagai percobaan tetes minyak Milikan. Setelah melakukan berbagai macam pengukuran, Milikan membuktikan bahwa muatan listrik terkuantisasi.

Salah satu isyarat yang penting dalam teori kuantum adalah penemuan spektrum garis. Biasanya, cahaya yang dipancarkan oleh materi didistribusikan secara nalar dalam suatu daerah spektrum tetapi terdiri dari serangkaian panjang gelombang yang diskrit. Spektrum ini disebut spektrum garis. Oleh karena setiap atom memancarkan spektrum garis tertentu dan spektrum-spektrum untuk dua atom ternyata tidak sama maka spektrum garis yang dipancarkan oleh setiap zat menggambarkan atom-atom penyusunnya. Melalui analisis spektral dapat diketahui unsur-unsur yang terdapat di matahari serta bintang-bintang lainnya.

Spektrum pertama yang dipelajari adalah spektrum atom hidrogen mengingat hidrogen sebagai atom yang paling sederhana. Pada tahun 1885, Balmer menemukan bahwa frekuensi garis-garis spektrum hidrogen yang diketahui dapat dinyatakan dengan sebuah rumus yang sangat sederhana. Garis-garis spektrum yang dinyatakan dengan rumus-rumus Balmer ini disebut deret Balmer.

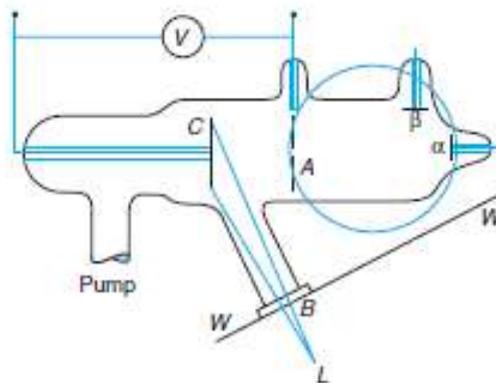
Berdasarkan pengukuran-pengukuran spektroskopik serta hasil-hasil percobaan Rutherford, Bohr mengemukakan teorinya tentang model atom dengan postulat-postulatnya yang berkenaan dengan: (1) idenya tentang keadaan stasioner atom (2) lompatan kuantum dalam atom (3) frekuensi foton yang berkenaan dengan kekekalan energi (4) prinsip korespondensi.

## **2.2 Efek Fotolistrik**

Pada tahun 1887 (sepuluh tahun sebelum ditemukannya elektron), Heinrich Hertz melakukan percobaan tentang gelombang-gelombang elektromagnetik untuk mempelajari teori Maxwell tentang gelombang itu. Hertz ingin mengetahui apakah lompatan lucutan listrik dapat terjadi antara dua sistem yang dapat beresonansi. Pertama dia menimbulkan gelombang elektromagnetik dengan lucutan pada sistem pertama. Ternyata pada sistem kedua yang beresonansi dengan sistem pertama juga terjadi lucutan listrik pada kutubnya dengan mudah apabila cahaya dari lucutan pada sistem pertama mengenai kutub-kutub pada sistem kedua. Tetapi apabila cahaya dari sistem pertama ditutup maka untuk terjadinya lucutan resonansi, sistem kedua harus dibuat lebih dekat pada sistem pertama. Hertz sebenarnya tidak

tertarik dengan peristiwa ini tetapi justru menarik perhatian pada ilmuwan lainnya.

Philipp Eduard Anton von Lenard salah seorang dari peneliti pada tahun 1900 berhasil membelokkan berkas partikel yang keluar dari sebuah permukaan dengan menggunakan sebuah medan magnet. Dari percobaan tersebut, dia mendapatkan perbandingan antara muatan dan massa partikel tersebut yang sama dengan yang diperoleh Thomson dalam percobaan mengukur  $e/m$  dari elektron. Skema peralatan dasar untuk melakukan percobaan Lenard dapat dilihat pada gambar 2.1 berikut

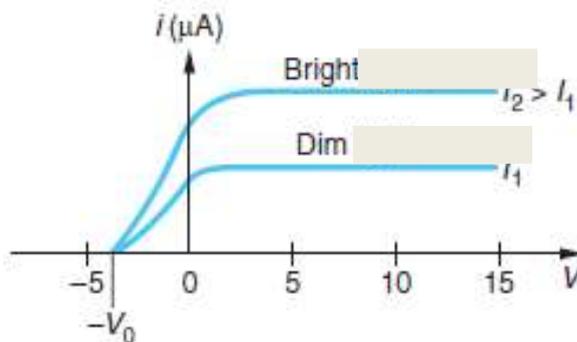


Gambar 2.1 Skema diagram dari peralatan yang digunakan oleh Lenard untuk menunjukkan efek fotolistrik dan untuk menunjukkan bahwa partikel yang dipancarkan dalam proses adalah elektron. Cahaya dari sumber L membentur katoda C. Fotoelektron akan terpancar keluar melalui lubang dianoda A dan dicatat oleh elektrometer yang terhubung ke  $\alpha$ . sebuah medan magnet, ditandai dengan potongan tiang melingkar, bisa membelokkan fotoelektron ke elektrometer kedua yang terhubung ke  $\beta$  yang memungkinkan pengukuran perbandingan  $e/m$  (Sumber, P. Lenard, *Annalender Physik* dalam Tipler & Llewellyn, 2008)

Jika cahaya dijatuhkan pada sebuah permukaan logam (katoda C) maka elektron-elektron akan terpancar keluar. Jika beberapa dari elektron

tersebut tertangkap oleh anoda A maka akan ada arus pada rangkaian luar. Banyaknya elektron yang tertangkap di A dapat diperbanyak atau dikurangi dengan membuat beda potensial antara C dan A positif atau negatif.

Misalnya beda potensial antara katoda dan anoda adalah  $V$ . Gambar 2.2 memperlihatkan diagram antara arus dan beda potensial  $V$  untuk dua macam intensitas cahaya yang dijatuhkan pada katoda. Jika  $V$  positif, elektron akan tertarik ke anoda. Pada harga  $V$  yang cukup besar, semua pancaran elektron mencapai anoda dan arus mencapai harga maksimum.



Gambar 2.2. Arus fotolistrik dan potensial  $V$  untuk dua harga intensitas cahaya yang berbeda. Jika  $V < -V_0$  tidak akan ada arus.

Menurut Lenard, arus maksimum sebanding dengan intensitas cahaya. Apabila intensitas cahaya atau besarnya energi persatuan waktu yang tiba pada katoda diduakalikan, maka diharapkan arus maksimumnya juga dua kali besarnya. Jika  $V$  negatif, elektron-elektron akan ditolak oleh anoda karena muatan elektron negatif. Elektron yang dapat tiba di anoda adalah elektron yang memiliki energi kinetik awal lebih besar dari  $eV$ . Jika  $V$  lebih kecil dari  $V_0$ , tidak akan ada elektron yang mencapai anoda. Potensial  $V_0$  disebut “Potensial Pemerhenti”. Dengan demikian maka berlaku hubungan

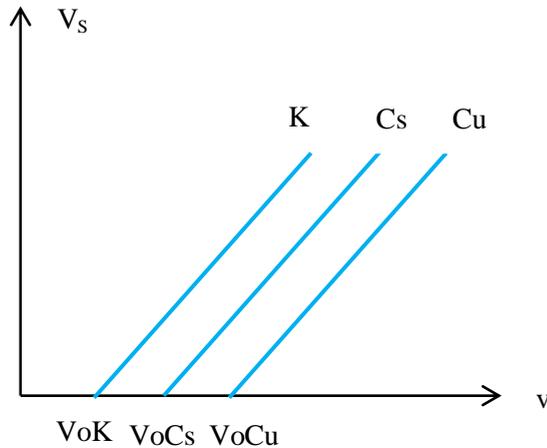
$$(1/2 mv^2)_{\text{maks}} = e V_0 \quad 2.1$$

### 2.2.1 Fakta-fakta Eksperimen

Fakta-fakta eksperimen efek fotolistrik yang penting untuk dibicarakan disini meliputi: (1) diperlukannya frekuensi ambang untuk menghasilkan efek fotolistrik, (2) ketakbergatungan energi kinetik foto elektron terhadap intensitas cahaya, (3) tiadanya waktu tunda antara penyinaran pertama sampai terjadinya arus fotoelektronik, dan (4) kebergantungannya arus fotoelektrik terhadap intensitas cahaya. Gambar 2.3 berikut menyajikan grafik hasil eksperimen (secara kualitatif) yang berhubungan dengan gejala-gejala penting tersebut.

#### **Diperlukan frekuensi ambang untuk menghasilkan efek fotolistrik**

Gambar 2.3 menyajikan data eksperimen tentang kebergantungan potensial penghenti terhadap frekuensi cahaya yang digunakan untuk beberapa logam, yaitu potasium (kalium K), cesium (Cs) dan tembaga (Copper, Cu). Grafik tersebut menunjukkan bahwa untuk logam tertentu, jika frekuensi cahaya yang digunakan kurang dari  $\nu_0$  maka tidak diperlukan potensial penghenti. Tidak diperlukannya potensial penghenti menunjukkan bahwa tidak ada foto elektron yang terlepas. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa untuk menghasilkan efek fotolistrik diperlukan cahaya dengan frekuensi lebih dari  $\nu_0$ . Frekuensi ini selanjutnya disebut **frekuensi ambang**.



Gambar 2.3. Kebergantungan potensial pemerhenti  $V$  terhadap frekuensi cahaya  $\nu$  untuk logam Kalium, Cesium dan Tembaga

Grafik tersebut juga menunjukkan bahwa logam yang berbeda memiliki frekuensi ambang  $\nu_0$  yang berbeda pula. Untuk memperoleh foto elektron dari masing-masing logam harus digunakan cahaya yang frekuensinya lebih besar daripada frekuensi ambang untuk logam tersebut. Pada sebagian besar logam, frekuensi ambang ini terletak pada daerah ultraviolet.

Berdasarkan Gambar 2.3 tersebut diperoleh hubungan  $V_s \sim (\nu - \nu_0)$ . Kesebandingan ini dapat diubah menjadi kesamaan dengan menggunakan kesebandingan  $h/e$  dengan  $e$  menyatakan muatan elektron dan  $h$  suatu tetapan yang berdimensikan energi kali waktu.

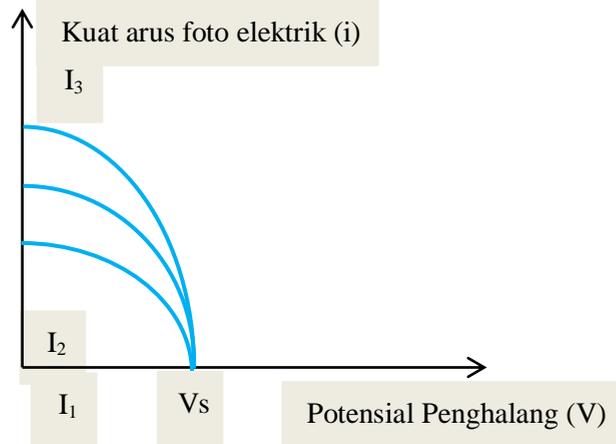
$$eV_s = h\nu - h\nu_0 \quad 2.2$$

Nilai tetapan  $h$  ditentukan berdasarkan kecondorongan garis (*slope*). Eksperimen menunjukkan bahwa nilai tetapan ini sama dengan tetapan Planck yang ditemukan pada gejala radiasi benda-hitam.

### Energi kinetik foto elektron tidak bergantung pada intensitas cahaya

Seperti telah disebutkan, energi kinetik foto elektron tercepat sama dengan  $eV_s$ . Oleh sebab itu, besarnya energi kinetik foto elektron tercepat dapat diketahui dari nilai potensial penghenti  $V_s$ . Grafik

ketidakbergantungan potensial penghenti terhadap intensitas cahaya disajikan pada gambar 2.4 sebagai berikut



Gambar 2.4. Grafik ketidakbergantungan energi kinetik foto elektron terhadap intensitas cahaya

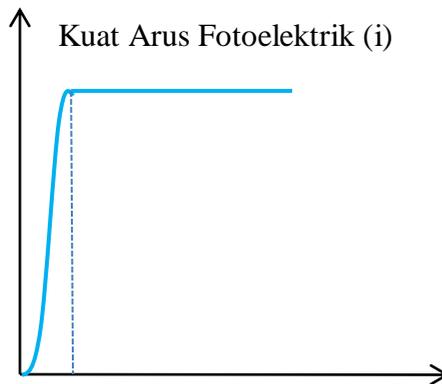
Gambar 2.4 menunjukkan bahwa untuk semua intensitas  $I$  yang digunakan, kuat arus fotoelektrik berkurang dan bertambahnya potensial penghalang. Pada potensial penghalang tertentu yang besarnya kurang dari  $V_s$ , kuat arus fotoelektrik bergantung pada intensitas, semakin besar intensitas semakin besar pula kuat arus yang dihasilkan. Jika potensial penghalang yang terpasang sama dengan potensial penghenti  $V_s$ , ketiga intensitas tersebut semuanya tidak menghasilkan arus fotoelektrik. Besarnya potensial penghenti untuk ketiga nilai  $I$  tersebut ternyata sama.

Gejala tersebut dapat ditafsirkan sebagai berikut. Pada saat potensial penghalang sangat rendah, hampir semua foto elektron yang dilepaskan plat mampu mencapai plat A sehingga arus fotoelektrik yang dihasilkan cukup kuat. Semakin besar potensial penghalang semakin sedikit cacah foto elektron yang mampu mencapai plat A. Hanya foto elektron yang sangat energik yang mampu mencapai plat tersebut. Pada saat potensial penghalang sama dengan potensial penghenti sama dengan potensial penghenti, tidak

ada foto elektron yang mampu mencapai plat A. Akibatnya, arus fotoelektrik terhenti.

Mengingat percobaan dilakukan dengan cahaya yang frekuensinya tertentu maka dapat disimpulkan bahwa untuk cahaya dengan frekuensinya tertentu, intensitas cahaya tidak mempengaruhi besarnya potensial penghenti. Dengan kata lain energi kinetik fotoelektron tidak bergantung pada intensitas cahaya yang digunakan.

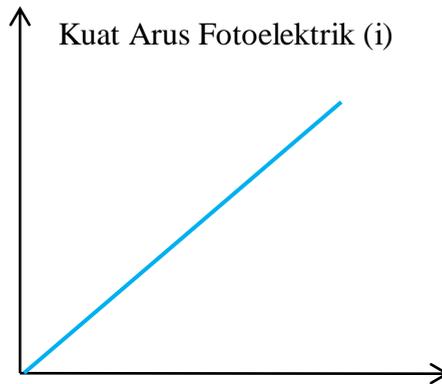
### Tidak ada waktu tunda antara penyinaran sampai terjadinya arus fotoelektrik



Gambar 2.5. Grafik Waktu ( $t$ ) arus fotoelektrik ( $i$ ) sejak saat penyinaran pertama

Grafik tersebut menunjukkan bahwa arus fotoelektrik muncul secara spontan begitu cahaya menyinari permukaan logam. Selang waktu antara saat penyinaran pertama sampai terjadinya arus ajeg (*steady*) dapat dianggap sama dengan selang waktu antara penyinaran pertama sampai lepasnya foto elektron. Besaran ini selanjutnya disebut waktu tunda. Meskipun intensitas cahaya yang digunakan sangat rendah sehingga mencapai  $10^{-10} \text{ W/m}^2$  waktu tunda tersebut tidak lebih dari  $1 \text{ ns}$  ( $10^{-9} \text{ s}$ ). Sebagai pembandingan, intensitas  $10^{-10} \text{ W/m}^2$  kira-kira sama dengan intensitas cahaya pada jarak 360 km dari lampu 100 W.

## Kuat arus fotoelektrik berbanding lurus terhadap intensitas cahaya



Gambar 2.6. Grafik kuat arus fotoelektrik terhadap intensitas cahaya untuk cahaya dengan frekuensi tertentu. Potensial penghalang dipasang nol

Gambar 2.6 menunjukkan bahwa hubungan antara kuat arus fotoelektrik dengan intensitas cahaya untuk frekuensi tertentu. Grafik tersebut menunjukkan bahwa kuat arus fotoelektrik berbanding lurus terhadap intensitas cahaya. Kuat arus fotoelektrik sebanding dengan cacah foto elektron yang dilepaskan persatuan waktu, maka hubungan tersebut juga menggambarkan hubungan antara cacah foto elektron terhadap intensitas cahaya. Jadi, untuk frekuensi cahaya tertentu, cacah foto elektron yang dilepaskan logam berbanding lurus dengan intensitas cahaya.

### 2.2.2 Penjelasan Teoritis

Pada kasus ini, penjelasan teoritis dipandang dari teori klasik dan teori kuantum.

#### 2.2.2.1 Teori klasik

Berdasarkan teori elektromagnetik klasik, kenyataan-kenyataan yang diperoleh dari berbagai eksperimen dapat dijelaskan sebagai berikut:

- (i) Bertitik tolak pada pandangan tentang hakekat gelombang cahaya yang malar, energi yang diterima oleh permukaan sebanding dengan intensitas cahaya, luas permukaan logam yang disinari dan lamanya penyinaran. Ini berarti bahwa apabila intensitas cahaya kecil,

diperlukan waktu yang lebih lama agar energi yang diserap elektron cukup besar untuk melepaskan dirinya dari permukaan logam. Berdasarkan perhitungan klasik, bila intensitas cahaya sebesar  $10^{-10}$  W/m<sup>2</sup> dalam selang waktu  $10^{-9}$  sekon belum ada elektron yang dapat keluar. Untuk intensitas sekecil itu dibutuhkan waktu sekurang-kurangnya beberapa jam agar elektron dapat terlepas

- (ii) Menurut teori klasik, makin tinggi intensitas cahaya makin banyak pula energi yang diserap oleh elektron pada permukaan logam. Oleh karena itu, diharapkan arus elektron semakin tinggi sesuai kenaikan intensitas. Dalam batasan-batasan tertentu anggapan ini sesuai dengan hasil eksperimen. Tetapi jika frekuensi cahaya lebih kecil dari frekuensi ambang,  $\nu_0$  tidak ada arus elektron, berapapun besarnya intensitas cahaya
- (iii) Seperti halnya dengan butir (i) di atas, besarnya energi yang diterima elektron secara klasik ditentukan oleh intensitas cahaya dan bukan oleh frekuensinya. Sebab itu adanya potensial henti yang berbeda untuk setiap logam, benar-benar di luar dugaan teori klasik.
- (iv) Adanya energi kinetik maksimum bagi foto elektron untuk setiap frekuensi, sama sekali tidak dapat dijelaskan oleh teori klasik. Hal ini disebabkan karena menurut teori klasik, energi elektron seharusnya tidak bergantung pada frekuensi.

Dari interpretasi di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa berdasarkan teori elektromagnetik klasik, peristiwa efek fotolistrik sama sekali tidak dapat diterangkan dengan baik.

#### 2.2.2.2 Teori Kuantum

Dengan teori kuantum cahaya, kenyataan-kenyataan dalam eksperimen dapat dijelaskan sebagai berikut:

- (i) Menurut teori kuantum, energi sebuah foton hanya ditentukan oleh frekuensinya. Dapat tidaknya sebuah elektron terpelantak keluar dari permukaan logam tidak ditentukan oleh intensitas cahaya. Bentuk elektron tertumbuk dan energi foton cukup untuk mengatasi energi

ikat elektron, begitu foton menyerahkan energinya. Energi yang diterima elektron bukan akumulasi dari energi berbagai foton.

- (ii) Menurut teori kuantum, intensitas suatu gelombang elektromagnetik mono khromatik adalah energi tiap foton dikalikan dengan banyaknya foton yang lewat penampang satu satuan luas waktu. Makin tinggi intensitas makin banyak pula foton yang menumbuk permukaan logam. Arus fotoelektron  $I$  berbanding langsung dengan intensitas cahaya  $I_n$ . Persamaan (2.3) dalam bentuk:

$$hv = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{maks} = hv_0 \quad 2.3$$

Persamaan 2.3 mempunyai arti sebagai berikut. Bagian kiri dari persamaan tersebut menyatakan energi yang dibawa oleh sebuah foton yang frekuensinya  $\nu$  yang diberikan kepada sebuah elektron terikat pada saat tumbukan. Bagian kanan menyatakan banyaknya energi yang diterima oleh elektron ketika tumbukan. Energi ini merupakan electron yang digunakan untuk:

- Melepaskan dirinya dari ikatan atomnya (sebesar energi ikatnya)
- Energi kinetik dalam gerakannya meninggalkan permukaan

Energi yang digunakan untuk melepaskan diri dari ikatan ini biasanya dinyatakan dengan  $\phi$  disebut fungsi kerja sebesar:

$$\phi = hv_0 \quad 2.4$$

Dengan demikian maka persamaan (2.3) dapat ditulis:

$$hv = (1/2 mv^2)_{maks} + \phi \quad 2.5$$

atau 
$$e V_0 = (1/2 mv^2)_{maks} = hv - \phi \quad 2.6$$

Persamaan (2.6) ini disebut persamaan Einstein untuk efekfotolistrik Energi kinetik.

- (iii) Adanya energi kinetik maksimum fotoelektron yang terdefinisi dengan baik untuk tiap frekuensi dapat dimengerti oleh karena frekuensi menentukan besarnya energi foton.

Dari persamaan Einstein tentang efekfotolistrik (2.6) terlihat bahwa kemiringan  $V_0$  terhadap  $\nu$  sama dengan  $h/e$ . Pada saat persamaan ini ditemukan oleh Einstein sesungguhnya belum ada bukti tentang adanya

kaitan antara tetapan Planck dengan tetapan  $h$  pada efek fotolistrik. Begitu juga belum ada bukti kebergantungan potensial henti  $V_0$  terhadap frekuensi, nanti pada tahun 1916 Milikan setelah melakukan percobaan melaporkan bahwa persamaan 2.6 sesuai dengan eksperimen dan pengukuran  $h$  benar-benar sesuai dengan tetapan Planck.

Pada persamaan 2.6, untuk  $V_0 = 0$ , maka pada frekuensi ambang,  $\nu_0$  dan panjang gelombang ambang  $\lambda_0$  dapat dituliskan

$$\begin{aligned} eV_0 &= h\nu - \phi \\ \phi &= h\nu_0 = hc/\lambda_0 \end{aligned} \quad 2.7$$

Biasanya panjang gelombang dinyatakan dengan Angstrom ( $\text{\AA}$ ) dan energi dalam elektronvolt (eV). Sebab itu satuan  $hc$  dalam satuan-satuan tersebut adalah:

$$\begin{aligned} hc &= (4,14 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}) (3 \times 10^8 \text{ m/s}) \\ &= 1,24 \times 10^{-6} \text{ eV}\cdot\text{m} \\ &= 12.400 \text{ eV}\cdot\text{\AA} \end{aligned}$$

### Contoh 2.1

Frekuensi ambang potassium  $5,376 \times 10^{14}$  Hz. Berapa besar fungsi kerja potassium itu? Berapa besar potensial henti bila cahaya yang digunakan 400 nm?

$$\phi = h\nu_0 = (4,14 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}) (5,376 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}) = 2,23 \text{ eV}$$

Energi sebuah foton dengan panjang gelombang 400 nm adalah:

$$E = hc/\lambda = (1240 \text{ eV}\cdot\text{nm})/400\text{nm} = 3,10 \text{ eV}$$

Energi kinetik maksimum elektron yang dipancarkan adalah:

$$(1/2m v^2)_{\text{maks}} = h\nu - \phi = 3,10 \text{ eV} - 2,23 \text{ eV} = 0,87 \text{ eV}.$$

Jadi potensial henti = 0,87 volt

### Contoh 2.2

Dengan menggunakan data pada contoh 3.2, hitunglah banyaknya foton yang jatuh pada permukaan potassium persekon tiap  $1 \text{ m}^2$ .

Energi tiap foton  $E = hf = hc/\lambda = 1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}/400\text{nm} = 3,1 \text{ eV}$  atau sama dengan  $3,1 \text{ eV} \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ eV/J} = 4,96 \times 10^{-19} \text{ J}$ .

Oleh karena itu intensitas cahaya  $10^{-5} \text{ W/m}^2 = 10^{-5} \text{ J/s} \cdot \text{m}^2$ , maka banyaknya foton persekon tiap  $1 \text{ m}^2$  adalah :  $N = (10^{-5} \text{ J/s} \cdot \text{m}^2) / 4,96 \times 10^{-9} \text{ J/foton} = 2,016 \times 10^{16} \text{ foton/ s} \cdot \text{m}^2$ .

Sesungguhnya efek fotolistrik tidak hanya terjadi pada permukaan logam yang dijatuhkan foton, akan tetapi dapat juga pada permukaan bukan logam. Peristiwa ini dapat terjadi apabila sebuah foton menumbuk sebuah elektron terikat. Sebagai contoh, sebuah foton membebaskan sebuah elektron dari sebuah atom tunggal. Peristiwa ini merupakan interaksi yang sangat penting antara radiasi elektromagnetik gelombang pendek dengan atom. Apabila sebuah foton frekuensi tinggi seperti sinar X atau sinar gamma mengenai sebuah atom, maka sebuah elektron dengan energi ikat  $E_b$  dapat dibebaskan dengan syarat:  $h f > E_b$ . oleh karena energi kinetik fotoelektron biasanya harus ditulis dalam bentuk relativistik yakni  $E - E_0$ , maka bentuk umum dari persamaan (2.5) adalah:

$$h \nu = (E - E_0) + E_b \quad 2.8$$

### Contoh 2.3

Sebuah foton dengan frekuensi  $7,5 \times 10^{17} \text{ Hz}$  berinteraksi dengan sebuah elektron yang terikat dalam atom hidrogen dengan energi ikat 13,6 eV. Jika dalam peristiwa interaksi ini terjadi efek fotolistrik sedemikian sehingga elektron yang terlepas bergerak searah dengan foton yang datang, hitunglah energi (dalam eV) dan momentum (dalam eV/c) masing-masing untuk elektron dan proton.

$$\begin{aligned} \text{Energi foton} \quad h\nu &= (4,14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s})(7,5 \times 10^{17} \text{ s}^{-1}) \\ &= 3105 \text{ eV} \end{aligned}$$

$$\text{Momentum foton} \quad P_f = h\nu/c = 3105 \text{ eV}/c$$

Untuk melepaskan elektron diperlukan energi sebesar 13,6 eV. Energi yang tersisa  $3105 \text{ eV} - 13,6 \text{ eV} = 3091,4 \text{ eV}$ . Energi ini akan dijadikan energi kinetik oleh elektron. Oleh karena energi kinetik elektron jauh lebih kecil daripada energi diamnya ( $E_0 = 5,11 \times 10^5 \text{ eV}$ ) maka efek relativitas tidak perlu dimasukkan. Momentum elektron:

$$\begin{aligned} P_f &= (2 m E_k)^{1/2} = 1/c (2E_0 E_k)^{1/2} \\ &= (2 \times 5,11 \times 10^5 \text{ eV} \times 3091,4 \text{ eV})^{1/2} / c \end{aligned}$$

$$= 5,62 \times 10^4 \text{ eV}/c$$

Jika momentum proton  $P_p$ , maka dengan hukum kekekalan momentum dapat ditulis:

$$\begin{aligned} P_f &= P_p + P_e \\ 3105 \text{ eV}/c &= P_p + 5,62 \times 10^4 \text{ eV}/c \\ P_p &= -5,31 \times 10^4 \text{ eV}/c \end{aligned}$$

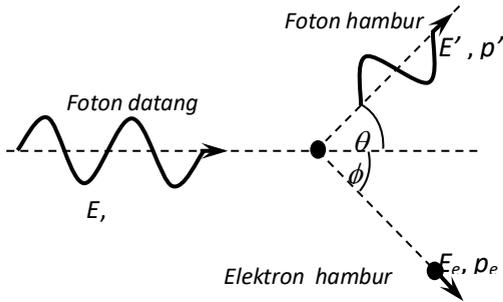
ini berarti bahwa sesudah terjadi efek fotolistrik proton bergerak kearah yang berlawanan dengan arah foton.

$$\begin{aligned} E_{k\text{proton}} &= P_p^2/2m_p = (pc)^2/2E_0 \\ &= (5,31 \times 10^4 \text{ eV})^2/(2 \times 9,38 \times 10^8 \text{ eV}) \\ &= 0,283 \text{ eV} \end{aligned}$$

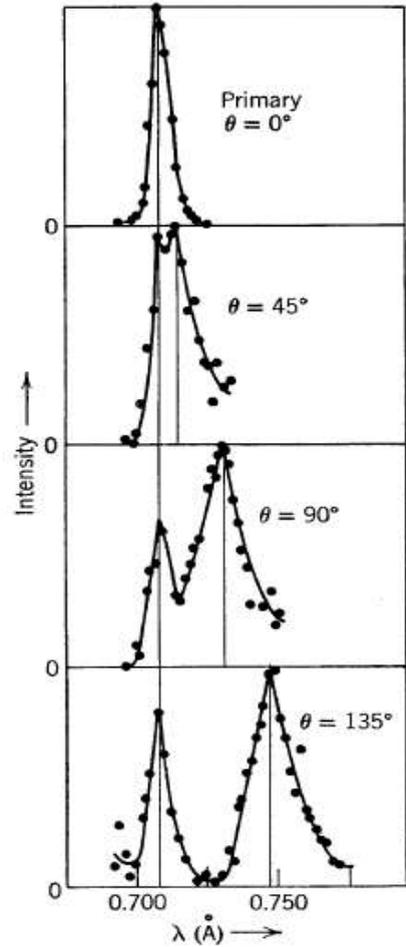
### 2.3 Efek Compton

Cara lain radiasi berinteraksi dengan atom adalah melalui efek Compton, di mana radiasi dihamburkan oleh elektron hampir bebas yang terikat lemah pada atomnya. Sebagian energi radiasi diberikan kepada elektron, sehingga terlepas dari atom; energi radiasi yang tersisa diradiasikan kembali sebagai radiasi elektromagnet. Menurut gambaran gelombang, energi radiasi yang dipancarkan itu lebih kecil daripada energi radiasi yang datang (selisihnya berubah menjadi energi kinetik elektron), namun panjang gelombang keduanya tetap sama. Kelak akan kita lihat bahwa konsep foton meramalkan hal yang berbeda bagi radiasi yang dihamburkan.

Proses hamburan ini dianalisis sebagai suatu interaksi (“tumbukan”, dalam pengertian partikel secara klasik) antara sebuah foton dengan sebuah elektron, yang kita anggap diam. Gambar 2.7 menunjukkan peristiwa tumbukan ini.



Gambar 2.7. Geometri



Gambar 2.8 Hasil eksperimen Compton

Pada keadaan awal, foton memiliki energi  $E$  yang diberikan oleh

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad 2.9$$

dan momentumnya adalah

$$p = \frac{E}{c} \quad 2.10$$

Elektron dalam keadaan diam, memiliki energi diam  $m_e c^2$ . Setelah hamburan foton memiliki energi  $E'$  dan momentum  $p'$  dan bergerak pada arah yang membuat sudut  $\theta$  terhadap arah foton datang. Elektron memiliki energi total  $E_e$  dan momentum  $p_e$  dan bergerak pada arah yang membuat sudut  $\phi$  terhadap foton datang (agar analisisnya mencakup pula foton datang berenergi tinggi yang memberikan energi sangat besar pada elektron yang dihamburkan maka kita membuat kinematika relativistik bagi elektron). Dalam interaksi ini berlaku persyaratan kekekalan energi dan momentum, yaitu:

$$E_{awal} = E_{akhir}$$

$$E + m_e c^2 = E' + E_e \quad 2.11a$$

$$(p_x)_{awal} = (p_x)_{akhir}$$

$$p = p_e \cos \phi + p' \cos \theta \quad 2.11b$$

$$(p_y)_{awal} = (p_y)_{akhir}$$

$$0 = p_e \sin \phi - p' \sin \theta \quad 2.11c$$

Kita mempunyai tiga persamaan dengan empat besaran tidak diketahui, ( $\theta$ ,  $\phi$ ,  $E_e$ ,  $E'$ ;  $p_e$  dan  $p'$  saling bergantung) yang tidak dapat dipecahkan untuk memperoleh jawaban tunggal, tetapi kita dapat menghilangkan (eliminasi) dua dari keempat besaran ini dengan memecahkan persamaannya secara serentak. Jika kita memilih untuk mengukur energi dan arah foton hambur, maka kita menghilangkan  $E_e$  dan  $\phi$ . Sudut  $\phi$  dihilangkan dengan menggabungkan persamaan – persamaan momentum:

$$p_e \cos \phi = p + p' \cos \theta$$

$$p_e \sin \phi = p' \sin \theta$$

Kuadratkan dan kemudian jumlahkan, memberikan:

$$p_e^2 = p^2 - 2pp' \cos \theta + p'^2 \quad 2.12$$

Dengan menggunakan hubungan relativistik antara energi dan momentum :

$$E_e^2 = c^2 p_e^2 + m_e^2 c^4$$

maka dengan menyisipkan  $E_e$  dan  $p_e$ , kita peroleh

$$(E + m_e c^2 - E')^2 = c^2(p^2 - 2pp' \cos \theta + p'^2) + m_e^2 c^4 \quad 2.13$$

dan lewat aljabar, kita dapatkan

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \quad 2.14$$

Persamaan (2.14) dapat pula dituliskan sebagai berikut :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad 2.15$$

$\lambda$  adalah panjang gelombang foton datang dan  $\lambda'$  panjang gelombang hambur. Besaran  $h/m_e c$  dikenal sebagai panjang gelombang Compton dari elektron yang memiliki nilai 0,002426 nm; namun perlu diingat bahwa ini bukanlah suatu panjang gelombang dalam arti sebenarnya, melainkan semata – semata suatu perubahan panjang gelombang.

Persamaan (2.14) dan (2.15) memberikan perubahan dalam energi atau panjang gelombang foton, sebagai fungsi dari sudut hamburan  $\theta$ . Karena besaran di ruas kanan tidak pernah negatif, maka  $E'$  selalu lebih kecil daripada  $E$  – foton hambur memiliki energi yang lebih kecil daripada foton datang, selisih  $E - E'$  adalah energi kinetik yang diberikan kepada elektron,  $(E_e - m_e c^2)$ . Begitu pula,  $\lambda'$  selalu lebih kecil daripada  $\lambda$  foton hambur memiliki panjang gelombang yang lebih panjang daripada milik foton datang, perubahan panjang ini merentang dari 0 pada  $\theta = 0^\circ$  hingga dua kali panjang gelombang Compton pada  $\theta = 180^\circ$ . Tentu saja deskripsi foton dalam energi dan panjang gelombang adalah setara, dan pilihan mengenai mana yang digunakan hanyalah masalah kemudahan belaka.

Peragaan eksperimen pertama dari jenis hamburan ini dilakukan oleh **Arthur Holly Compton** pada tahun 1923. Pada percobaan ini seberkas sinar-X dijatuhkan pada suatu sasaran hamburan, yang oleh Compton dipilih unsur karbon. Meskipun tidak ada sasaran hamburan yang mengandung elektron yang benar-benar bebas, elektron terluar atau elektron valensi dalam kebanyakan materi terikat sangat lemah pada atomnya sehingga berperilaku seperti elektron hampir “bebas”. Energi kinetik

elektron ini dalam atom sangatlah kecil dibandingkan terhadap energi kinetik  $K_e$  yang diperoleh elektron dalam proses hamburan ini. Energi dari sinar-X yang terhambur diukur dengan sebuah detektor yang dapat berputar pada berbagai sudut  $\theta$ .

#### Contoh 2.4

Sinar-X dengan panjang gelombang 0,2400 nm dihamburkan secara Compton dan berkas hamburnya diamati pada sudut  $60,0^\circ$  relatif terhadap arah berkas datang. Carilah: (a) panjang gelombang sinar - X hambur, (b) energi foton sinar - X hambur, (c) energi kinetik elektron hambur, dan (d) arah gerak elektron hambur.

#### Penyelesaian :

(a)  $\lambda'$  dapat dicari secara langsung dari Persamaan (2.15) :

$$\begin{aligned}\lambda' &= \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \\ &= 0,2400 \text{ nm} + (0,00243 \text{ nm}) (1 - \cos 60^\circ) \\ &= 0,2412 \text{ nm}\end{aligned}$$

(b) Energi  $E'$  dapat diperoleh langsung dari  $\lambda'$  :

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0,2412 \text{ nm}} = 5141 \text{ eV}$$

(c) Dari Persamaan (2.11a) bagi kekekalan energi, diperoleh

$$\begin{aligned}E_e &= (E - E') + m_e c^2 = K_e + m_e c^2 \\ K_e &= E - E'\end{aligned}$$

Energi E dari foton awal adalah :  $\frac{hc}{\lambda} = 5167 \text{ eV}$ , jadi

$$K = 5167 \text{ eV} - 5141 \text{ eV} = 26 \text{ eV}$$

(d) Dengan memecahkan Persamaan (2.11b) dan (2.11c) untuk  $p_e \cos \phi$  dan  $p_e \sin \phi$  seperti yang kita lakukan untuk menurunkan Persamaan

(1.12), maka dengan membagi keduanya (bukannya menjumlahkan dan mengalikan), diperoleh

$$\tan \phi = \frac{p' \sin \theta}{p - p' \cos \theta}$$

kalikan penyebut dan pembilangnya dengan  $c$ , dan mengingat bahwa  $E = pc$  dan  $E' = p'c$ , diperoleh

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{E' \sin \theta}{E - E' \cos \theta} = \frac{(5141 \text{ eV})(\sin 60^\circ)}{(5167 \text{ eV}) - (5141 \text{ eV})(\cos 60^\circ)} \\ &= 1,715 \\ \phi &= 59,7^\circ. \end{aligned}$$

## 2.4 Foton Sebagai Partikel

Foton adalah partikel atau kuantum medan elektromagnetik. Dari penjelasan tentang efek fotolistrik diketahui bahwa energi yang dibawa oleh tiap foton adalah  $E = h\nu$  dengan  $h$  sebagai tetapan Planck dan  $\nu$  sebagai frekuensi. Pertanyaan mendasar yang perlu dijawab ialah sebagai berikut. Misalkan sebuah pancaran elektromagnetik yang frekuensinya  $\nu$  menjalar ke suatu arah dengan kecepatan cahaya  $c$ . Apakah paket ini juga membawa momentum? Kalau jawabannya ya, berapa besar momentum yang dibawanya itu. Jika paket yang kita beri nama foton itu benar memiliki sifat partikel, tentu saja ia akan membawa momentum dan dapat dirancang suatu eksperimen untuk mengukurnya.

Dalam pelajaran tentang gejala gelombang kita ketahui bahwa untuk suatu gelombang elektromagnetik yang merambat pada suatu arah tertentu berlaku hubungan:

$$P = E/c \tag{2.16}$$

Dengan  $P$  sebagai momentum dan  $E$  sebagai energi. Sekalipun hubungan ini ditemukan dalam teori elektromagnetik klasik, namun dapat pula diberlakukan untuk kuantum elektromagnetik.

Untuk memperlihatkan hal ini, kita misalkan foton menjalar ke arah sumbu  $X$  positif di dalam suatu kerangka acuan. Dengan menganggap foton sebagai partikel maka energi yang dibawa oleh foton tersebut adalah  $E = h\nu$

dan momentumnya adalah  $P$  yang belum diketahui. Kita misalkan pula bahwa pada suatu kerangka yang lain berlaku hal yang serupa dan kerangka yang kedua ini bergerak dengan kecepatan  $v$  terhadap kerangka yang pertama ke arah sumbu  $X$  positif. Seorang pengamat pada kerangka kedua akan melihat sebuah foton yang frekuensinya  $\nu'$  membawa energi  $E' = \hbar \nu'$  dengan momentum  $p'$ . Oleh karena  $c > v$ , maka foton pada kerangka kedua akan menjalar ke arah sumbu  $X'$  positif.

Dari mekanika dasar diketahui bahwa hubungan antar  $\nu$  dan  $\nu'$  dapat di tulis sebagai berikut.

$$\nu' = \nu \left[ \frac{c - v}{c + v} \right]^{1/2}$$

2.17

Hubungan kedua ialah hukum transformasi relativitas untuk energi dan momentum sebuah partikel yang diberikan oleh:

$$E' = \frac{E - vp}{\left[ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad 2.18$$

digunakan  $E = \hbar \nu$  dan  $E' = \hbar \nu'$  untuk menghapuskan  $E$  dan  $E'$  dari persamaan 2.18, maka diperoleh :

$$\hbar \nu' = \frac{\hbar \nu - vp}{\left[ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad 2.19$$

Untuk meniadakan  $\nu'$  dari persamaan (2.19) digunakan (2.17) yang menghasilkan :

$$\hbar \nu \left[ \frac{c - v}{c + v} \right]^{1/2} = (\hbar \nu - vp) / (1 - (v/c)^2)^{1/2} \quad 2.20$$

dengan menyelesaikan persamaan (2.20) akhirnya didapat :

$$P = \hbar \nu / c \quad 2.21$$

atau  $P = E/c \quad 2.22$

Hasil akhir ini memperlihatkan bahwa sebuah foton cahaya dengan frekuensi  $\nu$  selalu membawa momentum sebesar  $\hbar \nu/c$ .

Pernyataan berikutnya yang perlu dijawab ialah apabila foton itu benar memiliki sifat partikel, berapa besar massa diamnya. Untuk menjawab pernyataan tersebut, kita tinjau persamaan yang menyatakan hubungan

antara massa diam, energi, dan momentum di dalam fisika dasar. Persamaan tersebut adalah :

$$(m_f c^2)^2 = E^2 - (c p)^2 \quad 2.23$$

Dengan  $m_f$  sebagai massa diam foton. Jika  $P$  dalam (2.23) diganti dengan (2.22) maka di dapat  $m_f = 0$ , jadi foton tidak memiliki massa diam.

Hasil akhir ini tentu saja tampaknya aneh. Jika foton memiliki sifat partikel, seharusnya ia memiliki massa daim. Namun demikian, jika kita mengingat bahwa tidak ada suatu kerangka inersia yang dapat dipilih yang memungkinkan foton itu berada dalam keadaan diam, maka keanehan itu segera akan dihilangkan. Bukankah pancaran elektromagnetik senantiasa merambat dengan kecepatan  $c$  dalam setiap kerangka inersia? Karena itu, “sebuah foton berada dalam keadaan diam” merupakan suatu konsep yang tidak mengandung arti. Foton tidak mempunyai massa, namun tetap memiliki sifat sebagai partikel.

Misalkan sebuah kegiatan eksperimen dilakukan untuk memperhatikan apakah sifat partikel foton konsisten dengan hasil-hasil yang diperoleh dari teori elektromagnetika klasik. Dalam hal ini, paket pancaran elektromagnetik dianggap memiliki sifat partikel di dalam fisika klasik.

Tinjau sebuah sumber cahaya yang memancarkan foton dengan frekuensi  $\nu$ . Cahaya ini dijatuhkan tegak lurus pada permukaan sebuah cermin yang diam terhadap sumber cahaya itu. Menurut teori elektromagnetika klasik, frekuensi cahaya yang dipantulkan oleh cermin juga adalah  $\nu$ , begitu pula fluks energi yang menuju cermin sama dengan fluks energi yang menjauhinya. Selanjutnya, pancaran cahaya ini akan memberikan tekanan pancaran. Besar tekanan adalah:

$$P = W \quad 2.24$$

Dengan  $W$  sebagai rapat energi medan pancaran disekitar permukaan cermin

Misalkan  $\Phi$  adalah fluks energi yang menyatakan banyaknya energi yang mengalir menuju cermin persatuan waktu melalui satu satuan luas tegak lurus terhadap arah pancaran. Jika  $\Phi'$  menyatakan fluks energi pantulan maka:  $\Phi = \Phi'$ . Rapat energi medan pancaran  $W$  dapat dinyatakan:

$$W = \Phi/c + \Phi' / c = 2 / c \quad 2.25$$

Akhirnya, fluks energi dan tekanan pancaran dihubungkan oleh persamaan:

$$P = 2 \Phi/c \quad 2.26$$

Yang didapat dengan menggabungkan (2.24) dan (2.25)

Sekarang mari kita tinjau situasi di atas dari sudut pandang teori kuantum. Misalkan ada  $N$  foton persatuan waktu melalui satu satuan luas menuju cermin. Tiap foton membawa energi  $E = \hbar\nu$  dan momentum  $p = \hbar\nu/c$ . Sesudah bertumbukan dengan cermin, atau momentum tiap foton menjadi sebaliknya, sehingga momentum sebesar  $2p$  diberikan kepada cermin oleh masing-masing foton.

Tekanan  $P$  besarnya sama dengan momentum yang diberikan persatuan waktu kepada setiap satu satuan luas cermin dan menyatakan dengan

$$P = 2N \hbar\nu / c \quad 2.27$$

Fluks energi dinyatakan dengan :  $\Phi = N \hbar \nu$  2.28

Oleh karena tiap foton bergerak dengan kecepatan  $c$  maka rapat energi dapat ditulis:

$$W = 2N \hbar \nu / c \quad 2.29$$

Dari persamaan (2.27), (2.28), dan (2.29), dapat diturunkan persamaan (2.24), dan (2.26). Ini menunjukkan bahwa sifat partikel foton konsisten dengan teori elektromagnetika klasik.

Tinjau sebuah sumber cahaya di dalam laboratorium yang memancarkan cahaya foton dengan frekuensi  $\nu$ . Foton ini dijatuhkan tegak lurus pada sebuah cermin yang bergerak dengan kecepatan  $v$  terhadap sumber cahaya. Massa cermin  $M$  dianggap cukup besar sehingga masalah ini tidak dapat dibahas dalam kerangka yang berkenaan dengan teori relativitas.

Dari segi pandang teori kuantum, sebelum bertumbukan dengan cermin, sebuah foton memiliki energi dan momentum  $P = E/c$ , dan sesudah tumbukan energinya menjadi  $E'$  dan momentumnya  $p' = E'/c$ . Berdasarkan prinsip kekekalan momentum dan prinsip kekekalan tenaga, dapat di tulis sebagai berikut :

$$p + Mv = -p + Mv' \text{ (kekekalan momentum)} \quad 2.30$$

$$E + \frac{1}{2} Mv^2 = E' + \frac{1}{2} Mv'^2 \text{ (kekekalan tenaga)} \quad 2.31$$

Dalam kedua persamaan ini  $v'$  menyatakan kecepatan cermin sesudah terjadi tumbukan. Jika frekuensi foton yang terpantul  $\nu' = E'/h$  maka (2.30) dan (2.31) dapat dituliskan kembali dengan bentuk:

$$h\nu/c + Mc = -h\nu'/c + mv' \quad 2.32$$

$$h\nu + \frac{1}{2} Mv^2 = h\nu' + \frac{1}{2} Mv'^2 \quad 2.33$$

dengan menghilangkan  $v'$  pada kedua persamaan diperoleh:

$$h(\nu - \nu') = (v/c) h(\nu - \nu') + \frac{1}{2} M \left( \frac{h}{c} \right)^2 (\nu + \nu')^2 \quad 2.34$$

Oleh karena massa cermin dianggap cukup besar maka suku kedua dari ruas kanan persamaan 2.24 dapat dihilangkan sehingga persamaan tersebut menjadi:

$$\nu' = \nu (1 - v/c) / (1 + v/c) \quad 2.35$$

Dalam persamaan ini,  $v/c$  sangat kecil sehingga (2.35) dapat disederhanakan menjadi:

$$\nu' = \nu (1 - 2v/c) \quad 2.36$$

Sekarang yang menjadi masalah apakah hasil ini dapat juga diperoleh melalui prinsip elektromagnetika klasik?

Untuk menjawab pertanyaan ini, tinjau kembali sumber cahaya yang memancarkan cahaya tegak lurus ke cermin yang bergerak dengan kecepatan  $v$  terhadap terhadap sumber cahaya itu. Seorang pengamat yang diam di dalam laboratorium akan melihat cahaya yang di pantulkan oleh cermin tersebut seolah-olah berasal dari sebuah sumber di belakang cermin, yakni bayangan sumber cahaya itu. Bayangan cermin ini bergerak dengan kecepatan  $v$  terhadap pengamat. Oleh karena  $v$  cukup kecil, penjumlahannya tidak perlu menggunakan teori relativitas sehingga bayangan sumber cahaya akan bergerak menjauhi pengamat dengan kecepatan  $2v$  (Gambar 2.11). Berdasarkan efek Doppler, frekuensi cahaya yang terpantul adalah:

$$\nu' = \nu (1 - 2v/c)$$

yang sesuai dengan persamaan (2.36). Sekali lagi terlihat bahwa hasil yang diperoleh dari penjabaran menurut teori kuantum sesuai dengan penjabaran melalui teori elektromagnetika klasik.

## 2.5 Spektroskopi Atom Hidrogen

### Johann Balmer (1885):

Eksperimen menunjukkan bahwa panjang gelombang semua garis spektrum atom hidrogen bisa diungkapkan dengan rumus empiris:

$$\frac{1}{\lambda_n} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

dengan  $R = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$  disebut konstanta Rydberg.

Balmer dan Ritz: mengemukakan rumus yang lebih umum,

$$\frac{1}{\lambda_n} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right); \quad n > m$$

Dengan rumusan empiris ini, Lyman menemukan deret ultraviolet untuk  $m=1, n=2, 3, \dots$

Kemudian Paschen menemukan deret inframerah untuk  $m=3, n=4, 5, 6, \dots$

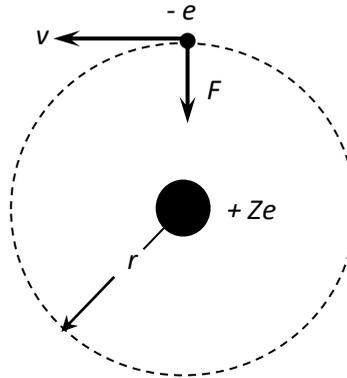
### Ernest Rutherford (1911):

Berdasarkan percobaan hamburan partikel- $\alpha$ , menyarankan struktur atom terdiri dari inti bermuatan positif dan elektron- elektron yang mengitarinya. Sayangnya, teori fisika pada masa itu tak mampu menjelaskan hasil penemuan Rutherford dalam kaitannya dengan rumusan Balmer-Ritz di atas.

## 2.6 Atom Hidrogen Model Bohr

Setelah Rutherford mengemukakan bahwa massa dan muatan positif atom terhimpun pada suatu daerah kecil dipusatnya, fisikawan Denmark, **Niels Bohr**, pada tahun 1913 mengemukakan bahwa atom ternyata mirip sistem planet mini, dengan elektron-elektron mengedari inti atom seperti planet-planet mengedari matahari. Dengan alasan yang sama bahwa sistem tata surya tidak runtuh karena tarikan gravitasi antara matahari dan tiap planet, atom juga tidak runtuh karena tarikan elektrostatik Coulomb antara inti atom dan tiap elektron. Dalam kedua kasus ini, gaya tarik berperan memberikan percepatan sentripetal yang dibutuhkan untuk mempertahankan gerak edar.

Untuk sederhananya, kita tinjau atom hidrogen yang terdiri dari satu elektron yang mengedari sebuah inti atom dengan bermuatan positif satuan, seperti pada Gambar 2.9 berikut.



Gambar 2.9. Model Atom Bohr ( $Z=1$  bagi Hidrogen)

Jari-jari orbit lingkarannya adalah  $r$ , dan elektron (bermassa  $m$ ) bergerak dengan laju singgung tetap  $v$ . Gaya tarik Coulomb berperan memberikan percepatan sentripetal :  $\frac{v^2}{r}$ ,

jadi

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad 2.37$$

Dengan mengutak-atik persamaan di atas, dapat diperoleh energi kinetik elektron (dengan anggapan inti atom diam),

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad 2.38$$

Energi potensial sistem elektron–inti adalah energi potensial Coulomb:

$$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad 2.39$$

Dengan demikian, energi total sistem adalah:

$$E = K + V = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

$$E = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad 2.40$$

Sejauh ini kita telah mengabaikan salah satu kesulitan utama yang berhubungan dengan model ini. Fisika klasik meramalkan bahwa sebuah muatan listrik yang mengalami percepatan, seperti elektron yang mengorbit dalam model ini, harus meradiasikan energi elektromagnetik secara kontinu. Ketika energi ini dipancarkan, energi totalnya menurun, dan elektron akan berspiral menuju inti atom sehingga inti atom akhirnya runtuh. Untuk mengatasi kesulitan ini, Bohr mengusulkan gagasan keadaan “mantap stasioner” yaitu keadaan gerak tertentu dalam mana elektron tidak meradiasikan energi elektromagnetik. Dari sini Bohr menyimpulkan bahwa dalam keadaan ini momentum sudut orbital elektron bernilai kelipatan bulat dari  $\hbar$ .

Vektor momentum sudut dalam fisika klasik didefinisikan sebagai  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . Untuk momentum sudut elektron yang beredar mengelilingi inti atom,  $\mathbf{r}$  tegak lurus  $\mathbf{p}$ , sehingga kita dapat menyederhanakannya menjadi :  $l = r p = m v r$ . Jadi postulat Bohr adalah

$$m v r = n \hbar \quad 2.41$$

di mana  $n$  adalah sebuah bilangan bulat ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Dengan menggunakan pernyataan ini dan hubungan (1.31) bagi energi kinetik,

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{n \hbar}{m r} \right)^2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad 2.42$$

Kita peroleh deretan nilai jari-jari  $r$  yang diperkenankan, yaitu :

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2} n^2 = a_o n^2 \quad 2.43$$

Dimana didefinisikan *jari-jari Bohr*  $a_o$ ,

$$a_o = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2} = 0,0529 \text{ nm} \quad 2.44$$

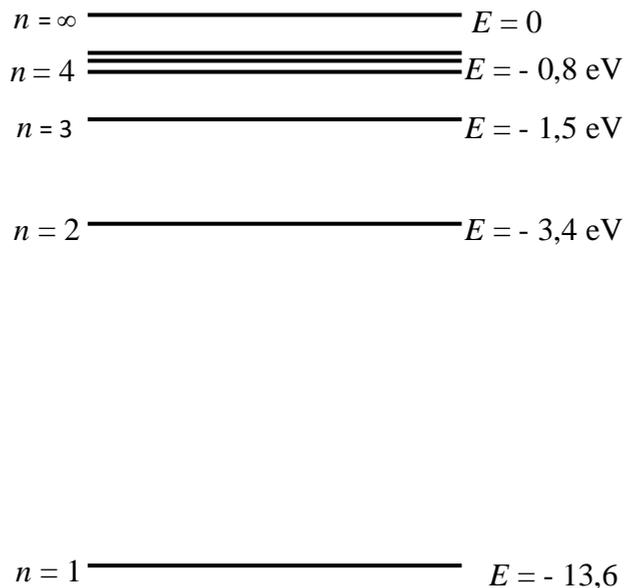
Hasil penting ini ternyata berbeda sekali dari yang kita perkirakan menurut fisika klasik. Sebuah satelit dapat ditempatkan dalam orbit Bumi pada sebarang jari-jari orbit dengan mendorongnya ke ketinggian memadai dan kemudian memberikannya laju singgung yang tepat. Sedangkan bagi orbit elektron, hal ini tidak berlaku karena hanya jari-jari orbit tertentu saja yang diperkenalkan oleh model Bohr. Jari-jari orbit elektron hanya dapat bernilai  $a_o$ ,  $4a_o$ ,  $9a_o$ ,  $16a_o$ , dan seterusnya, tidak pernah bernilai  $3a_o$  atau  $5,3 a_o$ .

Dengan menggabungkan pernyataan  $r$  yang kita peroleh di atas dengan Persamaan (2.40), diperoleh

$$E_n = - \frac{m e^4}{32 \pi^2 \epsilon_o^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad 2.45$$

Jelas  $n$  pada energi  $E$  mencirikan tingkat energi. Dengan menghitung semua nilai tetapannya, diperoleh

$$E_n = - \frac{13,6 \text{ eV}}{n^2} \quad 2.46$$



Gambar 2.10. Tingkatan-tingkatan energi atom

Semua tingkat energi ini ditunjukkan secara skematis pada Gambar 2.10. Jadi energi elektron terkuantisasi artinya, hanya nilai-nilai energi tertentu yang diperkenankan, seperti yang diperlihatkan pada Gambar 2.10.

Pada tingkat terendahnya, dengan  $n = 1$ , elektron memiliki energi  $E_1 = -13,6 \text{ eV}$  dan beredar dengan jari-jari edar sebesar  $0,0529 \text{ nm}$ . Ini adalah keadaan dasar. Semua keadaan yang lebih tinggi ( $n = 2$  dengan  $E_2 = -3,4 \text{ eV}$ ,  $n = 3$  dengan  $E_3 = -1,5 \text{ eV}$ , dan seterusnya) adalah keadaan eksitasi.

Apabila elektron dan inti atom terpisah jauh sekali, yaitu untuk  $n = \infty$ , maka kita peroleh  $E = 0$ . Jadi kita dapat memulai dengan elektron dan inti atom yang berjarak pisah takhingga dan kemudian elektronnya kita dekatkan ke inti hingga ia berada pada garis edar dalam suatu keadaan tertentu  $n$ . Karena keadaan ini memiliki energi yang lebih kecil daripada energi awal  $E = 0$ , maka kita “peroleh” tambahan jumlah energi sebesar  $E_n$ . Sebaliknya, jika memiliki sebuah elektron dalam keadaan  $n$ , maka elektronnya dapat kita bebaskan dari “intinya” dengan memasok energi sebesar  $E_n$ . Energi ini dikenal sebagai energi ikat keadaan  $n$ . Jika energi yang kita pasok pada elektron itu melebihi  $E_n$ , maka kelebihan energi ini akan muncul sebagai energi kinetik elektron yang kini bebas.

Energi eksitasi suatu keadaan eksitasi  $n$  adalah energi di atas keadaan dasar,  $E_n - E_1$ . Jadi, keadaan eksitasi pertama ( $n = 2$ ) memiliki energi eksitasi sebesar:

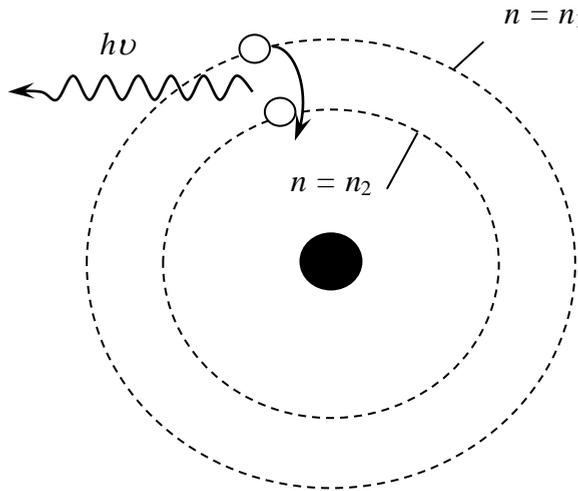
$$\begin{aligned} &= -3,4 \text{ eV} - (-13,6 \text{ eV}) \\ &= 10,2 \text{ eV} \end{aligned}$$

keadaan eksitasi kedua memiliki energi eksitasi  $12,1 \text{ eV}$ , dan seterusnya.

Pembahasan tentang berbagai spektrum pancar dan serap atom hidrogen, dan model Bohr di atas tidaklah lengkap tanpa pemahaman mengenai terjadinya semua spektrum ini. Bohr mempostulatkan bahwa meskipun elektron tidak memancarkan radiasi elektromagnet ketika beredar pada suatu tingkat tertentu, ia dapat berpindah dari satu tingkat ke tingkat yang lain yang lebih rendah

Pada tingkat yang lebih rendah, energi yang dimiliki elektron lebih rendah daripada di tingkat sebelumnya. Beda energi ini muncul sebagai

sebuah kuantum radiasi berenergi  $h\nu$  yang sama besar dengan beda energi antara kedua tingkat tersebut. Artinya, jika elektron melompat dari  $n = n_1$  ke  $n = n_2$ , seperti pada Gambar 2.11 berikut,



Gambar 2.11. Sebuah elektron melompat dari keadaan  $n_1$  ke keadaan  $n_2$ , dan memancarkan radiasi elektromagnet (sebuah foton cahaya)

maka akan terpancar sebuah foton dengan energi :

$$h\nu = E_{n_1} - E_{n_2} \quad 2.47$$

atau

$$\nu = \frac{me^4}{64\pi^3\epsilon_o^2\hbar^3} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad 2.48$$

Jadi panjang gelombang radiasi yang dipancarkan adalah

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{c}{\nu} &= \frac{64\pi^3\epsilon_o^2\hbar^3c}{me^4} \left( \frac{n_1^2n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \right) \\ &= \frac{1}{R_\infty} \left( \frac{n_1^2n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \right) \end{aligned} \quad 2.49$$

Tetapan  $R_\infty$ , yang dikenal sebagai *tetapan Rydberg*, bernilai  $1,0973731 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ .

### Contoh 2.6

Carilah panjang gelombang transisi dari  $n_1 = 3$  ke  $n_2 = 2$  dan dari  $n_1 = 4$  ke  $n_2 = 2$ .

**Penyelesaian :**

$$\lambda = \frac{1}{1,0973731 \times 10^{-7}} \left( \frac{3^2 - 2^2}{3^2 - 2^2} \right) = 656,1 \text{ nm}$$

dan

$$\lambda = \frac{1}{1,0973731 \times 10^{-7}} \left( \frac{4^2 - 2^2}{4^2 - 2^2} \right) = 486,0 \text{ nm}$$

Hasil dari kedua contoh di atas dekat sekali dengan kedua panjang gelombang terpanjang deret Balmer. Jika kita menghitung panjang gelombang untuk berbagai transisi dari  $n_1$  ke  $n_2 = 2$ , diperoleh

$$\lambda = (364,5 \text{ nm}) \left( \frac{n_1^2}{n_1^2 - 4} \right)$$

satuan  $\lambda$  adalah dalam nm dan  $n$  hanya bernilai bulat mulai dari 3. Rumus ini sekarang dikenal sebagai *rumus Balmer* dan deretan garis spektrum yang cocok dengannya disebut *deret Balmer*. Panjang gelombang 364,5 nm, yang berhubungan dengan  $n \rightarrow \infty$ , disebut batas deret. Dengan segera ditemukan bahwa semua kelompok garis spektrum dalam spektrum hidrogen dapat dicocokkan dengan rumus serupa sebagai berikut.

$$\lambda = \lambda_{\text{limit}} \left( \frac{n^2}{n^2 - n_0^2} \right) \quad 2.50$$

dengan  $\lambda_{\text{limit}}$  adalah panjang gelombang deret batas yang sesuai, dengan  $n$  mengambil nilai bulat mulai dari  $n_0 + 1$  (untuk deret Balmer,  $n_0 = 2$ ). Deret lainnya sekarang dikenal sebagai deret Lyman ( $n_0 = 1$ ), Paschen ( $n_0 = 3$ ), Bracket ( $n_0 = 4$ ), dan Pfund ( $n_0 = 5$ ).

Ciri menarik lainnya dari panjang gelombang spektrum hidrogen terangkum dalam **azas Ritz** (*Ritz Combination Principle*). Jika kita ubah panjang gelombang spektrum pancar hidrogen ke dalam frekuensi, kita

jumpai sifat menarik berikut: jumlah sepasang frekuensi tertentu memberikan frekuensi lain yang juga terdapat dalam spektrum hidrogen.

Dengan demikian, setiap model atom hidrogen yang berhasil haruslah dapat menerangkan keteraturan aritmetik yang menarik ini dalam berbagai spektrum pancarnya. Jadi kita melihat bahwa semua transisi yang dicirikan sebagai deret Balmer adalah yang dari semua tingkat lebih tinggi ke tingkat  $n = 2$ . Pencirian serupa dapat pula dilakukan bagi deret transisi lainnya.

Rumus Bohr juga menerangkan azas gabung Ritz. Marilah kita tinjau transisi dari suatu keadaan  $n_3$  ke keadaan  $n_2$ , yang kemudian disusul dengan transisi dari  $n_2$  ke  $n_1$ . Dengan menggunakan Persamaan sebelumnya bagi kasus ini, diperoleh

$$\begin{aligned} \nu_{n_3 \rightarrow n_2} &= c R_\infty \left( \frac{1}{n_3^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \\ \nu_{n_2 \rightarrow n_1} &= c R_\infty \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \end{aligned}$$

dengan demikian

$$\begin{aligned} \nu_{n_3 \rightarrow n_2} + \nu_{n_2 \rightarrow n_1} &= c R_\infty \left( \frac{1}{n_3^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) + \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \\ &= c R_\infty \left( \frac{1}{n_3^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \end{aligned}$$

Tetapi ini tidak lain daripada frekuensi sebuah foton yang dipancarkan dalam transisi langsung dari  $n_3$  ke  $n_1$ , jadi

$$\nu_{n_3 \rightarrow n_2} + \nu_{n_2 \rightarrow n_1} = \nu_{n_3 \rightarrow n_1}$$

Dengan demikian, model Bohr taat azas kepada azas gabung Ritz (karena frekuensi sebuah foton yang dipancarkan berhubungan dengan energinya melalui hubungan  $E = h\nu$ , maka penjumlahan frekuensi di atas sama dengan penjumlahan energi. Dengan demikian, kita dapat menyatakan kembali azas gabung Ritz dalam ungkapan energi. Energi sebuah foton yang dipancarkan dalam transisi dari suatu tingkat ke tingkat lain dengan

melewati satu atau beberapa tingkat antara adalah sama dengan jumlah energi transisi bertahap dari masing-masing tingkat berurutan).

Dengan meninjau ulang penurunan teori Bohr, kita dapatkan bahwa muatan inti atom hanya muncul pada satu tempat yaitu dalam pernyataan bagi gaya elektrostatis antara inti atom dan elektron, Persamaan (1.30). Jika muatan inti atom adalah  $Ze$ , gaya Coulomb yang bekerja pada elektron adalah

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} \quad 2.51$$

Jadi, faktor  $e^2$  semula, kini diganti dengan  $Ze^2$ . Dengan melakukan penyisipan ini pada hasil akhir, diperoleh bahwa jari-jari edar yang diperkenankan adalah:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Zme^2} n^2 = \frac{a_0 n^2}{Z} \quad 2.52$$

dan energinya menjadi

$$E_n = -\frac{m(Ze^2)^2}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = (-13,6 \text{ eV}) \frac{Z^2}{n^2} \quad 2.53$$

Jadi garis edar pada atom dengan nilai  $Z$  yang lebih tinggi, letaknya lebih dekat ke inti atom, dan memiliki energi yang lebih besar (negatif); yang berarti bahwa elektronnya terikat lebih kuat pada inti atomnya.

### Contoh 2.7

Hitunglah kedua panjang gelombang terpanjang deret Balmer ion berilium terionisasi tiga kali ( $Z = 4$ ).

#### *Penyelesaian :*

Karena semua radiasi deret Balmer berakhir pada tingkat  $n = 2$ , kedua panjang gelombang terpanjang tersebut adalah radiasi yang berkaitan dengan transisi  $n = 3 \rightarrow n = 2$ , dan  $n = 4 \rightarrow n = 2$ . Energi dan panjang gelombang radiasi yang bersangkutan adalah

$$E_3 - E_2 = -(13,6 \text{ eV}) (4)^2 \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{4} \right) = 30,2 \text{ eV}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{30,2 \text{ eV}} = 41,0 \text{ nm}$$

$$E_4 - E_2 = -(13,6 \text{ eV}) (4)^2 \left( \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \right) = 40,8 \text{ eV}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{40,8 \text{ eV}} = 30,4 \text{ nm}$$

kedua radiasi ini berada dalam daerah ultraviolet.

# **BAB III**

## **GELOMBANG MATERI DAN ASAS KETIDAKPASTIAN HEISENBERG**

Pada bab ini Anda akan mempelajari postulat de Broglie, eksistensi gelombang materi, percobaan Davisson & Germer, persamaan gelombang (Beiser 91 – 98), penafsiran fungsi gelombang, prinsip ketidakpastian dan asas ketidakpastian Heisenberg. Oleh karena itu, setelah mempelajari bab ini Anda diharapkan memiliki kemampuan untuk:

1. Menjelaskan postulat de Broglie
2. Menjelaskan eksistensi gelombang materi
3. Menjelaskan percobaan Davisson & Germer
4. Menjelaskan persamaan gelombang (Beiser 91 – 98)
5. Menjelaskan penafsiran fungsi gelombang
6. Menjelaskan prinsip ketidakpastian
7. Menjelaskan asas ketidakpastian Heisenberg

### **3.1 Pendahuluan**

Jika gelombang elektromagnetik memiliki sifat partikel seperti yang telah diperlihatkan dalam berbagai gejala, seperti efek fotolistrik dan efek Compton maka mungkinkah sebuah partikel atau materi yang memiliki massa diam juga memiliki sifat gelombang? Pertanyaan ini telah dijawab oleh de Broglie dalam disertasinya tahun 1924 pada “*Fakulty of science, University of Paris*”. Menurut de Broglie materi yang memiliki sifat gelombang, seperti halnya foton yang diasosiasikan dengan gelombang elektromagnetik, karena alam semesta ini seluruhnya terdiri dari materi dan radiasi, maka alam ini simetris sifatnya.

Pada tahun 1926 Elsassner menunjukkan bahwa sifat-sifat gelombang materi sesungguhnya dapat diteliti seperti halnya pada waktu menyelidiki sifat gelombang sinar X. Pekerjaan ini dapat dilakukan dengan menjatuhkan

berkas elektron pada sebuah kristal. Atom-atom kristal berlaku sebagai kisi bagi gelombang elektron, sehingga elektron akan terhambur ke arah tertentu seperti halnya dengan terjadinya difraksi sinar X. Ide ini kemudian dilaksanakan oleh Davisson dan Germer melalui sebuah eksperimennya pada tahun 1927.

Selanjutnya untuk mempelajari gelombang materi, sifat gelombang klasik lebih dahulu perlu ditelaah. Pengertian tentang fungsi gelombang, persamaan gelombang, prinsip superposisi, fungsi gelombang harmonik, interferensi dan difraksi sangat perlu dalam rangka pemahaman gelombang materi serta mekanika kuantum pada umumnya.

Gejala gelombang yang tidak dapat diterangkan dengan gelombang harmonik tunggal adalah sebuah pulsa. Sifat utama pulsa ini adalah dapat ditetapkan tempatnya dalam ruang dan waktu tertentu. Gelombang harmonik tidak memiliki sifat ini. Oleh karena itu, untuk menjelaskan sebuah pulsa, pengertian paket gelombang perlu diperkenalkan. Paket gelombang adalah sekelompok gelombang yang memiliki frekuensi dan panjang gelombang. Misalnya fungsi gelombang elektron  $\psi(x,y)$ , maka pertanyaan yang perlu dijawab adalah bagaimana hubungan antara fungsi gelombang dengan lokasi elektron. Jika di dalam gelombang elektromagnetik, probabilitas untuk mendapatkan sebuah foton pada suatu titik dalam ruang berbanding langsung dengan kuadrat kuat medan listrik pada titik itu, maka di dalam gelombang materi, kebolehjadian untuk mendapatkan sebuah partikel materi pada suatu titik berbanding langsung dengan kuadrat fungsi gelombang materi di titik itu. Jadi fungsi gelombang sebuah partikel analog dengan medan listrik dari sebuah foton.

Masalah berikutnya adalah dapatkah kita menetapkan posisi dan momentum sebuah partikel atau sebuah gelombang pada suatu saat melalui suatu eksperimen yang teliti? Jawabannya adalah kita tidak dapat melakukannya dengan ketelitian yang melebihi prinsip ketidakpastian Heisenberg. Prinsip ini terdiri dari dua bagian yaitu pertama mengenai pengukuran yang simultan antara posisi dan momentum dan kedua mengenai pengukuran energi dan waktu yang digunakan untuk pengukuran tersebut.

Dalam prinsip komplementaris de Broglie mengemukakan bahwa gelombang dan partikel komplementer satu dengan yang lain. Hal ini berarti bahwa jika di dalam suatu pengukuran radiasi atau materi menampakkan dirinya sebagai gelombang maka di dalam pengukuran itu sifat partikelnya tidak nampak, demikian pula sebaliknya. Jadi radiasi dan materi tidak hanya sebagai gelombang atau sebagai partikel. Radiasi atau materi memiliki sifat dualisme, yaitu pada suatu ketika tampak sebagai partikel tetapi pada suatu saat yang lain sebagai gelombang. Yang jelas bahwa kedua sifat tersebut tidak akan pernah teramati secara serempak.

### **3.2 Postulat de Broglie**

Keseluruhan entitas fisis di alam semesta ini dapat dikelompokkan dalam dua golongan besar, yaitu partikel dan gelombang. Kedua golongan entitas itu dapat dikenal secara mudah berdasarkan kehadirannya: partikel bersifat terlokalisir sedangkan gelombang bersifat menyebar. Perbedaan kedua golongan entitas itu juga dapat dikenali dari gejala interferensi. Sebagaimana diketahui, gejala interferensi hanya dapat ditunjukkan oleh gelombang. Jadi, jika suatu entitas dapat menunjukkan gejala interferensi maka dapat dipastikan bahwa entitas tersebut tergolong gelombang. Sebaliknya, jika satu entitas tidak dapat menunjukkan gejala interferensi maka entitas tersebut tergolong partikel.

Sebelum teori efek fotolistrik berhasil dirumuskan, orang berkeyakinan bahwa sekali suatu entitas dikenali sebagai gelombang, selamanya ia tetap sebagai gelombang. Sebaliknya, sekali suatu entitas dikenali sebagai partikel selamanya ia tetap sebagai partikel. Keyakinan itu tidak lagi dapat dipertahankan sejak berhasilnya perumusan teoritis efek fotolistrik. Sebagaimana telah kita pelajari, bahwa cahaya yang semula diyakini sebagai gelombang ternyata pada saat tertentu juga dapat berperilaku sebagai partikel. Kenyataan itu mengisyaratkan perlunya meninjau kembali penggolongan secara diketomis”partikel lawan gelombang”. Sebab, tampaknya alam tidak secara tegas membagi penghuninya ke dalam dua golongan besar itu.

Jika benar bahwa alam tidak terbagi atas partikel dan gelombang yang menjadi pertanyaan berikutnya adalah apakah partikel itu sebenarnya hanyalah salah satu sifat yang sedang ditonjolkan oleh suatu entitas pada saat tertentu saja, artinya pada saat yang lain sebenarnya ia juga menunjukkan sifat gelombang (tetapi kita dapat mengenalinya)? Untuk foton, pertanyaan ini telah kita temukan jawabannya; yaitu ya. Bagaimana dengan partikel lainnya?

Pada tahun 1924, Louis de Broglie, seorang filsof Perancis, mengajukan hipotesis bahwa sifat ganda yang dimiliki cahaya (gelombang elektromagnet pada umumnya) juga dimiliki oleh partikel material. Artinya partikel material juga dapat menunjukkan sifat gelombang sebagaimana ditunjukkan oleh foton. Menurut de Broglie, terhadap setiap partikel yang berenergi  $E$  dan bergerak dengan momentum linear  $p$  terdapat gelombang yang diasosiasikan dengannya. Gelombang yang diasosiasikan dengan partikel yang bergerak itu disebut gelombang materi, atau gelombang de Broglie. Dalam konteks yang demikian dapat dikatakan bahwa gelombang elektromagnet adalah gelombang de Broglie yang diasosiasikan dengan foton.

Frekuensi dan panjang gelombang bagi de Broglie dapat diturunkan dengan argumen sebagai berikut. Kita telah mengetahui bahwa momentum linear dan energi foton berkaitan dengan panjang gelombang dan frekuensi gelombang elektromagnet menurut kaitan Planck-Einstein:  $p=h$  dan  $E=h\nu$ . Jika hubungan itu dipostulatkan berlaku untuk sebarang partikel (tidak hanya foton), maka gelombang de Broglie memiliki panjang gelombang sebesar  $\lambda = h/p$  dan frekuensi sebesar  $\nu = E/h$ , dengan  $p$  dan  $E$  berurutan menyatakan momentum linear dan energi partikel yang diasosiasikan dengan gelombang de Broglie. Dengan demikian, hipotesis de Broglie dapat diungkapkan dengan pernyataan lain. Pada partikel yang bermomentum linear diasosiasikan suatu gelombang yang panjang gelombangnya sebesar  $\lambda = h/p$ .

Untuk mendeskripsikan suatu gelombang, seringkali digunakan besaran frekuensi sudut  $\omega = 2\pi\nu$  dan bilangan gelombang  $k$ . Untuk

gelombang de Broglie, kaitan antara frekuensi sudut dengan energi partikel dan bilangan gelombang dengan momentum linear partikel mengikuti rumusan Planck-Einstein:

$$E = h\nu = h \frac{\omega}{2\pi} = \hbar\omega \quad 3.1$$

Dan 
$$p = \frac{h}{\lambda} = h \frac{k}{2\pi} = \hbar k \quad 3.2$$

Dengan  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ . Untuk kasus 3 dimensi, persamaan (3.2) menjadi  $p = \hbar k$  dengan  $k$ =vector gelombang.

### 3.3 Eksistensi Gelombang Materi

Untuk menyelidiki sifat gelombang materi, diperlukan perangkat eksperimen yang dapat mendeteksi gejala interferensi dan atau difraksi untuk gelombang materi tersebut . Ini disebabkan karena gejala itu hanya dapat ditunjukkan oleh gelombang. Penalaran seperti ini pulalah yang menuntun Young (1801) dalam menyelidiki apakah cahaya sebagai gelombang atau bukan.

Efek difraksi hanya dapat diamati jika peralatan yang digunakan memiliki ukuran karakteristik (aperatur) seorde atau kurang dari panjang gelombang. Sebagai contoh bagi aperture adalah luas lensa, lebar celah, dan tetapan kisi sebagaimana telah dikenal dalam optika.

Jika  $a$  dan  $\lambda$  berurutan menyatakan ukuran aperatur dan panjang gelombang, maka efek difraksi hanya dapat diamati jika  $\lambda$  Jikasangat kecil ( $\ll 1$ ) maka efek difraksi tidak dapat diamati. Dalam optika,jika  $\lambda$  maka kita berada pada wilayah optika fisik. Sebaliknya jika  $\lambda$  berada pada wilayah optika geometri. Sebagaimana kita ketahui dalam optika geometri cahaya cukup digambarkan sebagai sinar yang arahnya sama dengan arah rambat cahaya. Dalam hal ini kita tidak perlu mengetahui secara persis apa demikian, dalam optiak geometri sebenarnya kita telah mengindentikkan cahaya sebagai partikel: arah sinar identik dengan trayektori partikel. Jika sinar menjumpai bidang pantul maka akan dipantulkan pada arah tertentu persis seperti trayektori bola tenis yang dipantulkan lantai.

Mengingat kecilnya nilai tetapan Planck (*pada orde  $10^{-34}$* ) maka panjang gelombang de Broglie pada umumnya juga sangat pendek. Oleh karena itu diperlukan aperture yang sangat kecil untuk menyelidiki munculnya sifat gelombang materi tersebut. Apertur terkecil yang dapat dibuat dewasa ini memiliki ukuran sekitar  $1\text{\AA}$  (yaitu jarak rata-rata antar bidang atom pada Kristal).

Marilah kita hitung berapa orde panjang gelombang de Broglie untuk beberapa partikel tertentu. Sebelumnya perlu kita ingat bahwa untuk menghasilkan panjang gelombang yang cukup besar maka momentum linear partikel yang bersangkutan haruslah kecil. Jadi, baik massa maupun kecepatannya harus cukup kecil.

### Contoh 3.1

Hitung gelombang de Broglie bagi partikel debu (diameter  $1\ \mu\text{m}$ ) yang bergerak dengan kecepatan  $1\ \text{mm/s}$ . (Nilai ini masih kurang dari kecepatan gerak ulat). Andaikan massa debu  $\approx 10^{-15}\ \text{kg}$ .

#### Analisis

$$\lambda = \frac{6,6 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{10^{-15} \times 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}} = 6,6 \times 10^{-6}\ \text{\AA}$$

Panjang gelombang sependek ini tentu saja masih sangat kecil dibandingkan dengan ukuran aperture yang tersedia saat ini. Dengan demikian tidaklah mungkin untuk mendeteksi gelombang yang diasosiasikan dengan gerakan partikel debu tersebut.

Perlu dicatat bahwa, meskipun partikel hanya sebesar debu dan bergerak dengan sangat lambat, ternyata gelombang de Broglie-nya masih terlalu kecil untuk dapat dideteksi. Untuk partikel makroskopis lainnya, tentu saja panjang gelombangnya akan lebih kecil lagi. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa aspek gelombang pada gerak partikel makroskopis sangat sulit dideteksi, bahkan cenderung tidak mungkin dideteksi. Dengan kata lain, partikel makroskopis tidak akan menunjukkan sifat gelombang.

### Contoh 3.2

Berapa gelombang de Broglie bagi suatu neutron termal, misalnya pada temperatur 300k?

**Analisis:**

Neutron termal adalah neutron yang energi kinetiknya setara dengan energi termalnya. Pada temperature T, energi termal neutron sebesar  $\frac{3}{2} K_B T$  dengan  $K_B$  = tetapan Boltzman =  $1,38 \times 10^{-23}$  J/K. Karena energi kinetik neutron termal sama dengan energi termalnya, maka momentum linearnya dapat dihitung dari hubungan  $p^2/2m=3/2K_B T$ .

Jadi panjang gelombang de Broglie neutron termal tersebut

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3 m K_b T}}$$

$$\lambda = \frac{6,6 \times 10^{-34}}{\sqrt{3 \times 1,67 \times 10^{-27} \times 1,38 \times 10^{-23} \times 300}} \approx 1,4 \text{ \AA}.$$

Ternyata panjang gelombangnya seorde dengan ukuran aperture terkecil teoritik, yaitu jarak antar bidang atom dalam Kristal. Dengan demikian, neutron termal tersebut memiliki kemungkinan untuk menunjukkan sifat gelombangnya.

**Contoh 3.3**

Hitunglah gelombang de Broglie untuk elektron yang memiliki energi kinetik 100 eV. Massa elektron  $9,1 \times 10^{-31}$ kg.

**Analisis**

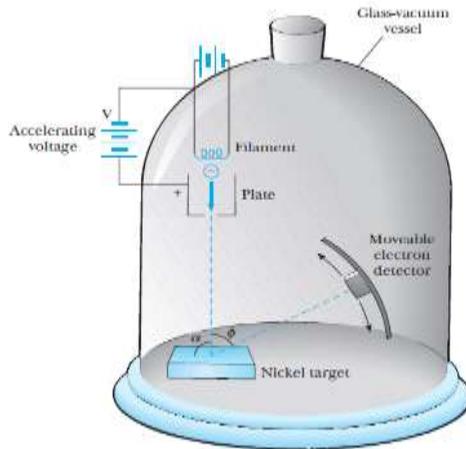
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m E_K}}$$

$$\lambda = \frac{6,6 \times 10^{-34} J.s}{\sqrt{2 \times 9,1 \times 10^{-31} kg \times 100 \text{ ev} \times 1,6 \times 10^{-19} J/eV}} \approx 1,2 \text{ \AA}$$

Ternyata panjang gelombangnya lebih dari ukuran apertur terkecil teoretik, yaitu jarak antar bidang atom kristal. Dengan demikian, elektron yang berenergi 100 eV tersebut sangat mungkin untuk dapat menunjukkan sifatnya sebagai gelombang.

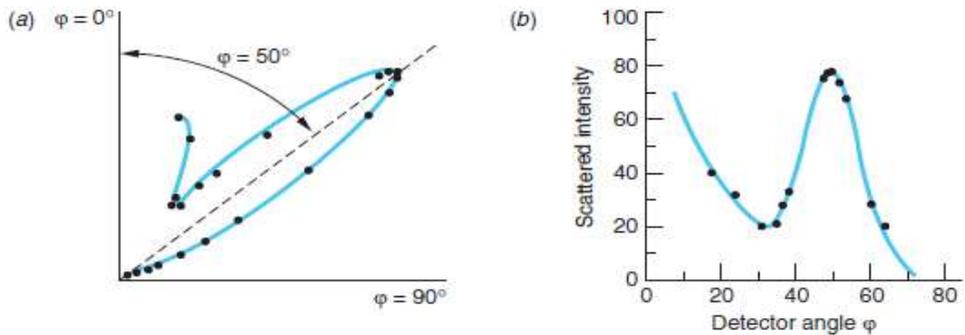
### 3.4 Percobaan Davisson & Germer

Pengukuran panjang gelombang elektron pertama kali dilakukan oleh Davisson dan Germer pada tahun 1927. Gambar 3.1 memperlihatkan skema eksperimen yang dilakukan mereka.



Gambar 3.1. Percobaan Davisson dan Gremer. Elektron terhambur pada sudut  $\theta$  dari sebuah Kristal nikel.

Elektron dari sebuah filamen panas dipercepat melalui sebuah beda potensial  $V$  dan dipancarkan oleh sebuah senapan elektron  $S$  dengan energi kinetik  $eV$ . Berkas elektron ini jatuh tegak lurus pada permukaan kristal tunggal di  $C$ . Elektron ini oleh kristal dihamburkan dan detektor  $D$  diatur untuk membaca intensitas hamburan pada sudut  $\theta$  untuk beberapa harga potensial  $V$ . Untuk suatu harga potensial tertentu  $V$  dapat juga diamati intensitas hamburan untuk berbagai macam sudut hamburan. Hasil pengamatan Davisson dan Gremer menunjukkan bahwa pada sudut hamburan  $\theta = 50^\circ$  dengan  $V = 54$  volt terdapat intensitas maksimum (Gambar 3.2).



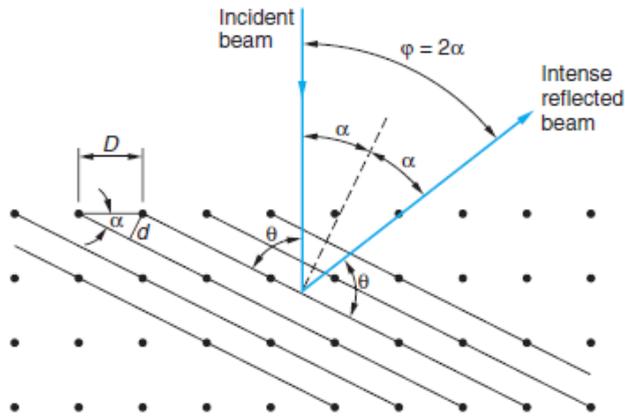
Gambar 3.2. Kiri: Intensitas hamburan sebagai fungsi dari energi kinetik electron (eV). Terjadi maksimum pada  $\theta = 50^\circ$  dengan energi kinetik 54 eV.

Kanan: Intensitas hamburan sebagai fungsi dari sudut hamburan  $\theta$  pada energi kinetik 54 eV.

Adanya intensitas maksimum pada hamburan elektron ini memperlihatkan kebenaran postulat de Broglie karena kejadian tersebut hanya dapat diterangkan dengan menganggap bahwa terjadi suatu interferensi gelombang-gelombang yang dihamburkan oleh atom-atom dalam kristal. Interferensi semacam ini telah dicobakan oleh Bragg dengan menggunakan sinar X. Interferensi yang terjadi bukan antara gelombang yang diasosiasikan dengan sebuah elektron dan gelombang yang diasosiasikan dengan elektron lainnya, melainkan interferensi antara bagian-bagian gelombang yang berbeda yang diasosiasikan dengan sebuah elektron yang telah dihamburkan dari berbagai tempat dalam kristal. Hal ini dapat diamati dengan jalan menggunakan berkas elektron yang intensitasnya rendah sehingga elektron-elektron yang masuk ke dalam peralatan eksperimen ini masuknya tidak bersamaan melainkan satu demi satu.

Menurut Bragg, untuk terjadinya interferensi harus dipenuhi syarat (Gambar 3.3):

$$n \lambda = 2 d \sin \varphi \quad 3.3$$



Gambar 3.3. Hamburan Bragg

Menurut persamaan 3.3. Panjang gelombang dapat dihitung dengan mengambil  $n = 1$  (hamburan dengan intensitas yang paling besar).

$$\lambda = 2 d \sin \phi = 2 \times 0,91 \text{ \AA} \times \sin 65^\circ = 1,65 \text{ \AA}$$

Panjang gelombang de Broglie untuk  $V = 54$  volt dihitung dengan persamaan  $\lambda = h / p$  yaitu sebagai berikut

$$\lambda = h/p = 6,6 \times 10^{-34} \text{ Js} / (2 \times 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 54 \text{ v})^{1/2}$$

$$\lambda = 1,66 \times 10^{-10} \text{ m} = 1,66 \text{ \AA}$$

Adanya kesesuaian antara hasil yang diperoleh dari eksperimen dan hasil yang diperoleh menurut perhitungan de Broglie menunjukkan kebenaran hipotesis de Broglie. Namun demikian tampak bahwa hasil yang diperoleh melalui eksperimen sedikit lebih rendah dari perhitungan teoritis. Ini disebabkan karena didalam eksperimen, pembiasan yang terjadi pada gelombang elektron didalam Kristal diabaikan.

### Contoh 3.4

Dalam percobaan Helium, disebabkan atom dengan kecepatan  $1,635 \times 10^5$  cm/s diarahkan kepermukaan sebuah Kristal helium fluoride sehingga terjadi difraksi. Berdasarkan perhitungan eksperimen diperoleh  $\lambda = 0,6 \times 10^{-8}$  cm. Seberapa jauh Kristal ini sesuai dengan hipotesis de Broglie?

Panjang gelombang sesuai perhitungan teoritis:

$$\lambda = (6,6 \times 10^{-34} \text{ Js}) / (6,65 \times 10^{-27} \text{ kg} \times 1,635 \times 10^3 \text{ m/s})$$

$$\lambda = 0,607 \times 10^{-8} \text{ cm.}$$

Jadi hasil teoretis 0,33% lebih besar dari hasil eksperimen.

### 3.5 Persamaan Gelombang (Beiser 91 – 98)

Dengan kecepatan berapakah gelombang de Broglie berjalan? Karena kita mengaitkan gelombang de Broglie dengan benda bergerak sangatlah nalar untuk mengharapakan bahwa gelombang ini menjalar dengan kecepatan  $v$  seperti itu.

Bila kita memberikan lambang kecepatan gelombang de Broglie itu  $w$ , kita boleh menetapkan rumus untuk menentukan harga  $w$

$$w = v \lambda \tag{3.4}$$

Panjang gelombang  $\lambda$  merupakan panjang gelombang de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{mv} \tag{3.5}$$

Untuk mendapatkan frekuensinya, kita menyamakan pernyataan Kuantum,  $E = hv$  dengan rumus relativistik untuk energi total  $E = mc^2$  untuk mendapatkan

$$hv = mc^2 \tag{3.6}$$

$$v = \frac{mc^2}{h} \tag{3.7}$$

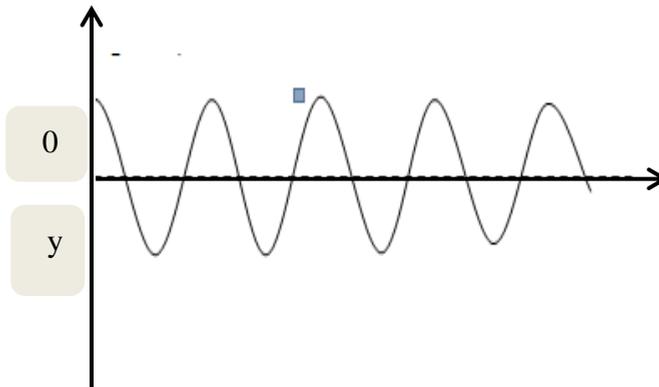
Sehingga kecepatan gelombang de Broglie

$$w = v\lambda = \frac{mc^2}{h} \cdot \frac{h}{mv} = \frac{c^2}{v} \tag{3.8}$$

Karena kecepatan partikel  $v$  harus lebih kecil dari kecepatan cahaya  $c$ , maka kecepatan gelombang de Broglie  $w$  selalu lebih besar dari  $c$ ! Supaya kita bisa mengerti hasil yang tidak terduga ini, kita harus membedakan antara kecepatan fase dan kecepatan kelompok (group) (kecepatan fase kadang-kadang disebut kecepatan gelombang).

Mari kita mulai dengan meninjau kembali bagaimana gelombang secara matematis. Untuk jelasnya kita tinjau tali yang direntangkan

sepanjang sumbu x yang getarannya terjadi dalam arah y seperti pada gambar 3.4 dan sifat harmonik (selaras) sederhana.



Gambar 3.4 Sifat harmonik (selaras) sederhana

### 3.6 Penafsiran Fungsi Gelombang

Sejauh ini kita baru membicarakan bentuk gelombang yang layak digunakan untuk mendeskripsikan gerak suatu partikel material. Kita belum membicarakan apa yang bergelombang pada gelombang materi tersebut. Untuk menjawab pertanyaan ini, marilah kita kembali pada pendeskripsian gelombang dan partikel pada radiasi (cahaya).

Menurut deskripsi gelombang, radiasi dapat digambarkan sebagai entitas kolektif medan listrik dan medan magnet yang merambat bersama dalam ruang. Pada medium dielektrik isotropik, medan listriknya merambat dalam bentuk gelombang bidang  $E(r,t) = E_0 \exp \{i(k \cdot r - \omega t)\}$ , yang diperoleh dari penyelesaian persamaan Maxwell. Rata-rata (terhadap waktu) rapat energi medan persatuan volume pada suatu tempat, dilambangkan  $\langle w_e \rangle$  adalah

$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \epsilon E E^* = \frac{1}{4} \epsilon |E_0|^2 \quad (3.9)$$

Pada deskripsi partikel (foton) rata rata rapat energi didefinisikan sebagai hasil kali energi foton ( $\hbar \omega$ ) dengan cacah rata rata foton tiap satuan volume ( $N/V$ ). Jika rata rata rapat energi foton ini dilambangkan  $\langle w_f \rangle$  maka,

$$(W_f) = (N/V) \hbar\omega \quad (3.10)$$

Kita harus menggunakan kata rata rata karena proses pancaran foton dari sumbernya merupakan proses statistik (acak) sehingga tidak ada cara untuk memastikan berapa cacah foton yang berada dalam suatu volume pada suatu saat. Dengan demikian,  $N/V$  Pada persamaan (3.10) tersebut dapat diartikan sebagai rapat peluang mendapatkan foton disuatu titik pada saat tertentu jika kedua rumusan rapat energi diatas disamakan, diperoleh hubungan

$$(w) = \frac{1}{4} e E.E^* = \frac{N}{V} \hbar\omega \quad (3.11)$$

Jadi  $|E(r,t)|^2 = E.E$  sebanding dengan  $N/V$ . Dengan kata lain, jika  $E(r,t)$  merupakan gelombang yang diasosiasikan dengan foton maka  $|E(r,t)|^2$ , yaitu kuadrat modulus fungsi gelombang bagi foton, menyatakan peluang mendapatkan foton dalam suatu unsur volume disekitar titik  $r$  pada saat. Dengan demikian, melalui telaah rapat energi radiasi ini kita telah berhasil memadukan dualisme gelombang partikel untuk radiasi.

Kesimpulan tersebut selanjutnya dipostulatkan dan berlaku untuk gelombang materi. Jika gelombang materi diungkapkan sebagai fungsi gelombang  $\Psi(r,t)$  yang dapat berupa fungsi kompleks variabel real  $r$  dan  $t$ , maka .

*$\Psi(r,t)$  adalah suatu fungsi yang kuadrat modulusnya,  $|\Psi(r,t)|^2$ , sebanding dengan rapat peluang ( per satuan volume) untuk mendapatkan partikel di titik  $r$  pada saat  $t$*

Penafsiran probabilistik terhadap fungsi gelombang seperti itu pertama kali diajukan oleh Max Born pada tahun 1926. Oleh sebab itu, ungkapan tersebut dikenal sebagai penafsiran Born tentang fungsi gelombang.

Selanjutnya,  $|\Psi(r,t)|^2$  didefinisikan sebagai rapat peluang kehadiran partikel pada saat dititik  $t$ , dan biasanya dilambangkan  $\xi(r,t)$ . Artinya.

$$\xi(r,t)d^3r \equiv |\Psi(r,t)|^2 d^3r = \Psi^*(r,t) \Psi(r,t) d^3r, \quad 3.12$$

Menyatakan besarnya peluang pada saat  $t$  partikel berada di dalam unsur volume  $d^3r = dx dy dz$  disekitar titik  $r$ .

Jika partikel yang dibicarakan benar-benar ada, maka pelacakan partikel keseluruhan ruang pasti dapat menemukannya. Ini berarti bahwa peluang total mendapatkan partikel haruslah 1. Jadi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(r, t) d^3r = 1 \quad 3.13$$

Persamaan (3.13) membawa konsekuensi bahwa integral  $|\Psi(r, t)|^2$  ke seluruh ruang harus berhingga. Dengan kata lain,  $\Psi(r, t)$  harus merupakan fungsi yang kuadrat modulusnya dapat diintegrasikan dalam arti :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(r, t)|^2 d^3r = N < \infty \text{ (Berhingga)} \quad 3.14$$

Fungsi-fungsi seperti itu dikatakan bersifat *square integrable* (SI). Jika  $N=1$ , dikatakan fungsi gelombang tersebut ternormalkan (ternormalisasi).

Cara sederhana untuk mengenali apakah suatu fungsi termasuk SI atau tidak adalah dengan mengamati sebaran nilainya. Jika fungsi tersebut menyebar keseluruhan ruang artinya nilainya tidak nol dari  $-\infty$  sampai  $+\infty$  maka fungsi tersebut tidak termasuk SI. Sebaliknya, jika tidak terlalu menyebar, artinya bernilai nol di  $\pm\infty$ , maka fungsi termasuk SI.

Uraian tersebut menambah satu lagi sifat yang harus dipenuhi oleh gelombang materi yang bersifat SI.

Untuk memahami penafsiran probabilistik tersebut, untuk sementara kita batasi pembicaraan kita dalam kasus 1 dimensi. Jika  $\Psi(x, t)$  menyatakan gelombang materi yang dibicarakan, dan  $\Psi(x, t)$  ternormalkan, maka

- Rapat ruang posisi partikel:

$$\xi(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 \equiv \Psi^*(x, t)\Psi(x, t). \quad (3.15)$$

- Peluang pada saat  $t$  partikel berada dalam interval  $x$  dan  $x + dx$ :

$$\xi(x, t) dx = |\Psi(x, t)|^2 dx \equiv \Psi^*(x, t)\Psi(x, t) dx. \quad (3.16)$$

- Peluang pada saat  $t$  partikel berada antara  $x_1$  dan  $x_2$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} \xi(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \Psi^*(x, t)\Psi(x, t) dx \quad (3.17)$$

- Peluang pada saat  $t$  partikel berada disebareng titik dari  $-\infty$  s/d  $+\infty$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t)\Psi(x, t) dx = 1 \quad (3.18)$$

Rumusan-rumusan tadi didasarkan atas asumsi bahwa  $\Psi(x, t)$  ternormalkan. Jika  $\Psi(x, t)$  belum ternormalkan, maka rumusan tersebut harus dibagi dengan  $\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x, t) dx$ .

### Contoh 3.5

Gelombang (pada  $t = 0$ ) yang diasosiasikan dengan partikel terikat dalam potensial sumur kotak yang lebarnya  $a$  adalah

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}; & 0 \leq x \leq a \\ 0 & ; x < 0 \text{ atau } x \geq a \end{cases}$$

- Dapatkan fungsi rapat peluang posisi partikel pada  $t = 0$ !
- Di mana partikel paling mungkin berada?
- Berapa peluang partikel berada di  $x \leq 0$ ?
- Berapa peluang partikel berada di  $x \geq a$ ?
- Berapa peluang partikel berada dalam interval  $[0, a]$ ?
- Berapa peluang partikel berada di  $x \leq a$ ?

#### Analisis

$$(a) \xi(x) = \Psi^*(x)\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}; & 0 \leq x \leq a \\ 0 & ; x < 0 \text{ atau } x \geq a \end{cases}$$

- Berdasarkan jawaban (a),  $\xi(x)$  paling besar di  $x = 1/4 a$  dan  $x = 3/4 a$ .  
Jadi partikel paling mungkin di  $x = 1/4 a$  dan di  $x = 3/4 a$ .
- Peluang partikel berada di  $x \leq 0$  adalah nol, sebab menurut hasil (a), untuk  $x \leq a$  maka  $\xi(x \leq 0) = 0$ .
- Peluang partikel berada di  $x \geq a$  adalah nol, sebab menurut hasil (a), untuk  $x \geq a$  maka  $\xi(x \geq a) = 0$ .
- Fungsi gelombang tersebut telah ternormalkan, sebab;

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x) dx &= \int_{-\infty}^0 \xi(x) dx + \int_0^a \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi x}{a} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^a \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi x}{a} dx + \int_a^{\infty} 0 dx \\ &= 0 + \frac{2}{a} \int_0^a \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{a}\right) dx + 0 = \frac{2}{a} \times \frac{a}{2} = 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian, untuk menghitung peluang ini kita gunakan persamaan (3. 17) tanpa perlu membagi dengan integral  $\rho(x)$  ke seluruh ruang. Berdasarkan persamaan (3. 17), peluang partikel berada dalam interval  $[0,a]$  adalah

$$\begin{aligned}\xi(0 \leq x \leq a) &= \int_0^a \rho(x) dx \int_0^a \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi x}{a} dx \\ &= \frac{2}{a} \int_0^a \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{a}\right) dx = \frac{2}{a} \frac{a}{2} = 1\end{aligned}$$

(f) Peluang partikel berada di  $x \leq a$  adalah

$$\begin{aligned}\xi(x \leq a) &= \int_0^a \xi(x) dx + \int_{-\infty}^0 \rho(x) dx \\ &= \int_0^a \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi x}{a} dx + \int_{-\infty}^0 0 dx \\ &= \frac{2}{a} \int_0^a \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{a}\right) dx = \frac{2}{a} \times \frac{a}{2} = 1\end{aligned}$$

Kembali ke sifat SI bagi fungsi gelombang. Menurut teori integral Fourier, sebarang fungsi SI, misalnya  $f(x)$ , selalu dapat dinyatakan dalam bentuk integral

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk, \quad (3.19)$$

dengan  $g(x)$  adalah inversi transformasi Fourier dari  $f(x)$ :

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (3.20)$$

Pada kedua persamaan di atas,  $k$  adalah bilangan gelombang dan  $x$  adalah kordinat (posisi). Variabel  $k$  dan  $x$  merupakan pasangan variabel yang saling berkonjugasi. Contoh lain pasangan besaran yang saling berkonjugasi adalah waktu ( $t$ ) dan frekuensi sudut ( $\omega$ ). Fungsi  $f(x)$  dan  $g(k)$  sering disebut pasangan trasporansi Fourier. Secara fisik keduanya mendeskripsikan gejala yang sama tetapi dari sudut pandang yang berbeda:  $f(x)$  mendeskripsikan dalam ruang koordinat (ruang  $x$ ), sedangkan  $g(k)$  mendeskripsikan dalam ruang  $k$ .

Berdasarkan teori diatas, maka fungsi gelombang pada  $t$  tertentu, misalnya  $t=0$ , yaitu  $\psi(x,0)$ , juga dapat disajikan dalam ruangan momentum.

Jika penyajian dalam ruangan momentum dilambangkan  $\tilde{\psi}(p,0)$  maka kedua fungsi tersebut harus memenuhi hubungan:

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(p,0) e^{i px/\hbar} dp, \quad (3.21)$$

dan

$$\tilde{\psi}(p,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,0) e^{i px/\hbar} dx. \quad (3.22)$$

Kedua persamaan tadi diperoleh dengan analogi persamaan (3.19) dan (3.20) serta menggunakan rumusan de Broglie  $p = \hbar k$ .

Karena kedua fungsi  $\psi(x,0)$  dan  $\tilde{\psi}(p,0)$  tersebut merupakan pasangan Fourier maka keduanya secara fisik sama.  $\Psi(x,0)$  adalah wujud fungsi gelombang jika disajikan dalam ruang koordinat, sedangkan  $\tilde{\psi}(p,0)$  adalah wujud fungsi gelombang jika disajikan dalam ruang momentum. Selaras dengan penafsiran Born untuk  $\psi(x,t)$ , maka penafsiran Born untuk  $\tilde{\psi}(p,0)$  dirumuskan sebagai berikut.

- Rapat peluang pada saat  $t$  partikel memiliki momentum  $p$ :

$$\xi(p,t) = |\tilde{\psi}(p,t)|^2 \equiv \tilde{\psi}^*(p,t) \tilde{\psi}(p,t). \quad (3.23)$$

- Peluang pada saat  $t$  partikel memiliki momentum antara  $p$  sampai  $p + dp$ :

$$\xi(p,t) dp = |\tilde{\psi}(p,t)|^2 dp \equiv \tilde{\psi}^*(p,t) \tilde{\psi}(p,t) dp \quad (3.24)$$

- Peluang pada saat  $t$  partikel memiliki momentum antara  $p_1$  dan  $p_2$ :

$$\int_{p_2}^{p_1} \xi(p,t) dp = \int_{p_2}^{p_1} \tilde{\psi}^*(p,t) \tilde{\psi}(p,t) dp. \quad (3.25)$$

- Peluang pada saat  $t$  partikel memiliki sebarang momentum dari  $-\infty$  sampai  $+\infty$  sebesar 1, jadi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(p,t) dp = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^*(p,t) \tilde{\psi}(p,t) dp = 1 \quad (3.26)$$

Rumusan (3.23) sampai (3.26) didasarkan atas asumsi bahwa fungsi gelombang  $\tilde{\psi}(p,t)$  ternormalkan. Jika  $\tilde{\psi}(p,t)$  belum ternormalkan, maka persamaan tersebut harus dibagi dengan  $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^*(p,t) \tilde{\psi}(p,t) dp$ .

Perhatikan bahwa ruas kanan Persamaan (3.26) dan (3.18) adalah sama, sehingga dari kedua persamaan itu kita peroleh hubungan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^*(p,t) \tilde{\psi}(p,t) dp = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) \psi(x,t) dx.$$

Persamaan ini dikenal sebagai **teorema Parseval**.

### 3.7 Prinsip Ketidakpastian

Tinjau sebuah paket gelombang  $\Psi(x, t)$  yang bersesuaian dengan sebuah elektron  $\Psi^2(x, t)$  menyatakan kebolehjadian untuk mendapatkan elektron tersebut di  $X$ . Oleh karena itu, posisi yang paling mungkin bagi elektron itu adalah harga  $x$  dimana  $\Psi^2(x, t)$  maksimum.

Untuk suatu waktu tertentu  $t$ , paket gelombang dapat dinyatakan dengan integral Fourier

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dx \quad 3.27$$

Dimana fungsi  $g(k)$  menyatakan amplitudo gelombang yang memberikan sumbangan terhadap  $\Psi(x)$  sedangkan  $k$  menyatakan bilangan gelombang. Fungsi ini disebut Transform Fourier dari  $\Psi(x)$

Bagian riil dari persamaan 3.27 adalah

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(k) \cos kx dx$$

Bagian riil ini merupakan superposisi linear dari gelombang-gelombang yang panjang gelombangnya  $\lambda = 2\pi / k$ , oleh karena untuk sesuatu harga  $k$ ,  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

Misalkan  $g(k) = e^{-\lambda(k-k_0)} \quad 3.28$

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(k-k_0)} e^{ikx} dx$$

Jika  $k - k_0 = k'$ , maka

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda k'^2} e^{ik'x} e^{ik_0x} dk'$$

$$\psi(x) = e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda k'^2} e^{ik'x} dk'$$

$$\psi(x) = e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(k'-(ix/2))^2} e^{-(\lambda^2/4a)} dk'$$

Misalkan  $q = k' - ix/2a$  ;  $dq = dk'$

$$\psi(x) = e^{ikox} e^{-\lambda^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda q^2} dq$$

Dalam matematika :  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi/\lambda}$  (Integral probabilitas Gauss).

Dengan demikian maka

$$\psi(x) = \sqrt{\pi/\lambda} e^{ikox} e^{-\lambda^2/4a} \quad 3.29$$

$e^{ikox}$  disebut sebagai faktor fase. Karena  $(e^{ikox})^2 = 1$

$$|\psi(x)|^2 = \frac{\pi}{\lambda} e^{-\lambda^2/2a} \quad 3.30$$

Apabila  $\lambda$  sangat kecil, maka fungsi ini akan memperlihatkan adanya sebuah puncak yang sangat tajam pada  $x = 0$ , dengan lebar  $\Delta X = 2\sqrt{2} \lambda$ , sebab apabila  $x = \pm \sqrt{2}\lambda$ , fungsinya turun sampai  $1/e$  dari harga maksimum. Bila fungsi  $g(k)$  dikuadratkan maka diperoleh sebuah fungsi dengan puncak pada  $k = k_0$  dengan lebar  $\Delta k = 2/\sqrt{2}\lambda$ . Perkalian antara kedua lebar ini menghasilkan :

$$\Delta X \cdot \Delta K = \frac{2}{\sqrt{2}\lambda} \times 2\sqrt{2}\lambda = 4 \quad 3.31$$

Bilangan tetapan 4 pada persamaan 3.31 sebenarnya tidak penting, yang jelas bahwa  $\Delta X \cdot \Delta K$  tidak bergantung pada  $\lambda$ . Persamaan ini dapat dinyatakan sebagai

$$\Delta X \cdot \Delta K \geq 1 \quad 3.32$$

dimana  $\Delta x \cdot \Delta k$  adalah lebar dari dua distribusi. Bilangan 1 tetap berarti sebuah angka yang sebenarnya bergantung pada fungsi yang ditinjau akan tetapi tidak boleh lebih kecil dari 1. Tidak mungkin mencapai  $\Delta x \cdot \Delta k$  yang kecil, hal ini merupakan sifat paket. Jika kita kalikan (3,32) dengan  $\hbar$ , maka:

$$\Delta x \cdot \Delta k \hbar \geq \hbar$$

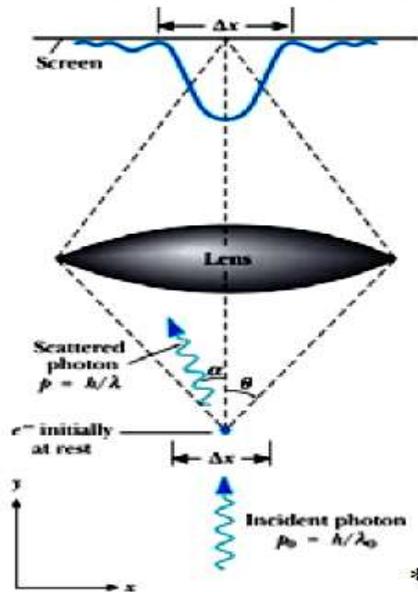
Karena  $\Delta k \hbar = \Delta p$  maka:  $\Delta x \Delta p \geq \hbar \quad 3.33$

Hubungan (3.33) tidak lain adalah prinsip Ketidakpastian Heisenberg. Hubungan ini menjelaskan bahwa apabila kita mencoba menetapkan posisi sebuah karet gelombang dalam ruang  $x$  dengan kecepatan yang tinggi, kita tidak mungkin menetapkan momentumnya dengan tepat, begitu pula

sebaliknya. Berikut ini akan dikemukakan beberapa percobaan sehubungan dengan prinsip ketidakpastian Heisenberg.

(1) Pengukuran posisi sebuah elektron

Misalkan kita hendak mengukur posisi sebuah elektron dengan menggunakan sebuah mikroskop seperti terlihat pada gambar 3.4



Gambar 3.5 Pengukuran posisi sebuah elektron

Sebuah elektron dalam sebuah berkas bergerak ke arah x positif dengan momentum  $P_x$  untuk melihat posisi elektron, digunakan berkas cahaya ke arah x negatif. Foton menumbuk elektron sehingga foton tersebut terhambur masuk kedalam lensa mikroskop. Daya pisah mikroskop diberikan oleh:

$$\Delta x = \lambda / \sin \theta \tag{3.34}$$

dimana  $\lambda$  menyatakan panjang gelombang foton. Menurut teori kuantum, foton yang bertumbukan dengan elektron akan dihamburkan. Momentumnya berubah, oleh karena sebagian diberikan kepada elektron sedemikian sehingga hukum kekekalan momentum tidak dilanggar. Akan tetapi sudut masuk foton tidak diketahui sehingga ketidakpastian momentum elektron adalah:

$$\Delta P_x = 2 h f/c \sin \theta \quad 3.35$$

Jika (3.34) dikalikan dengan (3.35) maka:

$$\Delta P_x \Delta x \approx 2 h f/c \sin \theta (\lambda/\sin \theta) \approx 4 \hbar \quad 3.36$$

Persamaan (3.36) memenuhi relasi Heisenberg (3.33). Jika kita mencoba mengukur momentum foton dan tentunya juga elektron dengan teliti, yakni dengan jalan mengamati arah masuk foton, frekuensi yang di gunakan sebaiknya kecil. Tetapi apabila cahaya yang digunakan frekuensinya kecil atau panjang gelombangnya panjang, kita akan mengalami kesulitan dalam menentukan lokasi elektron. Pada persamaan (3.34) terlihat bahwa makin panjang  $\lambda$ ,  $\Delta x$  makin besar. Supaya  $\Delta x$  kecil,  $\lambda$  harus pendek, dengan kata lain foton yang digunakan energinya harus cukup besar. akan tetapi apabila energi foton besar, impulsnya juga besar, sehingga efek Chompton banyak berpengaruh.

(2) Hubungan ketidakpastian energi-waktu

Tinjau persamaan (3.33) :  $\Delta p \Delta x \geq \hbar$

Persamaan ini dapat ditulis :

$$(\rho \Delta p/m) (\Delta x m/\rho) \geq \hbar$$

$$(\rho \Delta p/m) = v \Delta m \quad v = \Delta E$$

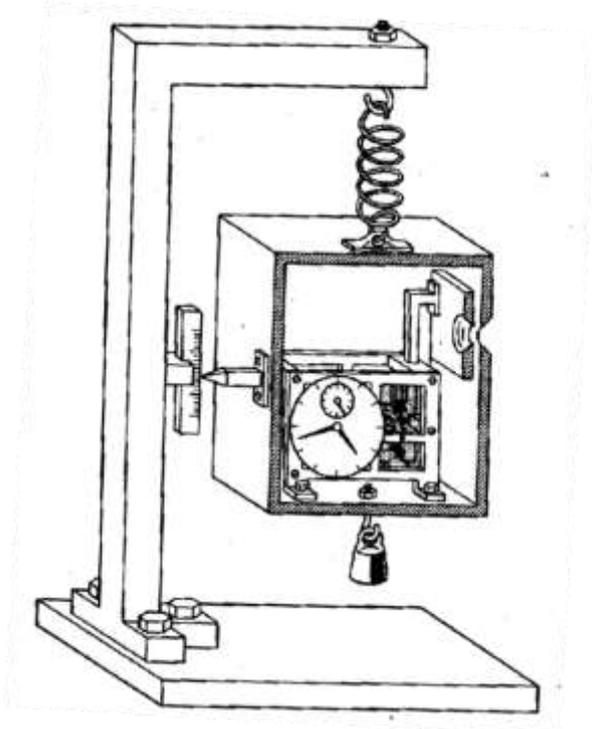
$$(\Delta x m/\rho) = \Delta x/v = \Delta t$$

Dari ketiga hubungan di atas diperoleh:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar \quad 3.37$$

Sekalipun Einstein banyak berjasa dalam menanamkan dasar-dasar mekanika kuantum, namun ia tidak mudah menerima hubungan ketidakpastian energi-waktu seperti tercantum pada persamaan (3.37). Dalam sebuah pertemuan antara para ahli fisika pada tahun 1936 ia mengemukakan sebuah eksperimen yang tampaknya bertentangan dengan persamaan (3.37). Sebuah kotak yang berisi sebuah alat yang dapat mngeluarkan radiasi. Mekanisme alat tersebut dapat diatur sedemikian sehingga sebuah lubang dapat terbuka dalam selang waktu tertentu yang

dapat diukur dengan teliti. Energi foton yang meninggalkan kotak melalui lubang tersebut juga dapat diukur dengan sangat teliti dengan menimbang kotak dan sesudah terjadi pengeluaran radiasi (lihat Gambar 3.6)



Gambar 3.6. Percobaan Einstein yang seolah-olah bertentangan dengan Relasi Heisenberg

Menurut Einstein, tidak ada alasan untuk mengatakan bahwa energi dan waktu tidak dapat diukur secara sangat teliti dalam tepat waktu yang bersamaan. Bohr menganggap bahwa percobaan tersebut tetap mengikuti hukum-hukum fisika yang ada. Menurut Bohr:

- (i) Dalam melakukan penimbangan, seseorang harus membaca penunjuk skala yang semestinya memiliki ketelitian  $\Delta x$ . Hal ini akan menimbulkan ketidakpastian dalam momentum  $\Delta p \geq \hbar \Delta x$ .
- (ii) Dalam mengukur perubahan massa  $\Delta m$ , penimbangan memerlukan waktu  $T$ . Waktu yang digunakan cukup lama sehingga impuls yang

berkenaan dengan perubahan massa tersebut, yakni  $gT \Delta m$  di mana  $g$  menyatakan percepatan gravitasi, lebih besar dari  $\Delta p$ , jadi :

$$g T \Delta m \gg \hbar/\Delta x \quad 3.38$$

(iii) Berdasarkan prinsip ekuivalensi perubahan dalam posisi vertikal  $\Delta x$  didalam medan gravitasi menyebabkan terjadinya perubahan dalam waktu, yang diberikan oleh persamaan :

$$\Delta T/T = g \Delta x/c^2 \quad 3.39$$

Jika persamaan (3.37) dan (3.38) dipadukan, maka diperoleh :

$$\Delta T/T \gg (g/c^2) (\hbar/gT \Delta m) \quad 3.40$$

$$\Delta m c^2 \Delta T/T \gg \hbar$$

$$\text{Oleh karena } \Delta m c^2 = \Delta E, \text{ maka : } \Delta m c^2 \Delta T = \Delta E \Delta T \gg \hbar \quad 3.41$$

Ternyata bahwa Relasi Heisenberg – waktu yang tidak dilanggar.

**Catatan :**

Dalam beberapa buku, prinsip ketidakpastian Heisenberg dinyatakan dengan :

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar$$

Ini berdasarkan kepada asumsi bahwa  $\Delta x$  dan  $\Delta p$  merupakan standar deviasi dari pengukuran  $x$  dan  $p$ . Dari teori gelombang diketahui bahwa jika  $\sigma x$  adalah standar deviasi pengukuran dan jarak dan  $\sigma k$  adalah standar deviasi pengukuran bilangan gelombang, maka perkalian  $\sigma x \sigma k$  mempunyai harga minimum  $\frac{1}{2}$  apabila fungsinya berdistribusi Gauss, jika:

$$\sigma x \approx \Delta x \text{ dan } \sigma k \approx \Delta k \text{ maka :}$$

$$\Delta x \cdot \Delta k = \frac{1}{2}$$

Dari sini diperoleh  $\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar$

**Contoh 3.5**

Kecepatan sebuah peluru yang massanya 60 gram dan kecepatan sebuah elektron yang massanya  $9,1 \times 10^{-31}$  kg diukur dan memberikan hasil yang sama, yakni 350 m/s dengan suatu ketidakpastian 0,01 %. Berapa besar ketelitian yang dapat diperoleh dalam penentuan posisi masing-masing apabila pengukuran posisi tersebut dilakukan secara simultan dengan pengukuran kecepatan yang dimaksud.

$$\text{Untuk Elektron : } p = m v = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 350 \text{ m/s}$$

$$= 3,185 \times 10^{-28} \text{ kg m/s}$$

$$\Delta p = m \Delta v = 0,0001 \times 3,185 \times 10^{-20} \text{ kg m/s}$$

$$\Delta p = 3,185 \times 10^{-32} \text{ kg m/s}$$

$$\text{Dengan demikian : } \Delta x \geq \frac{h}{2\pi\Delta p} = \frac{6,6 \times 10^{-34} \text{ Js}}{2\pi \times 3,185 \times 10^{-32} \text{ kg m/s}}$$

$$= 0,33 \times 10^{-2} \text{ m} = 0,33 \text{ cm}$$

$$\text{Untuk peluru : } p = mv = 0,06 \text{ kg} \times 350 \text{ m/s} = 21 \text{ kg m/s}$$

$$\Delta p = 0,0001 \times 21 \text{ kg m/s} = 2,1 \times 10^{-3} \text{ kg m/s}$$

$$\Delta x \geq \frac{h}{2\pi\Delta p} = \frac{6,6 \times 10^{-34} \text{ Js}}{2\pi \times 2,1 \times 10^{-3} \text{ kg m/s}}$$

$$= 0,5 \times 10^{-31} \text{ m}$$

Terlihat disini bahwa bagi benda-benda makroskopik, relasi Heisenberg tidak mempunyai arti praktis sama sekali. Tetapi bagi benda-benda mikroskopik seperti elektron  $\Delta x$  sebesar 0,33 cm mempunyai orde sekitar  $10^7$  kali diameter sebuah atom sehingga relasi ini memang memegang peranan yang penting.

### 3.8 Asas Ketidakpastian Heisenberg

Salah satu asas yang dihasilkan fisika kuantum adalah asas ketidakpastian Heisenberg. Asas ini menyatakan bahwa pengukuran serempak terhadap posisi dan momentum linear tidak mungkin dapat dilakukan dengan ketelitian mutlak. Ketelitian terbaik yang mungkin dicapai adalah  $\Delta x \Delta p = \hbar/2$  dengan  $\Delta x$  dan  $\Delta p$  berurutan menyatakan ketidakpastian posisi dan ketidakpastian momentum linear. Asas ketidakpastian ini biasanya dinyatakan dengan ungkapan  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ .

Pada bagian ini kita akan menelaah munculnya asas tersebut berdasarkan prinsip penafsiran Bohr tentang fungsi gelombang sebagaimana telah kita bicarakan sebelumnya. Melalui cara ini kita juga dapat menguji kecocokan (kesesuaian) antara penafsiran Born dan Asas Ketidakpastian Heisenberg.

Berdasarkan penafsiran Born, dari fungsi gelombang  $(x, t)$  dapat didefinisikan fungsi rapat peluang kehadiran (posisi) partikel  $\Psi(x, t)$  dan dari fungsi gelombang  $(p, t)$  dapat didefinisikan fungsi rapat peluang

momentum linear partikel ( $p, t$ ). Dengan demikian, dari kedua fungsi rapat peluang tersebut dapat dihitung nilai harap (*expectation value*) posisi dan momentum linear beserta ketidakpastiannya. Prosedur perhitungannya dilakukan sebagai berikut.

Dari fungsi rapat peluang posisi, ( $x$ ), dapat dihitung nilai harap posisi, dilambangkan  $\langle x \rangle$ , dan variansi posisi, dilambangkan  $\sigma_x^2$ , sebagai berikut.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \xi(x) dx \quad 3.42$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x (x - \langle x \rangle)^2 \xi(x) dx \quad 3.43$$

Persamaan 3.43 dapat diubah menjadi

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad 3.44$$

dengan

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \xi(x) dx \quad 3.45$$

Ketidakpastian posisi partikel, yang tidak lain adalah standar deviasi diperoleh dengan mengambil akar varian. Dengan demikian dari fungsi gelombang ( $x$ ) dapat di peroleh nilai ketidakpastian posisi sebesar

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \quad 3.46$$

Dengan  $\langle x \rangle$  dan  $\langle x^2 \rangle$  masing-masing dihitung dengan menggunakan persamaan (3.42) dan (3.45).

Dengan argumen yang sama, ketidakpastian momentum linear sebesar

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} \quad 3.47$$

dengan

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p \tilde{\xi}(p) dp \quad 3.48$$

dan

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p^2 \tilde{\xi}(p) dp \quad 3.49$$

Berikut diberikan beberapa contoh perhitungan  $\Delta x \Delta p$  berdasarkan cara tersebut.

### Contoh 3.6

Dapatkan nilai  $\Delta x \Delta p$  bagi partikel yang memiliki momentum linear konstan sebesar  $p_0$ ?

### *Analisis*

Partikel tersebut merupakan contoh ideal bagi partikel bebas. Secara klasik, dimana pun dan kapan pun berada, momentum linearnya selalu sama. Fungsi gelombang yang cocok untuk menyajikan keadaan partikel tersebut adalah fungsi gelombang bidang

$$\Psi(x) = C e^{i p_0 x / \hbar},$$

Dengan  $C$  suatu tetapan kompleks. (kita tidak menyatakan ketergantungan fungsi gelombang terhadap waktu karena kita hanya berkepentingan dengan posisi dan momentum partikel).

Fungsi rapat peluang posisi partikel adalah

$$\xi(x) = \Psi^*(x) \cdot \Psi(x) = C^* C = \text{konstan}$$

Dengan fungsi rapat peluang tersebut diperoleh

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x C^* C dx}{\int_{-\infty}^{\infty} x C^* C dx} = 0$$
$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 C^* C dx}{\int_{-\infty}^{\infty} x C^* C dx} = \infty,$$

Sehingga diperoleh ketidakpastian posisi sebesar

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \infty$$

Fungsi gelombang dalam ruang momentum diperoleh sebagai berikut:

$$\tilde{\Psi}(p) = \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i p_0 x / \hbar} e^{-i p x / \hbar} dx = \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p_0 - p)x / \hbar} dx$$
$$= C \delta(p - p_0).$$

Karena fungsi gelombang  $\tilde{\Psi}(p)$  berupa “fungsi” delta Dirac maka  $\tilde{\rho}(p)$  juga merupakan “fungsi” delta Dirac. Akibatnya, berdasarkan sifat delta Dirac, diperoleh  $\langle p \rangle = p_0$  dan  $\langle p^2 \rangle = p_0^2$ . Dengan demikian diperoleh nilai  $\Delta p = 0$ .

Hasil perhitungan tadi menunjukkan bahwa jika momentum partikel dapat ditemukan secara pasti (ditunjukkan dengan  $\Delta p = 0$ ) maka ketidakpastian posisi partikel menjadi tak berhingga besar.

### **Contoh 3.7**

Dapatkan nilai  $\Delta x \Delta p$  bagi osilator harmonis yang memiliki energi sebesar  $\frac{1}{2} h\omega$ . Fungsi gelombang untuk menyajikan keadaan tersebut adalah  $\Psi(x) = C e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2}$  dengan  $\beta = \sqrt{m\omega/h}$  (ketergantungan ungsi gelombang terhadap waktu tidak diperhatikan)

**Analisis**

Fungsi rapat peluang posisi partikel adalah

$$\xi(x) = C^* C e^{-\beta^2 x^2}$$

Dengan fungsi rapat peluang tersebut diperoleh

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} C^* C x e^{-\beta^2 x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} C^* C e^{-\beta^2 x^2} dx} = 0, \quad \text{dan} \\ \langle x^2 \rangle &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} C^* C x e^{-\beta^2 x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} C^* C e^{-\beta^2 x^2} dx} = \frac{\Gamma(3/2)}{2\beta^3} \cdot \frac{\Gamma(1/2)}{2\beta} = \frac{1}{2\beta^2} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh ketakpastian posisi sebesar

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Penyelesaian integrasi tersebut memanfaatkan table integral:

fungsi gelombang 

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma((m+1)/2)}{2a^{(m+1)/2}}.$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\rho) &= \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} C e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} e^{-ipx/h} dx \\ &= \frac{2C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} \cos(ppx/h) dx = C' e^{-p^2/(2\beta^2 x^2)} \end{aligned}$$

Dengan  $C'$  suatu tetapan baru

Integral di atas diselesaikan dengan menggunakan rumus integral

$$\int_0^x e^{-ax^2} \cos bxdx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/(4a)}.$$

Dengan demikian fungsi rapat peluang momentum linear partikel adalah

$$\xi(\rho) = |C'|^2 e^{-p^2/(\beta^2 \hbar^2)}.$$

Dengan fungsi rapat peluang tersebut di peroleh

$$\langle p \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |C'|^2 p e^{-p^2/\beta^2 \hbar^2} dp}{\int_{-\infty}^{\infty} |C'|^2 e^{-p^2/\beta^2 \hbar^2} dp} = 0,$$

dan

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |C'|^2 p^2 e^{-\frac{p^2}{\beta^2 \hbar^2}} dp}{\int_{-\infty}^{\infty} |C'|^2 e^{-\frac{p^2}{\beta^2 \hbar^2}} dp} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2 \left(\frac{1}{\beta \hbar}\right)^3} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\beta \hbar\right)} = \frac{\beta^2 \hbar^2}{2}$$

Sehingga diperoleh ketakpastian momentum linear sebesar

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \hbar \beta \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Berdasarkan nilai  $\Delta x$  dan  $\Delta p$  tersebut diperoleh nilai  $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ .

Perhitungan tersebut menunjukkan bahwa pengukuran serempak momentum linear dan posisi partikel yang berperilaku sebagai osilator harmonis yang berenergi  $\frac{1}{2} \hbar \omega$  akan menghasilkan kepastian sebesar  $\frac{\hbar}{2}$ . Merujuk pada asas ketakpastian Heisenberg, maka nilai ketakpastian tersebut adalah yang terkecil.

Marilah kita cermati bentuk fungsi gelombang yang menghasilkan ketakpastian minimum ini, yaitu  $\Psi(x) = C e^{-\frac{1}{2} \beta x^2}$ . Fungsi gelombang ini merupakan salah satu contoh, atau anggota, dari kelompok fungsi yang disebut fungsi Gaussian. Bentuk umum fungsi Gaussian adalah  $f(x) = C e^{-a x^2}$  dengan mengambil sebarang bilangan positif.

Jika prosedur pada contoh 3.6 tadi diterapkan pada sebarang fungsi Gaussian maka akan didapatkan nilai  $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ , berapa pun nilai tetapan a. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa jika fungsi gelombangnya berupa fungsi Gaussian maka ketakpastian  $\Delta x \Delta p$  akan mencapai minimum, yaitu sebesar  $\frac{\hbar}{2}$ .

### Contoh 3.8

Dapatkan nilai  $\Delta x \Delta p$  untuk osilator harmonis yang berenergi  $3 \frac{h}{2}$  fungsi gelombang partikel ini adalah  $\Psi(x) = A \beta x e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2}$  dengan  $\beta \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$  dan A suatu tetapan. (Seperti pada contoh sebelumnya, ketergantungan fungsi gelombang terhadap waktu tidak diperhatikan).

#### Analisis

Fungsi rapat peluang posisi partikel adalah

$$\xi(x) = |A|^2 \beta^2 x^2 e^{-\beta^2 x^2}$$

Dengan fungsi rapat peluang tersebut diperoleh

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 \beta^2 x^3 e^{-\beta^2 x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 \beta^2 x^2 e^{-\beta^2 x^2} dx} = 0$$

Dan

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 \beta^2 x^4 e^{-\beta^2 x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 \beta^2 x^2 e^{-\beta^2 x^2} dx} = \frac{r\left(\frac{5}{2}\right)}{2\beta^5} : \frac{r\left(\frac{3}{2}\right)}{2\beta^3} = \frac{3}{2\beta^2}$$

Sehingga diperoleh ketakpastian posisi sebesar

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Fungsi gelombang dalam ruang momentum linear diperoleh sebagai berikut:

$$\tilde{\psi}(P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} A \beta x e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx = B \int_0^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} \sin\left(\frac{px}{\hbar}\right) dx$$

dengan B suatu tetapan baru yang nilainya  $\frac{-i 2 A \beta}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ . Dengan menggunakan rumus integral

$$\int_0^x e^{-ax} \cos bx dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

Integrasi tadi dapat kita selesaikan sebagai berikut .

$$\tilde{\psi}(P) = B \hbar \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} \cos(px/\hbar) dx$$

$$\tilde{\psi}(P) = B\hbar \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-p^2/2\beta^2\hbar^2} \right) = Cp e^{-p^2/2\beta^2\hbar^2}$$

Dengan C sebagai suatu tetapan baru

Dengan demikian fungsi rapat peluang momentum partikel adalah

$$\tilde{\psi}(P) = C^2 p^2 e^{-p^2/2\beta^2\hbar^2}$$

Dengan fungsi rapat peluang tersebut diperoleh

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |C'|^2 p^4 e^{-\frac{p^2}{\beta^2\hbar^2}} dp}{\int_{-\infty}^{\infty} |C'|^2 p^2 e^{-\frac{p^2}{\beta^2\hbar^2}} dp} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{2 \left(\frac{1}{\beta\hbar}\right)^5} : \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{2}{\beta\hbar}\right)^3} = \frac{3\beta^2\hbar^2}{2}$$

Sehingga diperoleh ketidakpastian momentum linear sebesar

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \hbar\beta \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Berdasarkan nilai  $\Delta x$  dan  $\Delta p$  tersebut diperoleh nilai  $\Delta x \Delta p = 3\frac{\hbar}{2}$

## BAB IV

### METODOLOGI FISIKA KUANTUM

Pada bab ini Anda akan mempelajari persamaan gelombang, persamaan Schrödinger, sifat-sifat fungsi gelombang dan persamaan gerak Heisenberg. Oleh karena itu, setelah mempelajari bab ini Anda diharapkan memiliki kemampuan untuk:

1. Menjelaskan persamaan gelombang
2. Menjelaskan persamaan Schrödinger
3. Menjelaskan sifat-sifat suatu fungsi gelombang
4. Menjelaskan persamaan gerak Heisenberg

#### 4.1 Persamaan Gelombang

Tinjaulah getaran sebuah kawat halus yang diregang sepanjang sumbu-x dengan kedua ujungnya dibuat tetap. Misalkan simpangan pada sembarang posisi dan waktu adalah  $\psi(x,t)$ .

Dalam teori gelombang simpangan itu memenuhi persamaan gelombang seperti:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}$$

$v$  adalah kecepatan fasa

Misalkan  $\psi(x, t) = \psi(x)\phi(t)$

$$\frac{v^2}{\psi(x)} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = \frac{1}{\phi(t)} \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} = -\omega^2$$

$$\frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} + \omega^2 \phi(t) = 0 \rightarrow \phi(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \psi(x) = 0 \rightarrow \psi(x) = C \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) + D \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

$\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu$  adalah frekuensi dan  $\delta$  adalah konstanta; karena  $v$  adalah kecepatan merambat maka panjang gelombang  $\lambda = v/\nu$ .

Untuk konstanta C dan D diperlukan syarat batas, misalnya untuk fungsi di atas, pada  $x = 0$ , dan  $x = L$  dengan L adalah panjang kawat. Andaikan, untuk  $x = 0$ ,  $\psi(0) = 0$  maka  $D = 0$ ,

$$\psi(x) = C \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

Selanjutnya jika di  $x = L$ ,  $\psi(L) = C \sin(2\pi L/\lambda) = 0$  maka  $\sin(2\pi L/\lambda) = 0$ , sehingga:

$$\frac{2L}{\lambda} = n; \quad n = 1, 2, \dots$$

n disebut nomor modus normal.

maka:

$$\psi_n(x) = C \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Akhirnya:

$$\psi_n(x, t) = B \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin(\omega t + \delta)$$

## 4.2 Persamaan Schrödinger

Schrodinger merumuskan teori gelombangnya (1925) dalam upaya untuk mendapat suatu teori komprehensif (menyatu) tentang mekanika tingkat atom. Sampai waktu itu teori mengenai fisika tingkat atom masih tersebar dalam berbagai hipotesa.

Persamaan gelombang Schrodinger merupakan seperangkat postulat tentang gerak partikel pada tingkat atom. Persamaan tersebut dikemukakan sebagai postulat, sehingga kebenarannya sebagai persamaan dasar mekanika tingkat atom masih harus ditunjukkan melalui pengamatan. Postulat Schrodinger sangat abstrak, dan karena itu memerlukan waktu untuk dapat diterapkan dalam kerangka berpikir seseorang yang mulai mempelajarinya.

Tinjaulah sebuah partikel yang memiliki massa m, bergerak dengan momentum p di dalam suatu medan konservatif. Menurut mekanika klasik, energi total partikel adalah jumlah energi kinetik dan potensial:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \rightarrow p = \sqrt{2m(E - V)}$$

Sebagai gelombang, kecepatan fase gelombang partikel itu

$$v = \frac{E}{p} = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}}$$

Misalkan  $\psi(x, t)$  adalah fungsi gelombang partikel, maka persamaan gelombang:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{2m(E - V)}{E^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}$$

Suatu fungsi gelombang partikel dengan energi tetap berkaitan dengan frekuensi tetap. Untuk itu  $\psi(x, t)$  memenuhi

$$\psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$$

Mengingat  $E = \hbar\omega$  dan  $\hbar = h/2\pi$

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{2m(E - V)}{\hbar^2} \psi(x, t)$$

Akhirnya diperoleh persamaan:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V)\psi(x) = 0$$

Persamaan di atas merupakan persamaan Schrodinger 1 dimensi

Untuk tiga dimensi persamaan Schrödinger ini adalah:

$$\nabla^2 \psi(x, y, z) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V)\psi(x, y, z) = 0$$

Bagian waktu  $\exp(-i\omega t)$  telah dihilangkan sementara karena tak mempunyai pengaruh, dan selanjutnya persamaan itu disebut persamaan Schrödinger yang tak bergantung waktu bagi sebuah partikel dalam satu dimensi.  $V$  adalah energi potensial yang bentuknya harus diketahui sebelumnya, sedangkan fungsi gelombang  $\psi(x)$  dan energi  $E$  dari partikel bersangkutan merupakan solusi yang harus dicari dari persamaan tersebut.

Persamaan Schrödinger di atas dapat dituliskan sebagai berikut

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x) \quad (*)$$

Dengan

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$$

disebut hamiltonian partikel, yakni operator energi total dari partikel.

Dalam bahasa matematik,  $E$  adalah harga eigen dari operator  $H$  dengan fungsi eigen  $\psi(x)$ . Persamaan (\*) disebut persamaan harga eigen.

Turunan pertama terhadap waktu untuk fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  adalah:

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -i\omega \psi(x,t)$$

Karena  $E = \hbar\omega$  maka diperoleh

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = E\psi(x,t) \rightarrow \hat{H}\psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$$

Ini disebut persamaan Schrödinger yang bergantung waktu bagi sebuah partikel.

Andaikan bahwa suatu partikel bergerak memenuhi  $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ , maka momentum dan energi partikel itu dapat ditentukan:

$$\begin{aligned} P \psi(x,t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (Ae^{i(kx-\omega t)}) \\ &= \hbar k Ae^{i(kx-\omega t)} \\ &= \hbar k \Psi(x,t) \\ E \psi(x,t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i(kx-\omega t)}) \\ &= \hbar \omega \Psi(x,t) \end{aligned}$$

#### 4.2.1 Persamaan Schrodinger Bebas-Waktu

Pada umumnya potensial dalam fisika tidak bergantung dari waktu.

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

Andaikan  $\psi(x,t) = \psi(x)\phi(t)$  substitusi ke persamaan di atas.

$$\begin{aligned} -\phi(t) \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2 \psi(x,t)}{dx^2} + \phi(t) V(x) \Psi(x) &= i\hbar \Psi(x) \frac{d\phi(x,t)}{dt} \\ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{\psi(\vec{r})} \frac{d^2 \Psi(\vec{r})}{dx^2} + V(\vec{r})\Psi(\vec{r}) &= i\hbar \frac{1}{\phi(t)} \frac{d\phi(t)}{dt} \end{aligned}$$

Pada suku pertama hanya merupakan fungsi terhadap  $r$ , dan pada suku kanan hanya merupakan fungsi terhadap  $t$ . Persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai:

- $i\hbar \frac{1}{\phi(t)} \frac{d\phi(t)}{dt} = G$
- $-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2 \Psi(\vec{r})}{dx^2} + V(\vec{r})\Psi(\vec{r}) = G\psi(\vec{r})$

Solusi persamaan (a) di atas adalah: \*

$$\phi(t) = e\left(\frac{-igt}{\hbar}\right)$$

Selanjutnya persamaan (b) dapat dinyatakan sebagai:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = G\psi(\vec{r})$$

Dalam hal ini:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Sehingga persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai:

$$H_{op}\psi(\vec{r}) = G\psi(\vec{r}) \quad **$$

Dalam hal ini berlaku bahwa:

$$H_{op} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]$$

Sehingga persamaan \* dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$\phi(t) = e\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right)$$

Dengan demikian persamaan \*\* dapat dinyatakan sebagai:

$$H_{op}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

Dalam hal ini:

E = nilai eigen dengan operator  $H_{op}$

$\psi(\vec{r})$  = fungsi eigen dari operator  $H_{op}$

#### 4.2.2 Persamaan Schrodinger Bergantung Waktu

Dalam mekanika kuantum fungsi gelombang  $\psi$  bersesuaian dengan variabel gelombang  $y$  dalam gerak gelombang umumnya. Namun  $\psi$  tidak seperti  $y$ , bukanlah suatu kuantitas yang dapat diukur, sehingga dapat berupa kuantitas kompleks. Karena itulah kita akan menganggap  $\psi$  dalam arah  $x$  dinyatakan oleh:

$$\psi = Ae^{-i\omega(t-x/v)}$$

Jika ganti  $\omega$  dengan  $2\pi\nu$  dan  $V$  dengan  $v\lambda$ , kita peroleh:

$$\psi = Ae^{-2\pi i t(vt-x/\lambda)}$$

Yang bentuknya menguntungkan, karena kita telah mengetahui hubungan  $v$  dengan  $\lambda$  dinyatakan dalam energi total  $E$  dan momentum  $P$  dari partikel

yang diberikan oleh  $\psi$ , selanjutnya karena  $E = hv = 2\pi\hbar$  dan  $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$ , maka kita peroleh:

$$\psi = Ae^{-i/\hbar(Et-px)}$$

Persamaan di atas merupakan pemberian matematis gelombang ekuivalen dari partikel bebas yang berenergi total  $E$  dan momentum  $p$  yang bergerak dalam arah  $+x$ .

Pernyataan fungsi gelombang  $\psi$  yang diberikan oleh persamaan diatas hanya benar untuk partikel yang bergerak bebas, sedangkan kita lebih tertarik pada situasi dengan partikel dipengaruhi berbagai pembatasan. Apa yang harus kita lakukan sekarang ialah mendapatkan persamaan diferensial pokok  $\psi$ , kemudian kita memecahkan  $\psi$  untuk situasi yang khusus. Persamaan ini disebut persamaan Schrodinger dapat diperoleh dengan berbagai cara, tetapi semuanya mengandung kelemahan yang sama. Persamaan itu tidak dapat diturunkan secara ketat dari prinsip fisis yang ada karena persamaan itu menyatakan sesuatu yang baru.

Selanjutnya dengan mendiferensialkan persamaan di atas dua kali terhadap  $x$  menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi$$

Dan sekali terhadap  $t$ , diperoleh:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi$$

Untuk kelajuan yang kecil daripada kelajuan cahaya, energi total partikel ialah jumlah dari energi kinetik  $p^2/2m$  dan energi potensial  $V$ , dengan pada umumnya merupakan fungsi terhadap kedudukan  $x$  dan waktu:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

Kalikan persamaan di atas dengan fungsi gelombang  $\psi$  menghasilkan: \*

$$E\psi = \frac{p^2\psi}{2m} + V\psi$$

Sehingga: \*\*

$$E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Dan \*\*\*

$$p\psi = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Substitusi persamaan \*\* dan \*\*\* ke persamaan \* didapat:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi$$

Persamaan di atas merupakan persamaan Schrodinger bergantung waktu dalam satu dimensi. Dalam tiga dimensi dapat dinyatakan sebagai:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + V\psi$$

Dengan energi potensial V merupakan fungsi terhadap x, y, z, dan t. Setiap pembatasan yang dapat membatasi gerak partikel dapat mempengaruhi fungsi energi potensial V. Sekali bentuk V diketahui, maka persamaan Schrodinger dapat dipecahkan untuk mendapatkan fungsi gelombang partikel  $\psi$ , sehingga kerapatan peluang  $\psi^2$  ditentukan untuk x, y, z, dan t tertentu. Persamaan di atas hanya bias dipakai untuk persoalan non-relativistik dan rumusan yang lebih memakan pikiran diperlukan jika kelajuan partikel yang mendekati kecepatan cahaya.

### 4.3 Sifat-sifat suatu Fungsi Gelombang

Untuk fungsi gelombang partikel yang tidak bergantung waktu,  $\psi(x)$ ,  $|\psi(x)|^2 dx$  disebut peluang menemukan partikel di antara x dan x + dx.

$|\psi(x)|^2$  rapat peluang partikel berada di x

Total peluang untuk menemukan partikel itu disepanjang sumbu-x adalah:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx$$

Dengan  $\psi^*$  adalah konjugasi dari  $\psi$ .

Fungsi  $\psi(x)$  yang memenuhi persamaan di atas disebut fungsi yang dinormalisasi, sedangkan disebut rapat peluang.

Suatu fungsi gelombang partikel harus memiliki kelakuan yang baik, yakni:

1. Tidak sama dengan nol dan bernilai tunggal, artinya untuk suatu harga  $x$ ,  $\psi(x)$  memiliki hanya satu harga saja.
2. Fungsi dan turunannya kontinu di semua harga  $x$ , dan.
3. Fungsi (harga mutlak) tetap terbatas (finite) untuk  $x$  menuju  $\pm \infty$ .

### 4.3.1 Operator Fisis

Setiap besaran fisis suatu partikel dikaitkan dengan operatornya, misalnya operator bagi energi total adalah  $\hat{H}$  seperti diperlihatkan dalam persamaan:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$$

Bagi suatu operator besaran fisis berlaku istilah matematik berikut:

1. Harga suatu besaran fisis adalah nilai eigen dari operatornya.
2. Setiap nilai eigen dari suatu operator berkaitan dengan suatu fungsi eigen, nilai eigen adalah ril.

Persamaan harga eigen:

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$$

3. Secara umum harga rata-rata suatu besaran fisis pada fungsi keadaannya memenuhi persamaan

$$A_{av} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \psi(x) dx}$$

operator besaran fisis

fungsi keadaan partikel

harga rata-rata besaran fisis

Bagi fungsi keadaan yang dinormalisasi

$$A_{av} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx$$

Andaikan:

$$\hat{A} \varphi_n(x) = a_n \varphi_n(x)$$

$$\psi(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x)$$

Jika  $\{\varphi_n\}$  adalah fungsi-fungsi yang ortonormal

$$A_{av} = \int \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx = \sum_{mn} c_m^* c_n \int \varphi_m^*(x) \hat{A} \varphi_n(x) dx$$

$$\sum_{mn} c_m^* c_n a_n \int \varphi_m^*(x) \varphi_n(x) dz = \sum_{mn} c_m^* c_n a_n \delta_{mn}$$

$$\sum_n c_n^* c_n a_n$$

Karena harga rata-rata suatu besaran fisis adalah ril maka berlaku

$$\int \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx = \int [\hat{A} \psi(x)]^* dx$$

Secara matematik, operator yang memenuhi persamaan di atas disebut operator Hermitian.

### 4.3.2 Operator momentum

Menurut de Broglie, sebuah partikel yang bergerak sepanjang sumbu-x mempunyai momentum linier  $p_x = \hbar k$  dengan  $k = 2\pi/\lambda$ . Fungsi gelombang partikel itu adalah .

$$\varphi(x) = ae^{ikx}$$

Bagaimanakah bentuk operator momentum yang memiliki harga eigen  $p_x = \hbar k$  ?

Untuk itu berlaku persamaan nilai eigen:

$$\begin{aligned}\hat{p}_x \varphi(x) &= \hbar k \varphi(x) \\ \varphi(x) = ae^{ikx} &\rightarrow \hbar k \varphi(x) = -i\hbar \frac{d\varphi(x)}{dx} \\ \hat{p}_x \varphi(x) &= \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \varphi(x)\end{aligned}$$

Jadi operator momentum linier adalah:

$$\hat{p}_x = \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right); \quad \text{Ingat, energi}$$

kinetik:

Secara umum, operator momentum:

$$\begin{aligned}\hat{K} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} &= \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \\ \hat{p} &= -i\hbar \nabla\end{aligned}$$

### 4.4 Persamaan Gerak Heisenberg

Secara umum jika  $A_{av}$  adalah harga rata-rata operator  $\hat{A}$  besaran fisis dengan fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  maka:

$$A_{av} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) \hat{A} \psi(x,t) dx$$

Variasi harga rata-rata itu terhadap waktu adalah

$$\frac{dA_{av}}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \psi^* \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \psi + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \hat{A} \psi + \psi^* \hat{A} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dx$$

Mengingat:

$$\hat{H}\psi(x) = i\hbar \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$$

Dan

$$\begin{aligned} [\hat{H}\psi(x)]^* &= -i\hbar \frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \hat{A}\psi + \psi^* \hat{A} \frac{\partial\psi}{\partial t} &= -\frac{1}{i\hbar} \psi^* \hat{H} \hat{A} \psi + \frac{1}{i\hbar} \psi^* \hat{A} \hat{H} \psi = \frac{1}{i\hbar} \psi^* [\hat{A} \hat{H} - \hat{H} \hat{A}] \psi \\ &= \frac{1}{i\hbar} \psi^* [\hat{A}, \hat{H}] \psi \end{aligned}$$

Maka

$$\frac{dA_{av}}{dt} = \int \psi^* \left( \frac{\partial\hat{A}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] \right) \psi dx$$

Jadi,

$$\frac{dA_{av}}{dt} = \int \psi^* \frac{d\hat{A}}{dt} \psi dx$$

Dengan

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial\hat{A}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}]$$

$\frac{d\hat{A}}{dt}$  Operator turunan dari

$\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}$  Turunan dari A

Jika operator  $\hat{A}$  komut dengan  $\hat{H}$ , maka

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial\hat{A}}{\partial t}$$

Jika operator  $\hat{A}$  selain komut dengan  $\hat{H}$ , juga tak bergantung waktu:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = 0$$

Besaran fisis seperti itu disebut tetapan gerak dari partikel (kekal dalam pengertian klasik).

### Contoh Soal

1. Suatu partikel bergerak yang memenuhi persamaan  $\psi(x, t) = 5,0 e^{i(30x-50t)}$ . Hitunglah energi dan momentum partikel tersebut.

Jawab.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} P \psi(x, t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (5,0 e^{i(30x-50t)}) \\ &= \hbar 30 \times 5,0 e^{i(30x-50t)} \\ &= \hbar 30 \Psi(x, t) \\ &= 1,055 \times 10^{-34} \times 30 \psi(x, t) \\ &= 31,65 \times 10^{-34} \psi(x, t) \\ E \psi(x, t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (5,0 e^{i(30x-50t)}) \\ &= \hbar 50 \Psi(x, t) \\ &= 52,75 \times 10^{-34} \psi(x, t) \end{aligned}$$

2. Tinjau suatu persegi tak hingga. Fungsi partikel gelombang partikel yang terperangkap pada sumur yang memiliki lebar  $2a$  dapat dinyatakan sebagai:

$$\psi = C \left[ \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\pi}{2a}\right) \right]$$

Di dalam sumur dan di luar sumur berlaku  $\psi = 0$ . Tentukanlah koefisien  $C$

Jawab.

Penyelesaian: karena  $\psi$  telah dinormalisasikan, maka:

$$\int_{-a}^a \psi^2 dx = 1$$

atau dapat dinyatakan sebagai:

$$C^2 \int_{-a}^a \left[ \cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi x}{a}\right) + \frac{1}{16} \cos^2\left(\frac{3\pi}{2a}\right) \right] dx = 1$$

Dalam hal ini telah diabaikan suku-suku lainnya sehingga diperoleh:

$$2ac^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{32} \right) = 1$$

Atau

$$c = 4 \sqrt{\frac{1}{33a}}$$

## Latihan

1. Diketahui bahwa:

$$E\psi = \frac{p^2\psi}{2m} + V\psi$$

Buktikan bahwa:

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi$$

2. Gunakanlah teknik pemisahan variabel untuk memperlihatkan bahwa ada persamaan Schrodinger tiga dimensi untuk potensial bebas waktu yang dapat ditulis:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z, t) e^{-\frac{Et}{\hbar}}$$

Dengan  $\psi(x, y, z, t)$  adalah solusi persamaan Schrodinger bebas waktu.

3. Suatu partikel bergerak yang memenuhi persamaan:  $\psi(x, t) = 5,0 e^{i(30x-50t)}$ . Hitunglah energi dan momentum partikel tersebut.



# BAB V

## SISTEM DENGAN POTENSIAL SEDERHANA

Pada bab ini Anda akan mempelajari den. Oleh karena itu, setelah mempelajari bab ini Anda diharapkan memiliki kemampuan untuk:

1. Menjelaskan potensial tangga
2. Menjelaskan potensial tangga persegi
3. Menjelaskan sumur potensial persegi tak terhingga
4. Menjelaskan sumur potensial persegi terhingga
5. Menjelaskan sumur potensial persegi dengan dinding
6. Menjelaskan osilator harmonis sederhana

### 5.1 Pendahuluan

Persoalan kuantum mekanis yang paling sederhana adalah persoalan sebuah partikel bebas yang bergerak tanpa dipengaruhi gaya apapun dalam suatu bagian ruang, yaitu  $F = 0$ , sehingga  $V(x) = \text{konstanta}$ , untuk semua  $x$ . Dalam hal ini, kita bebas memilih tetapan potensial sama dengan nol, karena potensial selalu ditentukan dengan tambahan satu tetapan integrasi sembarang ( $F = -dV/dx$  dalam satu dimensi).

Berikut kita terapkan persamaan Schrodinger bergantung waktu kecuali dengan potensial yang sesuai ( $V = 0$ ):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

atau

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = E \Psi$$

Perluasan bentuk energi partikel bebas ke dalam ruang tiga dimensi diberikan oleh

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

Dan Persamaan di atas dapat diperluas menjadi

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi \end{aligned}$$

Dan dari hubungan  $E = \hbar \omega$  dan  $p = \hbar k$ , diperoleh

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 \Psi$$

di mana

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Persamaan di atas adalah bentuk persamaan yang telah lazim dikenal ; dengan  $k^2$  selalu positif, maka pemecahannya adalah

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

Nilai energi yang diperkenankan adalah:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Karena pemecahan kita tidak memberi batasan pada  $k$ , maka energi partikel diperkenankan memiliki semua nilai (dalam istilah fisika kuantum, kita katakan bahwa energinya *tidak* terkuantisasi). Perhatikan bahwa Persamaan di atas tidak lain adalah energi kinetik sebuah partikel dengan momentum  $p = \hbar k$ , atau, setara dengan ini,  $p = h/\lambda$ ; ini tidak lain daripada apa yang kita perkirakan, karena kita telah membentuk persamaan Schrodinger yang menghasilkan pemecahan bagi partikel bebas yang berkaitan dengan satu gelombang de Broglie.

## 5.2 Potensial Tangga

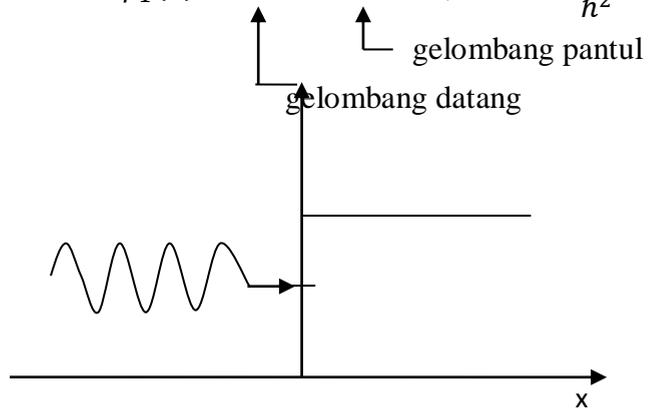
Sebuah elektron datang dari x-negatif menuju x-positif. Di  $x = 0$  elektron itu menghadapi potensial tangga sebesar  $V_0$ .

Jika energi total elektron,  $E < V_0$ , secara klasik elektron akan terpantul sepenuhnya.

Bagaimana menurut kuantum?

Di daerah  $x < 0$ ,  $V = 0$ ; misalkan fungsi gelombangnya adalah  $\psi_1(x)$ .

$$\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + E\psi_1 = 0 \rightarrow \psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}; \quad k^2 = \frac{2m_e E}{\hbar^2}$$



Gambar 5.1 Potensial Tangga untuk  $E < V_0$

Di daerah  $x > 0$ ,  $V = V_0$ ; misalkan fungsi gelombang elektron adalah  $\psi_2(x)$

$$\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + (E - V_0)\psi_2 = 0$$

Karena  $E < V_0$ , maka solusi bagi fungsi  $\psi_2(x)$  merupakan fungsi eksponensial menurun seperti:

$$\psi_2(x) = Ce^{-Kx}; \quad K^2 = \frac{2m_e(V_0 - E)}{\hbar^2} = k^2$$

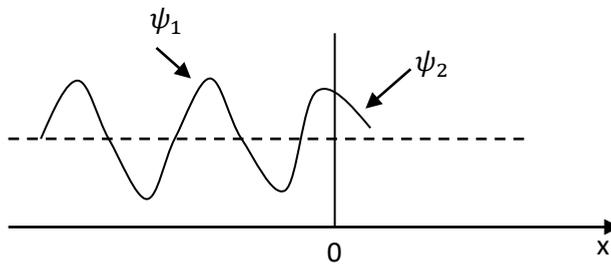
Di  $x = 0$ ,  $\psi_1$  dan  $\psi_2$  harus bersambung agar fungsi gelombang itu kontinu;

Syarat kontinu:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0); \quad \text{dan} \quad \left. \frac{d\psi_1(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\psi_2(x)}{dx} \right|_{x=0}$$

$$\begin{aligned} \downarrow & & \downarrow \\ A + B = C & & ik(A - B) = -KC \end{aligned}$$

$$B = \frac{k - iK}{k + iK} A; \quad C = \frac{2k}{k + iK} A \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \psi_1(x) &= Ae^{ikx} + \frac{k - iK}{k + iK} Ae^{-ikx}; \quad x < 0 \\ \psi_2(x) &= \frac{2k}{k + iK} Ae^{-Kx}; \quad x > 0 \end{aligned} \right.$$



Gambar 5.2 Fungsi Gelombang

Kerapatan peluang elektron di  $x > 0$  dapat dihitung dengan menggunakan  $\psi_2(x)$ :

$$|\psi_2(x)|^2 = \frac{4k^2}{k^2 + K^2} |A|^2 e^{-2Kx} = \frac{4E}{V_0} |A|^2 e^{-2Kx}$$

Jadi, meskipun mengalami potensial penghalang yang lebih besar dari energinya, elektron masih mempunyai peluang berada di  $x > 0$ .

Peluang itu menuju nol jika  $V_0 \gg E$ , atau di  $x = \infty$ .

$$|C/A|^2 = \frac{4k^2}{k^2 + K^2} = \frac{4E}{V_0}$$

adalah koefisien transmisi yang secara klasik tak dapat diramalkan.

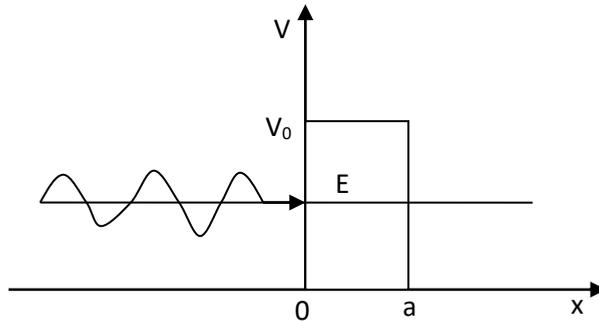
### 5.3 Potensial Tangga Persegi

Sebuah elektron datang dari x-negatif menuju x-positif. Elektron menghadapi potensial tangga seperti:

$$V(x) = V_0; \quad 0 \leq x \leq a$$

$$= 0; \quad x < 0; \quad x > a$$

Sepanjang perjalanannya energi total elektron,  $E < V_0$ .



Gambar 5.3 Potensial Tangga Persegi

Karena  $V = 0$ , fungsi gelombang elektron sebagai solusi persamaan Schrodinger dalam daerah  $x < 0$  sama dengan:

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}; \quad k^2 = \frac{2m_e E}{\hbar^2}$$

Dalam daerah  $0 < x < a$ , karena  $E < V_0$ : fungsi gelombang sebagai solusi persamaan Schrodinger adalah

$$\psi_2(x) = Ce^{Kx} + De^{-Kx}; \quad K^2 = \frac{2m_e(V_0 - E)}{\hbar^2} = \frac{2m_e V_0}{\hbar^2} - k^2$$

Di daerah  $x > a$ ,  $V = 0$ ; maka fungsi gelombang di sana adalah:

$$\psi_3(x) = Fe^{ikx} \quad \text{Hanya arah ke kanan saja.}$$

Syarat kontinuitas di  $x = 0$  dengan menggunakan fungsi-fungsi  $\psi_1(x)$  dan  $\psi_2(x)$ , akan memberikan hubungan:

$$A + B = C + D$$

$$ik(A - B) = K(C - D)$$

dan syarat kontinuitas di  $x = a$  dengan menggunakan  $\psi_2(x)$  dan  $\psi_3(x)$ , memberikan

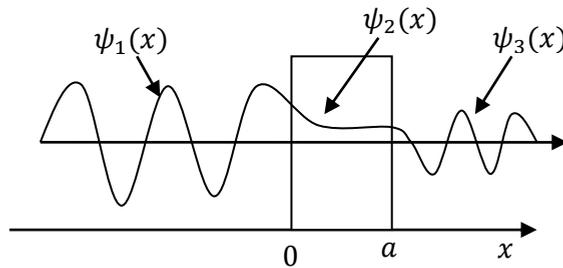
$$C e^{Ka} + D e^{-Ka} = F e^{ika}$$

$$K(C e^{Ka} - D e^{-Ka}) = ik F e^{ika}$$

Dengan mengeliminasi C dan D, akan diperoleh:

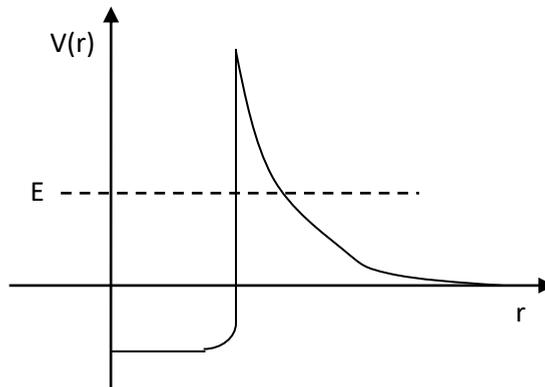
$$\frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{V_0^2 \sin^2 h^2 (Ka)}{V_0^2 \sin^2 h^2 (Ka) + 4E(V_0 - E)} \quad \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{4E(V_0 - E)}{V_0^2 \sin^2 h^2 (Ka) + 4E(V_0 - E)}$$

Ilustrasi fungsi gelombang:



Gambar 5.4 Fungsi Gelombang

$\frac{|B|^2}{|A|^2}$  merupakan koefisien pantulan di  $x = 0$  dan  $\frac{|F|^2}{|A|^2}$  adalah koefisien transmisi di  $x = a$ . Jadi, secara kuantum elektron dapat menerobos potensial penghalang meskipun energinya lebih kecil daripada potensial penghalang. Fenomena inilah yang disebut sebagai efek terobosan (*tunnel effect*).



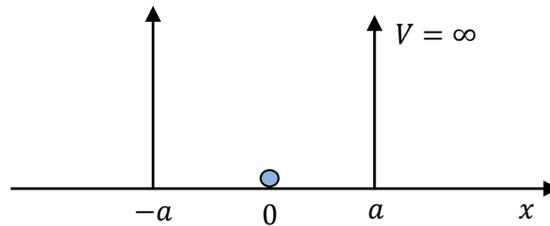
Gambar 5.5 Sumur Potensial

Terobosan partikel berlangsung dalam peluruhan radioaktif. Suatu partikel- $\alpha$  (= inti atom He) mengalami gaya dorong elektrostatis inti hingga jarak  $10^{-8}$   $\mu\text{m}$  dari inti Uranium. Kurang dari jarak itu gaya bersifat tarikan dan berbentuk sumur potensial seperti diperlihatkan dalam Gb. Partikel- $\alpha$  dalam sumur itu dapat menerobos penghalang (tarikan) dan selanjutnya terdorong keluar. Eksperimen menunjukkan bahwa energi partikel itu lebih kecil daripada penghalang.

#### 5.4 Sumur Potensial Persegi Tak Terhingga

Andaikanlah suatu elektron dalam pengaruh potensial berbentuk sumur tak terhingga berdimensi-1 seperti berikut:

$$V(x) = 0; \quad -a < x < a \\ = \infty; \quad x \geq a; \quad x \leq -a$$



Gambar 5.6 Sumur Potensial Persegi Tak Terhingga

Elektron terperangkap dalam daerah  $-a < x < a$ , dan sama sekali tak dapat ke luar daerah itu. Dengan perkata lain peluang elektron berada di  $x > a$  dan di  $x < -a$  sama dengan nol. Oleh sebab itu, jika  $\psi(x)$  adalah fungsi gelombangnya, maka

$$\psi(a) = \psi(-a) = 0$$

Karena  $V = 0$  dalam daerah  $-a < x < a$ , maka persamaan Schrödinger bagi elektron tersebut adalah:

$$\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2\psi}{dx^2} + E\psi = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0; \quad k^2 = \frac{2m_e E}{\hbar^2}$$

Solusinya adalah  $\psi(x) = C \cos kx$  dan  $\psi(x) = D \sin kx$ . Dengan syarat batas di  $x = a$  diperoleh

$$\psi_n(x) = C \cos(n\pi x/2a) \quad \text{untuk} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\psi_n(x) = D \sin(n\pi x/2a) \text{ untuk } n = 2,4,6, \dots \dots$$

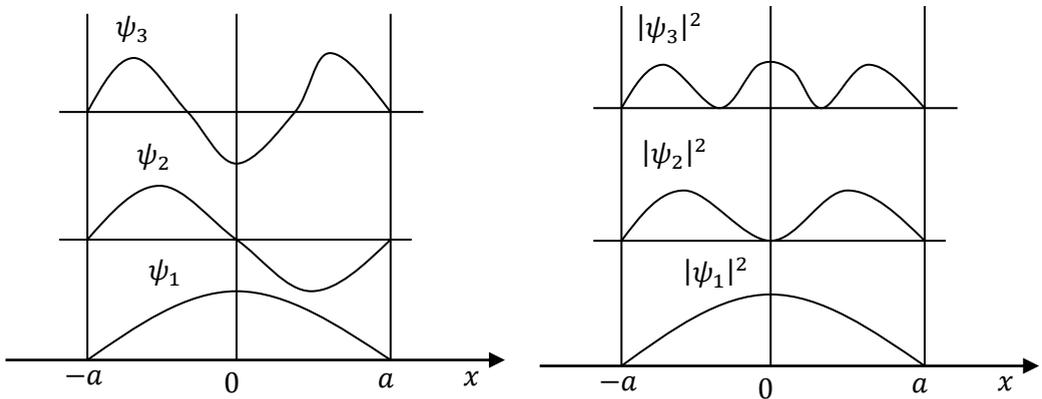
Harga C dan D dihitung melalui normalisasi fungsi, yakni:

$$\int_{-a}^a \psi_n^*(x)\psi_n(x)dx = 1$$

Hasilnya adalah  $C=D=1/\sqrt{a}$ , sehingga fungsi-fungsi eigen adalah:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \text{ untuk } n = 1,3,5, \dots \dots$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \text{ untuk } n = 1,3,5, \dots \dots$$



Gambar 5.7 Fungsi-Fungsi Eigen

Fungsi-fungsi ini membentuk set ortonormal; artinya:  $\int \psi_n^*(x)\psi_{n'}(x)dx = \delta_{nn'}$

Selanjutnya, diperoleh harga eigen energi:

$$E_n = n^2 \left( \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m_e a^2} \right); \quad n = 1,2,3, \dots \dots$$

$$\begin{array}{l} \psi_4 \quad \text{-----} \quad E_4 = 16 E_1 \\ \psi_3 \quad \text{-----} \quad E_3 = 9 E_1 \\ \psi_2 \quad \text{-----} \quad E_2 = 4 E_1 \\ \psi_1 \quad \text{-----} \quad E_1 \end{array}$$

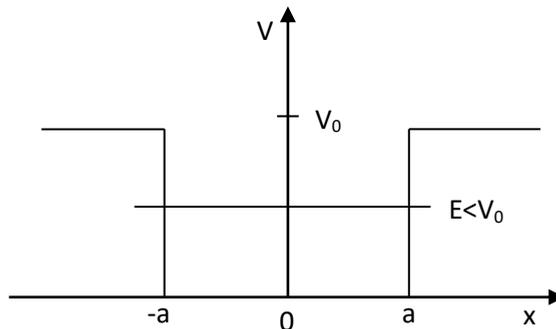
Energi ini berharga diskrit (tidak kontinu, tapi bertingkat-tingkat) ditandai oleh bilangan kuantum n.

### 5.5 Sumur Potensial Persegi Terhingga

Misalkan elektron terperangkap dalam sumur potensial terhingga seperti:

$$V(x) = 0; \quad -a < x < a \\ = V_0; \quad x \geq a; \quad x < -a$$

Jika energi  $E < V_0$  secara klasik elektron tak dapat ke luar daerah itu. Tetapi secara kuantum, karena potensial itu terhingga elektron masih berpeluang berada diluar daerah  $-a < x < a$ . Syarat batas hanyalah:  $\psi(\pm\infty) = 0$



Gambar 5.8 Sumur Potensial Persegi Terhingga

Persamaan Schrödinger untuk daerah  $-a < x < a$  adalah:

$$\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2\psi}{dx^2} + E\psi = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0; \quad k^2 = \frac{2m_e E}{\hbar^2}$$

dengan mana diperoleh solusi berikut:

$$\psi(x) = \cos kx \quad \text{dan} \quad \psi(x) = \sin kx \quad \text{dimana:}$$

Untuk daerah  $|x| \geq a$ , persamaan Schrödinger adalah:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2\psi}{dx^2} + (V_0 - E)\psi = 0$$

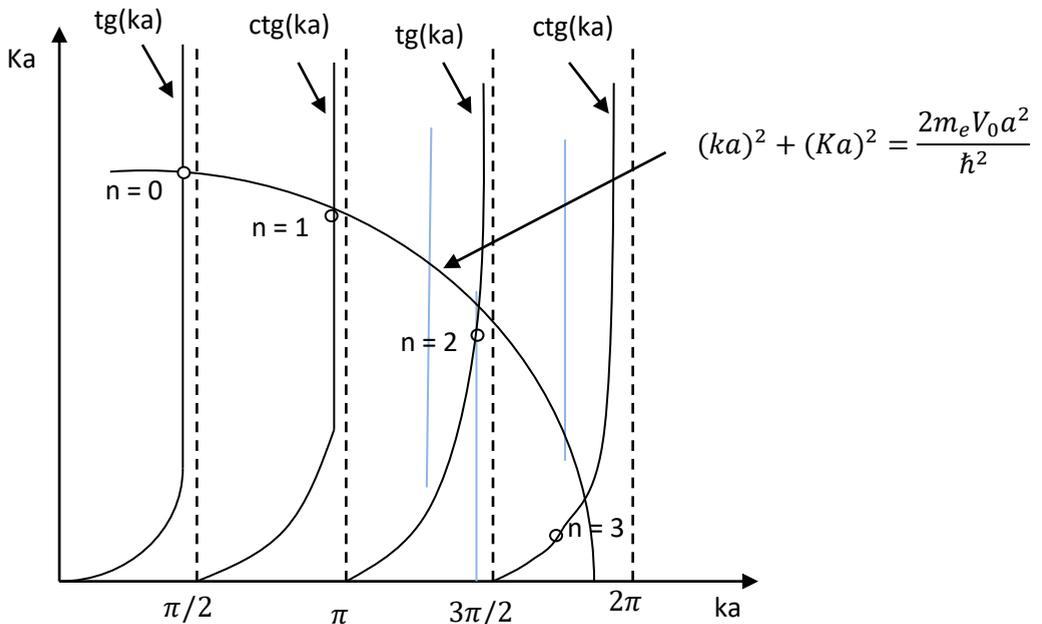
Jika energi elektron  $E < V_0$  maka  $\psi(x)$  merupakan fungsi eksponensial yang menurun dan menuju nol di  $|x| = \infty$ . Jadi, untuk  $|x| \geq a$ :

$$\psi(x) = C e^{-K|x|} \quad \text{dengan} \quad K^2 = \frac{2m_e(V_0 - E)}{\hbar^2}$$

Syarat kontinu di  $x = \pm a$ :

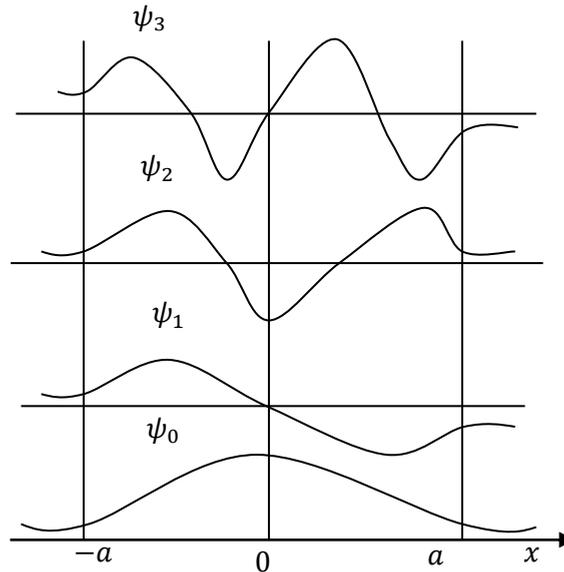
$$\begin{aligned} \cos ka &= Ce^{-Ka} \longrightarrow ka \operatorname{tg} ka = Ka \\ -k \sin ka &= -KCe^{-Ka} \\ \sin ka &= Ce^{-Ka} \longrightarrow ka \operatorname{ctg} ka = -Ka \\ k \cos ka &= -KCe^{-Ka} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} k^2 &= \frac{2m_e E}{\hbar^2} \\ K^2 &= \frac{2m_e (V_0 - E)}{\hbar^2} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \begin{aligned} (ka)^2 + (Ka)^2 &= \\ &= \frac{2m_e V_0 a^2}{\hbar^2} \end{aligned}$$



Gambar 5.9 Syarat Kontinu

Terlihat, jumlah tingkat energi sangat bergantung pada harga  $V_0 a^2$ ; misalnya untuk  $V_0 a^2 \leq (\pi \hbar^2 / 4 m_e)$  hanya ada satu, dan  $V_0 a^2 \leq (\pi \hbar^2 / 2 m_e)$  ada dua tingkat energi.



Gambar 5.10 Keadaan Energi

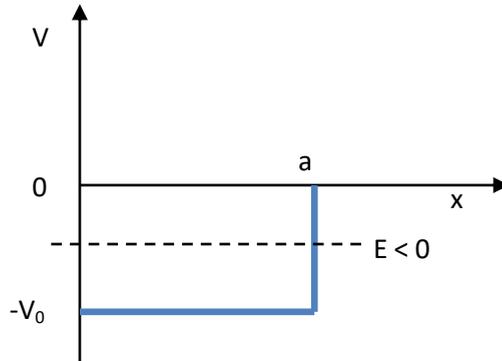
Jelas bahwa meskipun potensial yang dialami elektron itu terhingga, namun karena  $E < V_0$ , energinya tetap diskrit. Keadaan energi yang diskrit itu merupakan ciri dari partikel yang terikat dalam sumur potensial. Karena potensial itu berhingga, fungsi-fungsi eigen mempunyai ekor berbentuk eksponensial menurun di luar sumur. Artinya, elektron masih mempunyai peluang berada di luar sumur. Hal ini tidak mungkin secara klasik.

## 5.6 Sumur Potensial Persegi dengan Dinding

Misalkan partikel berada dalam sumur potensial terhingga seperti:

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty; \quad x \leq 0 \\ &= -V_0; \quad 0 < x < a \\ &= 0; \quad x \geq a \end{aligned}$$

Di  $x = 0$ , potensial itu  $\infty$  sehingga elektron tidak mungkin berada di daerah  $x < 0$ . Bagaimanakah energi dan fungsi gelombang elektron jika  $E < 0$ ?



Gambar 5.11. Sumur Potensial Persegi dengan Dinding

Di dalam daerah  $0 < x < a$ , persamaan Schrödinger adalah:

$$\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + (-E + V_0)\psi_1 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k^2\psi_1 = 0; \quad k^2 = \frac{2m_e}{\hbar^2}(V_0 - E)$$

Solusinya:  $\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

Karena  $\psi_1(0) = 0$ , maka  $A+B = 0$  atau  $B = -A$

$$\psi_1(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) = C \sin kx$$

Persamaan Schrödinger di daerah  $x > a$  adalah:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2\psi_2}{dx^2} - E\psi_2 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + K^2\psi_2 = 0; \quad K^2 = \frac{2m_e E}{\hbar^2}$$

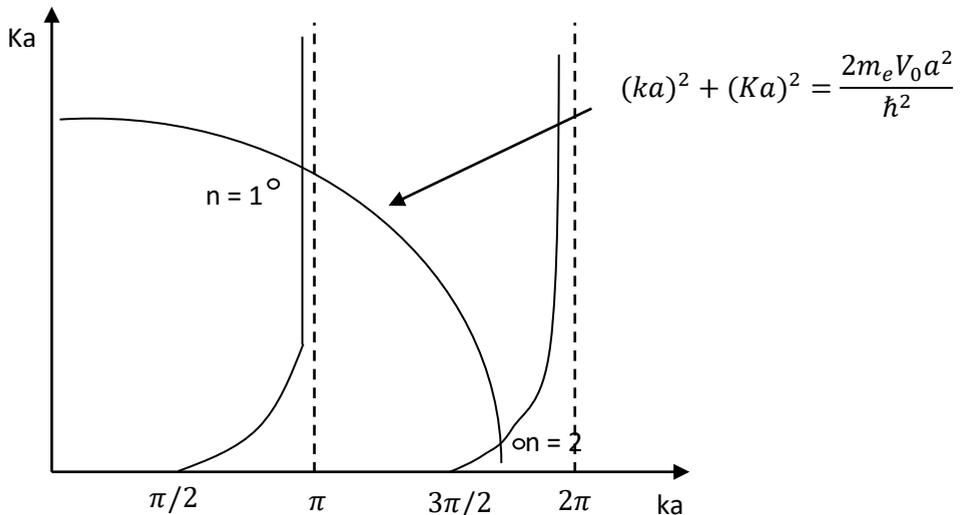
$$\psi_2(x) = De^{-Kx}$$

$$\left. \begin{aligned} C \sin ka &= D e^{-Ka} \\ kC \cos ka &= K D e^{-Ka} \end{aligned} \right\} D = C \sqrt{\frac{k^2 \exp(2Ka)}{k^2 + K^2}}$$

Dan  $ka \operatorname{ctg}(ka) = -Ka$

$$k^2 a^2 + K^2 a^2 = \frac{2m_e V_0 a^2}{\hbar^2}$$

Dari kedua persamaan ini diperoleh grafik berikut:



Gambar 5.12 Grafik Persamaan Schrödinger di daerah  $x > a$

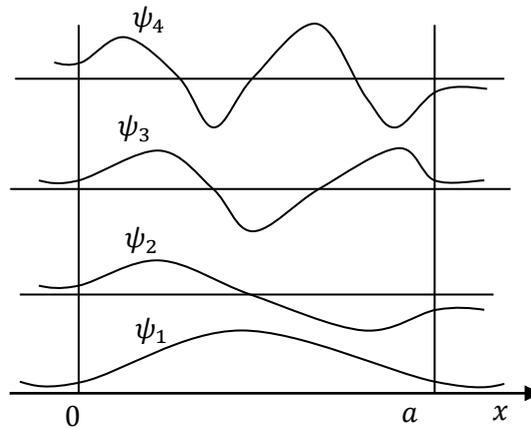
Dari rumusan  $k$  dan  $K$ , tingkat-tingkat energi elektron adalah:

$$E_n = \frac{k_n^2 \hbar^2}{2m_e} - V_0 \text{ atau } E_n = -\frac{K_n^2 \hbar^2}{2m_e}$$

Di mana  $k_n$  dan  $K_n$  diperoleh berdasarkan titik-titik potong dalam gambar. Jadi, energi elektron diskrit, karena elektron terperangkap dalam sumur potensial.

Untuk  $V_0 a^2 < \pi \hbar^2 / 4 m_e$  tidak ada titik potong, untuk  $\pi \hbar^2 / 4 m_e < V_0 a^2 < \pi \hbar^2 / 2 m_e$  hanya ada satu titik potong,  $n=1$ , dan seterusnya.

Bentuk fungsi-fungsi keadaan dapat digambarkan dengan menggunakan hasil-hasil di atas:



Gambar 5.13 Bentuk Fungsi-Fungsi Keadaan

### 5.7 Osilator Harmonis Sederhana

Dalam mekanika klasik, osilator harmonis sederhana adalah benda yang bergerak osilasi dengan simpangan kecil dalam pengaruh gaya konservatif:

$$\vec{F} = -m\omega^2\vec{x}$$

$m$  adalah massa, dan  $\omega$  adalah  $2\pi x$  frekuensi; gerak osilasi berbentuk sinusoida dengan amplitudo  $A$  adalah:

$$x(t) = A \sin \omega t$$

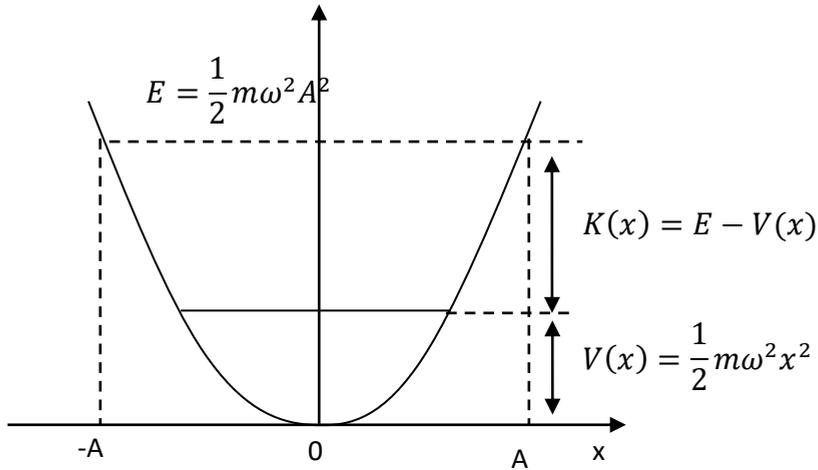
Dengan gaya konservatif tersebut, energi potensial yang dimiliki benda adalah:

$$V(x) = - \int_0^x \vec{F} d\vec{x} = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Energi total sebagai jumlah energi potensial ( $V$ ) dan energi kinetik ( $K$ ) diperlihatkan dalam:

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

Jadi, secara klasik osilator memiliki energi tunggal.



Gambar 5.14 Osilator Harmonis Sederhana

Bagaimana pandangan fisika kuantum?

Persamaan Schrödinger untuk suatu partikel beresiliasialah:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi(x) = 0$$

Lakukan penyederhanaan:  $a = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ ;  $c = \frac{2E}{\hbar\omega}$ ;  $z = ax$

$$\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + (c - z^2)\psi(z) = 0$$

Persamaan ini dapat diselesaikan dalam dua tahap.

Tahap pertama: untuk  $z$  yang besar  $c$  dapat diabaikan: (appr. Asimtotik)

$$\psi(z) \propto e^{-z^2/2}$$

Tahap berikutnya, nyatakan fungsi lengkap seperti:

$$\psi(z) = H(z)e^{-z^2/2}$$

Persamaan Schrodinger menjadi:

$$\frac{d^2H(z)}{dz^2} - 2z\frac{dH}{dz} + (c - 1)H = 0$$

merupakan persamaan diferensial Hermite. Solusinya adalah polinom Hermite sebagai berikut:

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z^2}); \quad n = 0, 1, 2, \dots \dots \quad n = \frac{1}{2}(c - 1) \\ = 0, 1, 2, \dots \dots$$

Sehingga fungsi-fungsi eigen (keadaan) adalah:

$$\psi_n(z) = N_n H_n(z) e^{-\frac{1}{2}z^2}; \quad N_n = \sqrt{\frac{1}{2^n n! \pi^{1/2}}}$$

$$\psi_n(x) = N_n H_n(ax) e^{-\frac{1}{2}a^2 x^2}; \quad N_n = \sqrt{\frac{a}{2^n n! \pi^{1/2}}}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{a} \psi_n(z)$$

dimana adalah faktor normalisasi dan n merupakan bilangan kuantum .

Contoh fungsi-fungsi keadaan:

$$H_0(z) = 1 \rightarrow \psi_0(z) = \sqrt{\pi^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

$$H_1(z) = 2z \rightarrow \psi_1(z) = \sqrt{2\pi^{-\frac{1}{2}}} z e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

$$H_2(z) = 4z^2 - 2 \rightarrow \psi_2(z) = \sqrt{\frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}} (2z^2 - 1) e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Fungsi-fungsi eigen di atas membentuk set yang ortonormal.

Dari  $c = \frac{2E}{\hbar\omega}$  dan  $n = \frac{1}{2}(c - 1)$

diperoleh energi eigen (keadaan) bersangkutan:

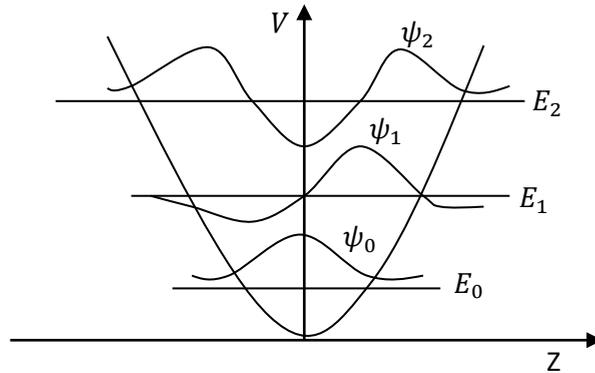
$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega; \quad n = 0, 1, 2, \dots \dots \dots$$

Terlihat bahwa, karena partikel terperangkap dalam potensial V, maka energinyadiskrit . Frekuensi osilator lebih kurang sama de ngan frekuensi bunyi; oleh sebab itu,  $\hbar\omega$  disebut fonon. Jadi, fungsi keadaan  $\psi_n$  dikatakan mengandung n buah fonon.

Untuk lebih jelasnya, fungsi-fungsi keadaan diperlihatkan dalam gambar di bawah ini. Fungsi keadaan

$$\psi_0(z) = \sqrt{\pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z^2}}$$

disebut keadaan dasar dengan energi  $E_0 = 1/2 \hbar\omega$



Gambar 5.15 Fungsi-Fungsi Keadaan

Sifat-sifat penting polinom Hermite:

(i). Hubungan rekursif :

$$H_{n+1}(z) = 2zH_n(z) - 2nH_{n-1}(z)$$

$$\frac{dH_n(z)}{dz} = 2nH_{n-1}(z)$$

(ii). Sifat ortogonalitas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} H_m(z)H_n(z)dz = 2^n n! \pi^{1/2} \delta_{mn}$$

Dengan sifat-sifat di atas, diperoleh sifat-sifat fungsi keadaan:

(i) Hubungan rekursif:

$$\psi_{n+1}(z) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} z\psi_n(z) - \sqrt{\frac{n}{n+1}} \psi_{n-1}(z)$$

$$\frac{d\psi_n(z)}{dz} = \sqrt{\frac{n}{2}} \psi_{n-1}(z) - \sqrt{\frac{n+1}{2}} \psi_{n+1}(z)$$

(ii) Sifat ortonormalitas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(z)\psi_n(z)dz = \delta_{mn}$$

**Contoh Soal**

1. Hitunglah gaya pegas rata-rata.

$$F = -m\omega^2 x$$

$$F_{ave} = -m\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)x\psi_n(x)dx$$

$$= -\omega\sqrt{m\hbar\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(z)z\psi_n(z)dz$$

2. Hitunglah harga rata-rata energi potensial.

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$V_{ave} = \frac{1}{2}m\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)x^2\psi_n(x)dx = \frac{1}{2}\hbar\omega \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(z)z^2\psi_n(z)dz$$

dari osilator harmonik

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\psi_n(z)}{dz^2} + (c - z^2)\psi_n(z) &= 0 \\ c = \frac{2E_n}{\hbar\omega} \end{aligned} \right\} \left( -\frac{d^2}{dz^2} + z^2 \right) \psi_n(z) = 2 \binom{n}{1}$$

Misalkan:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z + \frac{d}{dz}\right); \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z - \frac{d}{dz}\right); \rightarrow 2\hat{a}^+\hat{a} + 1$$

$$= 2\hat{a}\hat{a}^+ - 1 = -\frac{d^2}{dz^2} + z^2$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}^+\hat{a}\psi_n &= n\psi_n \\ \hat{a}\hat{a}^+\psi_n &= (n+1)\psi_n \end{aligned} \right\}$$

Operator  $\hat{a}^+ \hat{a}$  mempunyai nilai eigen  $n$  dengan fungsi keadaan  $\psi_n$ ; karena  $n$  menyatakan jumlah fonon dalam keadaan  $\psi_n$  maka operator ini disebut operator okupasi.

$$\text{Karena } \frac{1}{2} \hbar \omega (2\hat{a}\hat{a}^+ - 1)\psi_n(z) = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \psi_n(z)$$

Maka  $\hbar \omega \left(\hat{a}\hat{a}^+ - \frac{1}{2}\right)$  merupakan operator hamiltonian.

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \hat{a}^+ \psi_n &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( z - \frac{d}{dz} \right) \psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}; & \hat{a} \psi_n &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( z + \frac{d}{dz} \right) \psi_n \\ & & &= \sqrt{n} \psi_{n-1} \end{aligned}$$



# BAB VI

## PENERAPAN METODE SCHRÖDINGER PADA SISTEM ATOM HIDROGEN (MODEL DASAR)

Pada bab ini Anda akan mempelajari sistem fisik atom dan representasinya secara matematika, struktur persamaan gelombang Schrödinger, untuk sistem atom hidrogen, pemecahan persamaan anguler dan persamaan radial persamaan. Oleh karena itu, setelah mempelajari bab ini Anda diharapkan memiliki kemampuan untuk:

1. Menjelaskan sistem fisik atom dan representasinya secara matematika
2. Menjelaskan struktur persamaan gelombang schrodinger untuk sistem atom hidrogen
3. Menjelaskan pemecahan persamaan anguler  $\psi(\theta, \varphi)$
4. Menjelaskan pemecahan persamaan radial

### 6.1 Sistem Fisik Atom dan Representasinya Secara Matematika

Model dasar atom hidrogen adalah sebagai berikut:

1. suatu elektron dengan muatan listrik  $e$  dan massa  $m$ , mengelilingi suatu inti yang bermuatan positif  $+Ze$ , karena pengaruh gaya Coulomb, potensial

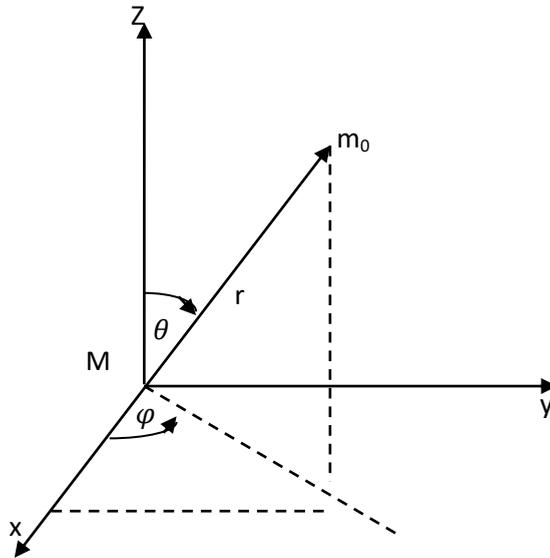
$$V(r) = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon r}$$

2. Massa inti atom hidrogen  $M$ , dianggap sangat besar terdapat massa elektron  $m$ , sehingga titik pusat massa berimpit dengan posisi inti.

Fungsi potensi

$$V(r) = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Koordinat bola dipergunakan sebagai sistem koordinat acuannya. Sketsa koordinat  $(x,y,z)$  dan koordinat  $(\sigma, \theta, \mu)$  kemudian pula transformasinya adalah



Gambar 6.1 Sketsa Koordinat  $(x, y, z)$  Dan Koordinat  $(\sigma, \theta, \mu)$

Fungsi Hamilton (fungsi energi total) yang menggambarkan sistem atom hidrogen tersebut adalah :

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + V(r)$$

Operator Hamiltonnya :

$$H_{op} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + V(r) \quad (4-2)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Dalam koordinat bola operator Laplace tersebut berbentuk:

$$\nabla^2$$

$$= \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

Sehingga dalam koordinat bola, operator Hamilton:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Dengan demikian persamaan gelombang Schroedinger untuk model atom H yang sederhana,

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \psi(r, \theta, \varphi) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi)$$

Untuk notasi singkat akan digunakan  $\psi(\vec{r})$  untuk mempresentasikan  $\psi(r, \theta, \varphi)$

## 6.2 Struktur persamaan gelombang schroedinger untuk sistem atom hidrogen

Andakan bahwa dapat dilakukan pemisahan variabel sehingga solusi persamaan gelombang untuk Atom H dapat di tulis sebagai berikut:

$$\Psi(r, \theta, \mu) = R(r)Y(\theta, \varphi)$$

Bagian fungsi R(r) dinamakan bagian radialnya dan  $\Psi(r, \theta, \mu)$  dinamakan bagian angulernya.

Substitusi bentuk di atas akan menghasilkan:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[ \frac{Y^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right] V(r)R(r)Y = ER(r)Y(\theta, \varphi)$$

Apabila seluruh diperkalikan dengan

$$-\frac{2m_0 r^2}{\hbar^2} \frac{1}{R(r)\Psi(\theta, \varphi)}$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{2m_0 r^2}{\hbar^2} [E - V(r)] R$$

$$= -\frac{1}{\Psi} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Psi}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} \right]$$

Karena ruas kiri terdiri dari variabel  $r$ , sedangkan ruas kanan hanya bergantung dari variabel  $\varphi$ , dan apabila keduanya selalu harus sama, masing-masing ruas itu sama dengan suatu tetapan, yang kita namakan saja  $\lambda$ .

Dari uraian diatas diperoleh dua perangkat persamaan :

1. Persamaan radial

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m_0 r^2}{\hbar^2} [E - V(r)] R - \lambda R = 0 \text{ atau}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[ \frac{2m_0 r^2}{\hbar^2} \{E - V(r)\} - \frac{\lambda}{r^2} \right] R = 0$$

2. Persamaan Anguler

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Psi}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} = -\lambda \Psi$$

Dengan  $\Psi(\theta, \varphi) = H(\theta)\phi(\varphi)$

Substitusi dalam persamaan anguler akan memberikan

$$\frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) + \frac{H}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -\lambda H \Phi$$

Perkalian seluruhnya dengan  $\sin^2 \theta \frac{1}{H\Phi}$  akan menghasilkan

$$\frac{1}{H} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2}$$

Masing-masing ruas itu harus sama dengan suatu tetapan yang sementara ini dinamakan  $v$  pemisahan variabel  $\theta$  dan  $\varphi$  akan menghasilkan dua perangkat persamaan.

1. Persamaan untuk  $\phi(\varphi)$

$$\frac{d^2\phi}{d\varphi^2} = -v\Phi(\phi)$$

2. Persamaan untuk  $\Theta(\theta)$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{v}{\sin\theta} \right) \Theta = 0$$

### TINJAUN ULANG

Persamaan gelombang schoedinger untuk sistem atom hidrogen

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r})$$

Merupakan eigen value problem ,yang diselesaikan sebagai masalah persamaan differensial parsial

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

Akan diperoleh 3 perangkat persamaan berikut :

1. Persamaan radial  $R(r)$  :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left( \frac{2m_0}{\hbar^2} \{E - V(r)\} - \frac{\lambda}{r^2} \right) R = 0$$

2. Persamaan anguler  $\Phi(\varphi)$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -v\Phi$$

3. Persamaan angguler  $\Theta(\theta)$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{v}{\sin\theta} \right) \Theta = 0$$

Ketiga perangkat persamaan itu tidak independen ,tetapi terkait satu dengan lain melalui tetapan  $\lambda$  dan  $v$

### 6.3 Pemecahan Persamaan Anguler $\psi(\theta, \varphi)$

Persamaan anguler  $\Phi(\varphi)$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -v\Phi$$

Diketahui mempunyai solusi  $\Phi(\varphi)$  dengan keberkalaan  $2\pi$ , artinya

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

Solusi yang mungkin

$v \equiv 0$ , berarti  $\Phi = A + B\varphi$ ; bukan suatu solusi yang umum

$v \neq 0$ , berarti  $\Phi = Ae^{iv^{\frac{1}{2}}\varphi} + Be^{iv^{\frac{1}{2}}\varphi}$

Ambil solusi umum, sehingga

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \dots \dots$$

Faktor  $(2\pi)$  karena normalisasi dalam selang  $(0, 2\pi)$

Persamaan anguler  $\Theta(\theta)$ ; dengan  $v = m^2$  menjadi

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) \Theta = 0$$

Bentuk ini dikenal dari fisika matematika, dengan solusi yang berbentuk : polinon legendre

Lakukanlah transformasi  $\theta = \arccos W$ , atau  $\cos \theta = W$ , maka solusinya :

$$\Theta(\theta) = p(\omega)$$

Dimana selang  $\theta: (0, \pi)$  menjadi selang  $W, (1, -1)$

Persamaan differensial diatas berubah menjadi:

$$\frac{d}{dw} \left[ (1 - w^2) \frac{dp}{dw} \right] + \left[ \lambda - \frac{m^2}{1 - w^2} \right] p = 0$$

Sifat solusi persamaan diatas adalah sebagai berikut :

1. secara umum solusi persamaan diatas mempunyai harga talk berhingga di  $\omega = +1$ , dan  $\omega = -1$ , kecuali apabila  $\lambda = \ell(\ell + 1)$ , dengan  $\ell = 0, 1, 2$

2. secara khusus ,apabila  $\lambda = \ell(\ell + 1)$  dengan  $\ell = 0,1,2 \dots$  ada solusi dengan harga berhingga di  $\omega = +1$ , dan  $\omega = -1$  solus berhingga itu berbentuk :

$$(1 - \omega^2)^{1/2|m|}$$

Dikalikan suatu polinon berderajat  $(\ell - |m|)$  ; dengan paritas  $(\ell - |m|)$ .

3. Lebih khusus lagi bilamana  $m = 0$ ,solusinya adalah polinom Legendre  $P_\ell(\omega)$ , yang dapat diperoleh dari fungsi pembangkit

$$(1 - 2ws + s^2)^{-1/2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(w)s^\ell$$

Polinom Legendre itu memenuhi hubungan  $s < 1$

$$(1 - w^2)P_\ell' = -\ell w P_\ell + \ell P_{\ell-1}$$

$$(\ell + 1)P_{\ell+1} = (2\ell + 1)w P_\ell - \ell P_{\ell-1}$$

4. Apabila  $m \neq 0$ , hanya ada satu solusi yang berhingga apabila  $|m| \leq \ell$  solusi dinamakan associated Legendre Functions:

$$P_\ell^m(w) = (1 - w^2)^{\frac{1}{2}|m|} \frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}} P_\ell(w)$$

Fungsi pembangkit:

$$\frac{(2|m|)! (1 - w^2)^{\frac{1}{2}m} s^{|m|}}{2^{|m|} (|m|)! (1 - 2w + s^2)^{|m| + \frac{1}{2}}} = \sum_{\ell=|m|}^{\ell=\infty} P_\ell^m(w) s^\ell$$

Tinjau ulang pemecahan persamaan anguler total:

- $\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$ ;  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$
- $H(\theta)$  mempunyai solusi berhingga hanya apabila  $\lambda = \ell(\ell + 1)$  dengan  $\ell = 0,1,2,3, \dots$
- Apabila  $m = 0$ , maka  $\Theta(\theta)$  adalah polinom Legendre dengan mengambil  $\theta = \arccos w$ , maka:  
 $\Theta_\ell(\theta) = P_\ell(w)$ , memenuhi:

$$\frac{d}{dw} \left[ (1 - w^2) \frac{dp}{dw} \right] + \ell(\ell + 1)P_\ell = 0$$

4. Apabila  $m \neq 0$ , maka solusi berhingga hanya  $|m| \leq \ell$ .

$\Theta_\ell^m(\theta) = P_\ell(w)$  diperoleh melalui transformasi  $\theta = \arccos w$   
 $P_\ell^m(w)$  memenuhi persamaan

$$\frac{d}{dw} \left[ (1-w^2) \frac{dP_\ell^m}{dw} \right] + \left[ \ell(\ell-1) - \frac{m^2}{1-w^2} \right] P_\ell^m = 0$$

**Bentuk solusi persamaan Anguler**

Persamaan anguler total

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Psi}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{d^2\Psi}{d\varphi^2} = -\ell(\ell+1)\Psi$$

Solusi persamaan di atas dinamakan Spherical Harmonics,  $\Psi_{\ell m}(\theta, \varphi)$

Fungsi-fungsi tersebut adalah orthonormal dengan paritas  $(-2)^\ell$

Tabel 6.1 Fungsi Spherical Harmonics,  $\Psi_{\ell m}(\theta, \varphi)$

| $\ell$ | M       | Fungsi anguler $\Psi_{\ell m}(\theta, \varphi)$                                      |
|--------|---------|--|
| 0      | 0       | $\Psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$   |
| 1      | 0       | $\Psi_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$                                      |
|        | $\pm 1$ | $\Psi_{1,\pm 1} = \pm \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\varphi}$             |
| 2      | 0       | $\Psi_{2,0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} [3\cos^2\theta - 1]$                 |
|        | $\pm 1$ | $\Psi_{2,\pm 1} = \pm \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{\pm i\varphi}$ |
|        | $\pm 2$ | $\Psi_{2,\pm 2} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{\pm i2\varphi}$ |
|        | 0       | $\Psi_{3,0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{4\pi}} [5\cos^3\theta - 3\cos\theta]$       |

|   |         |  |
|---|---------|--|
| 3 | $\pm 1$ | $\Psi_{3,\pm 1} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{21}{4\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\varphi}$ |
|   | $\pm 2$ | $\Psi_{3,\pm 2} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{105}{2\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm i2\varphi}$           |
|   | $\pm 3$ | $\Psi_{3,\pm 3} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{35}{4\pi}} \sin^3 \theta e^{\pm i3\varphi}$                    |

Spherical harmonics orthonormal, bagi tiap pasangan  $\Psi_{\ell,m}$  dan  $\Psi_{\ell',m'}$  berlaku hubungan:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \Psi_{\ell,m}^* \Psi_{\ell',m'} = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

Dengan  $\delta_{\ell,\ell'}$  dan  $\delta_{m,m'}$  simbol Kronecker yang bermakna:

$$\delta = 0, \text{ apabila } \ell \neq \ell' [m \neq m']$$

$$\delta = 1, \text{ apabila } \ell = \ell' [m = m']$$

#### 6.4 Pemecahan Persamaan Radial

Persamaan radial yang berkaitan dengan persamaan gelombang Schrodinger untuk atom hidrogen:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left( \frac{2m_0}{\hbar^2} \{E - V(r)\} - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right) R(r) = 0$$

Dengan fungsi potensial:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}; \text{ harga } \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Analisa tentang pemecahan persamaan radial diatas memberikan hasil sebagai di bawah ini

1. Ada solusi dapat dipergunakan ditetapkan suatu tetapan baru  $n$  ang bernilai:

$$n = (\ell + 1), (\ell + 2), (\ell + 3), \dots$$

2. Bentuk solusi persamaan radial termaksud diatas:

$$R_{n,\ell} \left( e \frac{Zr}{na_0} \left( \frac{Zr}{|a|} \right)^\ell G_{n,\ell} \left( \frac{Zr}{a_0} \right) \right)$$

Dengan  $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_0e^2}$ , sedagkan:

$G_{n,\ell} \left( \frac{Ze}{a_0} \right)$  adalah suatu polinom dalam  $\left( \frac{Zr}{n_0} \right)$  dengan harga  $n$  dan  $\ell$  yang berbeda.

3. Harga energi:

$$E_n = -\frac{m_0Z^2e^4}{(4\pi\epsilon_0)^22\hbar^2n^2}, n = 1,2,3,4, \dots \dots$$

Rumus energi:

$E_n$ , untuk sistem atom hidrogen yang diperoleh dengan menerapkan metode Schrodinger ternyata tetap sama.

Dengan hasil diperoleh dengan menggunakan postulat Bohr.

Rumus energi termaksud, sebagaimana juga rumus tingkat energi menurut Bohr, dapat menerapkan dengan jelas harga-harga panjang gelombang yang dipancarkan oleh atom-atom hidrogen. Oleh karena itu untuk kesesuaian antara pengamatan dan perhitungan berdasarkan teori sangat memperkuat keyakinan orang tentang kemampuan metode schrodinger dalam penelaahan sistem-sistem fisika tingkat atom dan sub atom.

Tabel 6.2 Persamaan Radial Untuk Sistem Atom Hidrogen

| N | $\ell$ | $R_{n\ell}; \rho \equiv \left( \frac{2Zr}{na_0} \right)$  |
|---|--------|---|
| 1 | 0      | $R_{10}(r) = 2 \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}}$                              |
| 2 | 0      | $R_{20}(r) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} (2 - \rho) e^{-\frac{\rho}{2}}$ |
|   | 1      | $R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \rho e^{-\frac{\rho}{2}}$       |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 3 | 0 | $R_{30}(r) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} (6 - 6\rho + \rho^2) e^{-\frac{\rho}{2}}$       |
|   | 1 | $R_{31}(r) = \frac{1}{4\sqrt{6}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \rho(4 - \rho) e^{-\frac{\rho}{2}}$             |
|   | 2 | $R_{32}(r) = \frac{1}{4\sqrt{30}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \rho^2 e^{-\frac{\rho}{2}}$                    |
| 4 | 0 | $R_{40}(r) = \frac{1}{96} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} (24 - 36\rho + 12\rho^2 + \rho^3) e^{-\frac{\rho}{2}}$ |
|   | 1 | $R_{41}(r) = \frac{1}{32\sqrt{15}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} (20 - 10\rho + \rho^2) e^{-\frac{\rho}{2}}$   |
|   | 2 | $R_{42}(r) = \frac{1}{96\sqrt{5}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} (6 - \rho)\rho^2 e^{-\frac{\rho}{2}}$          |
|   | 3 | $R_{43}(r) = \frac{1}{96\sqrt{15}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \rho^3 e^{-\frac{\rho}{2}}$                   |

Perlu diperhatikan beberapa hal dibawah ini dalam menggunakan tabel

1.  $\rho$  dibatasi sebagai  $\rho \equiv \left(\frac{2Zr}{na_0}\right)$ ; dalam tabel tersebut perlu diingat bahwa  $\rho$  dalam basis yang berbeda mungkin tidak sama karena harga  $n$  yang berlainan
2.  $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_0e^2} = 0,529^{\text{A}}$  adalah jejari baruBohr
3. Fungsi-fungsi normalisasi ,artinya:

$$\int_0^{\infty} [R_{n\ell}(r)]^2 r^2 dr = 1$$

### Normalisasi Persamaan Gelombang Schrodinger

Solusi persamaan gelombang Schrodinger untuk sistem atom hidrogen ditandai oleh 3 bilangan bulat  $n$ ,  $\ell$  dan  $m$ . Oleh karena itu ketiga

bilangan tersebut dicantumkan dalam notasi solusi persamaan Schrodinger sebagai:

$$\Psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi) = R_{n\ell}(r)\Psi_{n\ell m}(\theta, \varphi)$$

Fungsi gelombang tersebut dinormalisasikan sebagai:

$$\int_0^{\infty} r^2 dr [R_{n\ell}(r)]^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \Psi_{\ell m}^* \Psi_{\ell m} = 1$$

Karena elemen volumenya adalah:

$$d\tau = (dr)(r d\theta)(r \sin \theta d\varphi)$$

Dengan menormalisasikan  $R_{n\ell}(r)$ , dengan  $\int_0^{\infty} [R_{n\ell}(r)]^2 r^2 dr = 1$ , maka dapat dibatasi rapat kebolehdian radial sebagai berikut:

$$P_{n\ell} = [R_{\ell m}^* R_{\ell m} r^2]$$

Persamaan di atas adalah kebolehdian untuk menemukan suatu elektron atom hidrogen yang keadaannya dinyatakan dengan perangkat bilangan kuantum ( $n, \ell$ ), diantara  $r$  dan  $(r+dr)$  tanpa memperhatikan harga  $\theta$  dan harga  $\varphi$ .

### Tinjauan ulang pemecahan persamaan Schrodinger untuk sistem atom hidrogen

Persamaan gelombang Schrodinger untuk atom hidrogen

$$\hat{H} \psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi)$$

Dengan

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Ternyata mempunyai solusi yang berbentuk:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Psi(\theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Psi(\varphi)$$

Bentuk tersebut ternyata diperoleh melalui pemisahan variabel memberikan perangkat persamaan diferensial biasa yang saling berkaitan:

1. Persamaan Radial:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) + \left[ \frac{2m_0}{\hbar^2} \{E - V(r)\} - \frac{\lambda}{r^2} \right] R(r) = 0$$

2. Persamaan Anguler  $\Phi(\varphi)$

$$\frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} = -v\Phi$$

3. Persamaan Anguler  $\Theta(\theta)$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ \lambda - \frac{v}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0$$

Solusi anguler total  $\Psi(\theta, \varphi)$ , dikenal dengan nama *Spherical harmonics*. Ternyata bahwa 3 persamaan diferensial di atas, mempunyai solusi yang berguna bagi sistem atom hidrogen, apabila dipenuhi berbagai syarat mengenai  $\lambda$  dan  $v$ , sebagai berikut:

1. Persamaan untuk  $\Phi(\varphi)$  yang mempunyai keberkalaan  $2\pi$ , mempersyaratkan bahwa:  
 $v = m^2$ , dengan  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$
2. Persamaan  $\Theta(\theta)$ , dengan  $v = m^2$  mempersyaratkan bahwa:  
 $\lambda = \ell(\ell + 1)$ , dengan  $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$  dan bahwa:  $|m| \leq \ell$
3. Jadi fungsi Spherical harmonics  $\Psi(\theta, \varphi) = H(\theta)\Phi(\theta, \varphi)$  ditandai oleh dua tetapan  $\ell$  dan  $m$ , yang tertentu harganya sehingga perlu diberi indeks

$$\Psi_{\ell m}(\theta, \varphi) = H_{\ell}^m(\theta)\Phi_m(\varphi)$$

4. Persamaan radial memberikan solusi untuk  $R(r)$  yang berguna dalam penelaahan atom hidrogen apabila dipenuhi pula suatu persyaratan, yaitu adanya suatu bilangan  $n$  yang dapat berharga  $n = (\ell + 1), (\ell + 2), \dots$

Solusi persamaan radial itu ditandai oleh dua tetapan, yaitu  $n, \ell$

$$R_{n\ell}(r) = e^{-\frac{Zr}{na_0}} \left( \frac{Zr}{a_0} \right)^{\ell} G_{n,\ell} \left( \frac{Zr}{a_0} \right)$$

Dengan  $a_0$  radius Bhor, dan  $G_{n,\ell} \left( \frac{Zr}{a_0} \right)$  suatu polinon dalam  $\left( \frac{Zr}{a_0} \right)$  kecuali itu persamaan radial juga memberikan harga energi  $E$  dari sistem hidrogen, harga energi ini ditandai oleh bilangan tetap  $n$ :

$$E_n = -\frac{m_0 Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2 n^2}$$

5. Ternyata bahwa  $E_n$  di atas sama dengan apa yang diperoleh dengan menggunakan postulat-postulat Bhor.  $E_n$  memberikan kuantisasi energi total, ramalan tentang garis spektrum radiasi hidrogen berdasarkan rumus dalam d sesuai dengan kenyataan.
6. Pada akhirnya ada 3 buah bilangan yang member cirri pada solusi persamaan Shrodinger untuk sistem atom hidrogen, yaitu:  $n, \ell, m$   
Keterkaitan bilangan tersebut satu dengan lainnya:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \dots$$

$$|m| \leq \ell$$

$$\ell = 0, 1, 2, 3, \dots \dots$$

$$n = (\ell + 1), (\ell + 2), \dots \dots$$

Ketiga bilangan bulat itu dinamakan bilangan kuantum, yang secara khusus dibrikan nama sebagai berikut:

$n$  = bilangan kuantum utama

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \dots$$

$\ell$  = bilangan kuantum lintas edar, atau bilangan kuantum orbital, atau bilangan kuantum azimuth

$$\ell = 0, 1, 2, 3, \dots \dots (n - 1)$$

$m$  = bilangan kuantum magnetic

$$m = -\ell, -(\ell - 1), \dots \dots, -1, 0, +1, 2, \dots \dots, \ell$$

7. Setiap perangkat bilangan kuantum ( $n, \ell, m$ ) menggambarkan suatu keadaan khusus sistem atom hidrogen (keadaan kuantum). Setiap keadaan kuantum ditandai oleh perangkat ( $n, \ell, m$ ):

Tabel 6.3 Bilangan Kuantum Sistem Atom Hidrogen

|  |        |     |  |                     |
|--|--------|-----|--|---------------------|
| Bilangan kuantum yang menandai Quantum State |        |     | Jumlah perangkat bilangan kuantum yang berbeda |                     |
| $n$  | $\ell$ | $m$ | Dengan $n$ dan $\ell$ tertentu                 | Dengan $n$ tertentu |

|   |   |    |               |       |
|---|---|----|---------------|-------|
| 1 | 0 | 0  | 1             | 1     |
| 2 | 0 | 0  | 1             | 4     |
| 2 | 1 | -1 | 3             |       |
| 2 | 1 | 0  |               |       |
| 2 | 1 | +1 |               |       |
|   |   |    | $(2\ell + 1)$ | $n^2$ |

Seperti telah dinyatakan maka setiap keadaan kuantum sistem atom hidrogen ditandai oleh perangkat bilangan kuantum  $(n, \ell, m)$ . Ternyata bahwa untuk atom hidrogen energi total hanya bergantung dari bilangan kuantum utama  $n$ .

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} (eV)$$

Ini berarti bahwa keadaan kuantum yang berbeda, tetapi yang memiliki bilangan kuantum utama yang sama, memiliki energi total yang sama. Umpamanya, 4 keadaan kuantum yang dinyatakan dengan:  $(2,0,0)$ ,  $(2,1,1)$ ,  $(2,1,0)$ ,  $(2,1,-1)$ . Semuanya memiliki energi yang sama besar, yaitu:

$$E_2 = -\frac{13,6}{4} (eV) = -3,4 eV$$

Ini dinamakan degenerasi energi, ialah satu harga energi yang memiliki beberapa eigen function yang berbeda, contoh di atas  $E_2 = -3,4 eV$  dapat dipresentasikan dengan salah satu dari 4 eigen function;

$$\Psi_{2,0,0}(r, \theta, \varphi); \Psi_{2,1,0}(r, \theta, \varphi); \Psi_{2,1,1}(r, \theta, \varphi); \Psi_{2,1,-1}(r, \theta, \varphi);$$

Fungsi gelombang di atas dinamakan degenerasi eigen function, dengan degenerasi lipat empat.

8. Energi degenerasi ternyata karena kesetangkupan yang tinggi dalam fisika. Dalam kasus atom hidrogen, kesetangkupan bola. Kesetangkupan ini dapat dibuat lebih rendah, umpanya dengan menempatkan atom hidrogen tersebut dalam medan magnet luar.

Kehadiran medan magnet ini meniadakan kesetangkupan bola. Ternyata dalam hal seperti ini degenerasi terangkat, dan energi total ditentukan tidak hanya oleh  $n$ , tetapi juga  $m$ .

### Contoh Soal

1. Buktikan harga rata-rata  $1/r$  untuk elektron  $1s$  dalam atom hidrogen adalah  $1/a_0$ .

Jawab.

Fungsi gelombang elektron  $1s$  dari tabel adalah:

$$\psi = \frac{e^{-\frac{r}{a_0}}}{\sqrt{\pi a_0^3}}$$

Karena  $dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$  kita dapatkan harga ekspektasi  $1/r$  ialah:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r}\right) &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{r}\right) |\psi|^2 dV = \frac{1}{\pi a_0^3} \int_0^\infty r e^{-\frac{2r}{a_0}} dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ \int_0^\infty r e^{-\frac{2r}{a_0}} dr &= \frac{a_0^2}{4}, \quad \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2 \quad \text{dan} \quad \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \\ \left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{1}{\pi a_0^3} \times \frac{a_0^2}{4} \times 2 \times 2\pi = \frac{1}{a_0} \end{aligned}$$

2. a. Apakah nilai-nilai  $\ell$  yang mungkin bagi  $n = 6$
- b. Apakah nilai-nilai  $m\ell$  yang mungkin bagi  $\ell = 6$
- c. Apakah nilai  $\ell$  terkecil paling mungkin untuk mana  $\ell$  dapat sama dengan 4.
- d. Apakah nilai  $\ell$  terkecil paling mungkin yang dapat memiliki suatu komponen  $z$  sama dengan  $4\hbar$ .

Jawab.

- a. Nilai-nilai  $\ell$  yang mungkin bagi  $\ell = 6$

Nilai  $\ell$  terbatas oleh  $(n-1)$ , jadi nilai  $\ell$  yang mungkin bagi  $\ell = 6$  adalah:

$0, 1, 2, 3, 4, 5$ , atau  $\ell$  yang mungkin  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .

- b. Nilai bilangan kuantum magnetik  $m_\ell$  dibatasi oleh  $\pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \ell$ . Jadi nilai  $m_\ell$  yang mungkin untuk  $\ell = 6$ , yaitu  $\pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$  atau  $\{\pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\}$
- c. Nilai  $\ell$  terkecil paling mungkin untuk mana  $\ell = 4$  adalah  $-4$
- d. Karena  $\ell_z = m_\ell \hbar$ , maka  $4\hbar = m_\ell \hbar$ . jadi  $m_\ell = 4$

3. Hitunglah kedudukan  $r$  untuk mana rapat kebolehjadian  $P(r) = r^2 R_{n\ell}(r)$  berharga maksimum untuk keadaan sistem atom hidrogen  $n = 2$  dan  $\ell = 1$ .

Jawab.

$$\Psi_{n\ell m_\ell}(r, \theta, \varphi) = R_{n\ell}(r) \Theta_{\ell m_\ell}(\theta) \Phi_{m_\ell}(\varphi)$$

$P_{21}$  maksimum pada  $r$  yang memenuhi  $\frac{dP_{21}}{dr} = 0$  atau

$$\frac{1}{24a_0^5} \frac{d}{dr} \left( r^4 e^{-\frac{r}{a_0}} \right) = 0 \quad \text{atau karena } e^{-\frac{r}{a_0}} \neq 0, \text{ maka } r = 4a_0$$

### Latihan

- Hitunglah kedudukan  $r$  untuk rapat kebolehjadian  $P(r) = r^2 R_{n\ell}(r)$  berharga maksimum untuk keadaan sistem atom hidrogen  $n = 3$  dan  $\ell = 2$ .
  - Hitunglah harga ekspektasi ( $r$ ) untuk keadaan tersebut.
- Apakah nilai-nilai  $\ell$  yang mungkin bagi  $n = 7$
  - Apakah nilai-nilai  $m_\ell$  yang mungkin bagi  $\ell = 7$
  - Apakah nilai  $\ell$  terkecil paling mungkin yang dapat memiliki suatu komponen  $z$  sama dengan  $5\hbar$ .
- Tentukan ( $r$ ) untuk atom hidrogen  $n = 1$  dan  $\ell = 0$ .
  - Tentukan ( $r^2$ ) untuk atom hidrogen  $n = 1$  dan  $\ell = 0$ .



## DAFTAR PUSTAKA

- Cheng, T. 2013. *Einstein's Physics: Atoms, Quanta, and Relativity; Derived, Explained, and Appraised*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- Eisberg, R., & Resnick, R. 1985. *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Ficek, Z. 2016. *Quantum Physics for Beginner*. Baco Racon, FL: CRC Press.
- Hayen, E. 2020. *Quantum Physics for Beginner: The Easy Guide to Understand how Everything Works through the Behavior of Matter, the Law of Attraction and the Theory of Relativity*. United State: Publinvest LLC.
- Griffiths, D. J. 1995. *Introduction to Quantum Mechanics*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Krane, K. 2012. *Modern Physics, 3<sup>rd</sup> edition*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Serway, R. A., Moses, C. J., & Moyer, C. A. 2005. *Modern Physics, Third Edition*. Singapore: Thomson Learning.
- Siregar, R. 2010. *Fisika Kuantum*. Bandung: Widya Padjajaran.
- Sutopo, 2001. *Pengantar Fisika Kuantum*. Malang: FMIPA UM Malang.
- Tipler, P. A., & Llewellyn, R. A. 2008. *Modern Physics, Fifth Edition*. New York: W.H. Freeman and Company.

## Apendiks 1 Beberapa Konstanta

|   |              |                                    |
|---|--------------|------------------------------------|
| Angstrom<br>$^4\mu\text{m} = 0,1 \text{ nm}$                  | $\text{\AA}$ | $10^{-10} \text{ m} = 10^{-}$      |
| Energi Atom Hidrogen<br>$n = 1,2,\dots$                       | $E_n$        | $-13,6057 \text{ eV}/n^2,$         |
| Jari-jari Bohr  | $a_0$        | $5,292 \times 10^{-11} \text{ m}$  |
| konstanta Boltzmann<br>J/K                                    | $k_B$        | $1,3806 \times 10^{-23}$           |
| Konstanta Cahaya  | $c$          | $3 \times 10^8 \text{ m/s}$        |
| Konstanta Planck  | $h$          | $6,624 \times 10^{-34} \text{ Js}$ |
|   | $\hbar$      | $1,055 \times 10^{-34} \text{ Js}$ |
| Konstanta Stefan Boltzmann<br>$\text{W}/\text{m}^2\text{K}^4$ | $\sigma$     | $5,6703 \times 10^{-8}$            |
| Konstanta Wien  | $\lambda T$  | $2,8978 \times 10^{-3} \text{ mK}$ |

## Apendiks 2 Beberapa Integral

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx$$

$$2. \int \psi^*(x)\hat{A}\psi(x)dx = \int [\hat{A}\psi(x)]^* dx$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} H_m(z)H_n(z)dz = 2^n n! \pi^{1/2} \delta_{mn}$$

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(z)\psi_n(z)dz = \delta_{mn}$$

$$5. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \Psi_{\ell,m}^* \Psi_{\ell',m'} = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

$$6. \int_0^{\infty} [R_{n\ell}(r)]^2 r^2 dr = 1$$

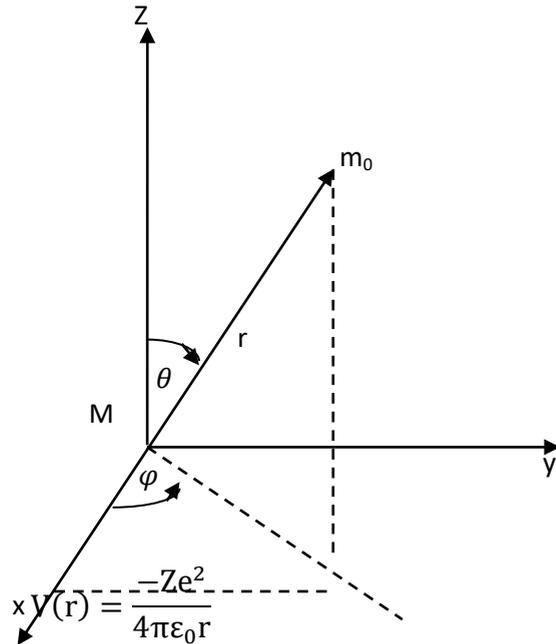
$$7. \int_0^{\infty} r^2 dr [R_{n\ell}(r)]^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \Psi_{\ell m}^* \Psi_{\ell m} = 1$$

$$8. \int_0^{\infty} r e^{-\frac{2r}{a_0}} dr = \frac{a_0^2}{4}$$

$$9. \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 2 \quad \text{dan} \quad \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

### Apendiks 3

#### Transformasi Koordinat Cartesien ke Koordinat Bola



Fungsi Hamilton (fungsi energi total) yang menggambarkan sistem atom hidrogen tersebut adalah :

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + V(r)$$

Operator Hamiltonnya :

$$H_{op} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + V(r) \quad (4-2)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Dalam koordinat bola operator Laplace tersebut berbentuk:

$$\nabla^2 = \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

Sehingga dalam koordinat bola, operator Hamilton:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Dengan demikian persamaan gelombang Schroedinger untuk model atom H yang sederhana,

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \psi(r, \theta, \varphi) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi)$$

Untuk notasi singkat akan digunakan  $\psi(\vec{r})$  untuk mempresentasikan  $\psi(r, \theta, \varphi)$

## Apendiks 4 Osilator Fisis

Setiap besaran fisis suatu partikel dikaitkan dengan operatornya; misalnya operator bagi energi total adalah  $\hat{H}$  seperti diperlihatkan dalam persamaan:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$$

Bagi suatu operator besaran fisis berlaku istilah matematik berikut:

1. Harga suatu besaran fisis adalah nilai eigen dari operatornya.
2. Setiap nilai eigen dari suatu operator berkaitan dengan suatu fungsi eigen ; nilai eigen adalah ril.

Persamaan harga eigen:

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$$

3. Secara umum harga rata-rata suatu besaran fisis pada fungsi keadaannya memenuhi persamaan

$$A_{av} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \psi(x) dx}$$

Bagi fungsi keadaan yang dinormalisasi

$$A_{av} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx$$

Andaikan:

$$\begin{aligned} \hat{A} \varphi_n(x) &= a_n \varphi_n(x) \\ \psi(x) &= \sum_n c_n \varphi_n(x) \end{aligned}$$

Jika  $\{\varphi_n\}$  adalah fungsi-fungsi yang ortonormal

$$\begin{aligned} A_{av} &= \int \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx = \sum_{mn} c_m^* c_n \int \varphi_m^*(x) \hat{A} \varphi_n(x) dx \\ &= \sum_{mn} c_m^* c_n a_n \int \varphi_m^*(x) \varphi_n(x) dz = \sum_{mn} c_m^* c_n a_n \delta_{mn} \\ &= \sum_n c_n^* c_n a_n \end{aligned}$$

Karena harga rata-rata suatu besaran fisis adalah ril maka berlaku

$$\int \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx = \int [\hat{A} \psi(x)]^* dx$$

Secara matematik, operator yang memenuhi persamaan di atas disebut operator hermitian.

## GLOSSARY

### Gerak Presesi (Larmor)

Dalam model yang dianut tidak ada pertautan antara  $\vec{L}$ ,  $\vec{S}$ , masing-masing terkuantisasi sendiri secara tidak berantungan satu dengan lainnya. Jadi dua medan induksi magnetik B, masing-masing terkuantisasi dalam ruang secara tersendiri, dan juga melakukan gerak presesinya masing-masing mengelilingi sumbu Z yang sama.

### Perturbasi Orde Kedua

Tujuan utama kita pada bagian ini adalah untuk menentukan pernyataan untuk  $W_2$  dan  $\psi_2$ .

### Perturbasi Orde Pertama

Operator Hamiltonian diberikan oleh  $H + \lambda H'$ , di mana  $0 < \lambda < 1$  adalah sebuah parameter, perturbasi “aktif” jika  $\lambda = 1$  dan perturbasi “non – aktif” jika  $\lambda = 0$ .

### Postulat de Broglie

Keseluruhan entitas fisis di alam semesta ini dapat di kelompokkan kea lam dua golongan besar,yaitu partikel dan gelombang. Kedua golongan entitas itu dapat dikenal secara mudah berdasarkan kehadirannya: partikel bersifat terlokalisir sedangkan gelombang bersifat menyebar.

### Radiasi Benda Hitam

Salah satu penyebab lahirnya fisika kuantum adalah ditemukannya beberapa gejala pada radiasi benda hitam pada akhir abad 19 yang tidak dapat dijelaskan dengan teori yang telah ada pada saat itu. Untuk mendapatkan teori yang cocok, ternyata ilmuwan harus merombak pemikirannya tentang konsep energi, khususnya energi radiasi. Keyakinan lama bahwa energi bersifat malar (kontinu) dirombak menjadi kenyataan baru yang menyatakan bahwa energi dapat bernilai diskret.

## **Radiasi Termal**

Radiasi yang dipancarkan oleh sebuah benda karena suhunya disebut radiasi termal. Semua benda memancarkan radiasi semacam ini ke sekelilingnya dan juga menyerap radiasi dari lingkungannya.

## **Spin Elektron**

Dalam kuliah fisika modern telah dipelajari tentang hasil dan makna percobaan Stern dan Gerlach tentang pengukuran momen dipol magnetik dari atom-atom perak. Dalam percobaan itu suatu berkas atom perak dilewatkan melalui suatu besaran medan  $\vec{\mathbf{B}}$  tak serba sama yang arahnya tegak lurus terhadap berkas.

## **Teori Perturbasi Bergantung Waktu**

Teori perturbasi bergantung waktu adalah perangkat analitik untuk mengkaji transisi sistem mekanika kuantum dari satu tingkat energi ke tingkat energi yang lain.

## TENTANG PENULIS



Dr. Nurlina, S.Si., M.Pd dilahirkan di Koppe (Bone) tanggal 23 juli 1982 dari pasangan H. Usman dan Hj. Tondeng. Menikah dengan Nasrul, S.Pd dan dikarunia 2 orang anak yaitu Muh. Rangga Saputra dan Kayla Azzahra. Pendidikan formal dimulai dari Sekolah Dasar (SD) Negeri No. 143 Lilirawang Kec. Lappariaja Kab.Bone pada tahun 1987 dan lulus tahun 1994, pada tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan ke Sekolah Menengah Pertama (SMP) Negeri 2 Lappariaja kec. Lappariaja Kab. Bone dan lulus pada tahun 1996, tahun 1997 penulis melanjutkan pendidikan ke Sekolah Menengah Umum (SMU) Negeri 1 Lappariaja Kab. Bone dan lulus pada tahun 2000. Gelar Sarjana Fisika (S1) tahun 2004 dan Magister Pendidikan Fisika (S2) tahun 2009 diperoleh dari Universitas Negeri Makassar (UNM). Gelar Doktor tahun 2018 diperoleh dari Universitas Negeri Makassar. Tahun 2007 sampai sekarang mempunyai profesi sebagai dosen tetap yayasan di Universitas Muhammadiyah Makassar pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Program Studi Pendidikan Fisika. Selain itu, diberikan amanah menjalankan tugas tambahan sebagai: (1) Sekretaris Prodi Pendidikan Fisika FKIP Unismuh Makassar (2007-2013), (2) Ketua Prodi Pendidikan Fisika FKIP Unismuh Makassar (2013 sampai sekarang). Di samping tugas sebagai dosen, tugas lainnya yang pernah dijalani adalah menjadi MTT dan MAT DBE USAID (2008-2012) serta sebagai assessor PLPG di Universitas Muhammadiyah Makassar (2014-2017).

Karya akademik yang telah dihasilkan adalah (1) peneliti dibidang Pendidikan Fisika dengan pendanaan Hibah Internal Unismuh Makassar, (2) membawakan makalah di Seminar Internastional ISQAE 2016 dan Seminar International Unismuh Makassar 2014, (3) membawakan makalah di Seminar Nasional SFN Universitas Udayana dan Univeritas Muhammadiyah Yogyakarta, (4) menulis Buku Fisika Dasar, Fisika Kuantum, Alat Ukur dan Pengukuran, Pedoman Asesmen Praktikum Fisika Dasar dan Teknik Pembuatan Alat Ukur Kesuburan Tanah Berbasis Energi Listrik yang diterbitkan Lembaga Perpustakaan dan Penerbitan Universitas Muhammadiyah Makassar, (5) memperoleh HAKI untuk buku Fisika Dasar I dan Fisika Kuantum tahun 2018.



Hartono Bancong, S.Pd., M.Pd., Ph.D. Lahir di Tontonan, Kec. Anggeraja, Kab. Enrekang, pada tanggal 27 Agustus 1988, dari pasangan Bancong dan Judia. Penulis menempuh Pendidikan formal di mulai dari SDN 104 Tontonan, melanjutkan ke MTs. Negeri Baraka dan MA Negeri Baraka, Kab. Enrekang. Pada tahun 2007, penulis menempuh Pendidikan S1 Jurusan Pendidikan Fisika di Universitas Negeri Makassar dan selesai dalam rentang waktu 3 tahun dan 5 bulan. Pada tahun yang sama, 2011, penulis mendapatkan Beasiswa Unggulan (BU) Calon Dosen Indonesia dan melanjutkan Pendidikan S2 pada Jurusan Pendidikan Fisika di Pascasarjana Universitas Negeri Makassar dan selesai pada tahun 2013. Setelah itu, penulis menjadi dosen tetap di Universitas Muhammadiyah Makassar sampai saat ini. Pada tahun 2016, Penulis melanjutkan Pendidikan S3 pada Jurusan Pendidikan Fisika di Seoul National University, Korea Selatan dengan Beasiswa Unggulan Dosen Indonesia (BUDI) Luar Negeri dan selesai pada Desember 2019. Saat ini, penulis kembali aktif mengajar di Universitas Muhammadiyah Makassar. Selain mengajar, penulis juga aktif dalam melakukan penelitian dan menjadi reviewer pada beberapa jurnal internasional bereputasi tinggi, seperti Science and Education, dan Cultural Studies of Science Education.

Penerbit:  
Lembaga Perpustakaan dan Penerbitan  
Universitas Muhammadiyah Makassar  
2020

ISBN 978-623-7349-37-2

