PENGANTAR *Dasar* MATEMATIKA

Secara umum buku ini dapat digunakan sebagai referensi bagi dosen, maupun mahasiswa. Secara khusus, buku ini juga dapat membantu mahasiswa S1 Matematika dan Pendidikan Matematika, untuk lebih memahamami konsep-konsep dalam mata kuliah Pengantar Dasar Matematika. Buku ini terdiri dari dua bagian utama, yaitu Logika dan Himpunan. Di bagian tengah diberikan materi strategi pembuktian untuk memberikan bekal kepada mahasiswa dalam menyelesaikan bukti-bukti yang diminta pada bagian Himpunan. Pada akhir setiap bab diberikan latihan untuk mengevaluasi tingkat penguasaan mahasiswa terhadap materi bab tersebut.

Penerbit Haura Utama
Anggota IKAPI Jawa Barat
Instagram: @haurautama
Website: penerbithaura.com
Email: haurautama@gmail.com

REFERENSI
ISBN 978-623-492-407-7
9 786234 924077

Nasrun Syahrir, M.Pd., dkk.

PENGANTAR *Dasar* MATEMATIKA

PENGANTAR *Dasar* MATEMATIKA

Nasrun Syahrir
Andi Kaharuddin
Muhammad Muzaini

PENGANTAR *Dasar* MATEMATIKA

Nasrun Syahrir,
Andi Kaharuddin,
Muhammad Muzaini,

Editor: Sirajuddin

Haura Utama

Pengantar Dasar Matematika,
Penulis: Nasrun Syahrir,
Andi Kaharuddin,
Muhammad Muzaini,
diterbitkan pertama kali oleh Penerbit Haura Utama, 2023

15.5 x 23 cm, vi + 106 hlm

Editor: Sirajuddin
Penata isi: Zulfa
Perancang sampul: Nita

CV. Haura Utama
Anggota IKAPI Nomor 375/JBA/2020
Nagrak, Benteng, Warudoyong, Sukabumi
+62877-8193-0045 hauraautama@gmail.com

Cetakan I, April 2023

ISBN: 978-623-492-407-7

penerbithaura.com

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, berkat rahmat Allah Tuhan Yang Maha Kuasa, buku ini dapat diselesaikan. Secara umum buku ini dapat digunakan sebagai referansi bagi dosen, maupun mahasiswa. Secara khusus, buku ini juga dapat membantu mahasiswa S1 Matematika dan Pendidikan Matematika, untuk lebih memahamami konsep-konsep dalam mata kuliah Pengantar Dasar Matematika. Buku ini terdiri dari dua bagian utama, yaitu Logika dan Himpunan. Di bagian tengah diberikan materi strategi pembuktian untuk memberikan bekal kepada mahasiswa dalam menyelesaikan bukti-bukti yang diminta pada bagian Himpunan. Pada akhir setiap bab diberikan latihan untuk mengevaluasi tingkat penguasaan mahasiswa terhadap materi bab tersebut.

Buku ini tentu saja masih banyak kelemahan baik dari segi isi maupun penyajian. Oleh sebab itu, kritik dan saran selalu kami nanti untuk perbaikan dan pengembangan buku ini.

Makassar, Februari 2023

Penulis

BAB I
PENALARAN DALAM MATEMATIKA

1.1. Logika Matematika

a. Pengertian Logika Matematika

Secara etimologis, istilah "logika" berasal dari bahasa Yunani, "logos", yang berarti kata, ucapan, pikiran, atau bisa juga mengandung arti ilmu pengetahuan. Dalam arti luas, logika merupakan suatu metode dan prinsip-prinsip yang dapat memisahkan secara tegas antara penalaran yang benar dengan penalaran yang salah. Pengajaran logika terbilang sudah sangat 'tua', sejak ribuan tahun yang lalu. Tokoh yang dikenal sebagai pelopor logika adalah Aristoteles (348 – 322 SM).

Dalam mempelajari logika, kita tak bisa lepas dari penalaran, yang diartikan sebagai penarikan kesimpulan dalam sebuah argumen. Banyak sering pula yang mengartikan penalaran sebagai cara berpikir, sebagai suatu penjelasan dalam menunjukkan hubungan antara dua hal atau lebih berdasarkan sifat-sifat tertentu yang sudah diakui kebenarannya dengan menggunakan cara-cara tertentu hingga mencapai suatu kesimpulan yang tepat.

Selama kita hidup, banyak permasalahan keseharian yang harus dihadapi. Kita dituntut untuk senantiasa menggunakan akal pikiran dalam melakukan setiap kegiatan yang penuh pemikiran dan pertimbangan. Kita harus memiliki pola pikir yang tepat, akurat, rasional, dan objektif. Pola berpikir seperti ini adalah pola berpikir yang terdapat dalam logika.

Logika adalah suatu pertimbangan pikiran manusia yang diungkapkan melalui perkataan dan dinyatakan dalam bahasa. Atau arti logika yaitu cara orang berbahasa dalam mencerminkan jalan fikirannya. Jika secara etimologi logika diartikan sebagai ilmu yang mempelajari jalan pikiran seseorang yang dinyatakannya dalam berbahasa.Setiap orang tentu selalu berfikir untuk menyimpulkan sesuatu secara ilmiah ataupun menyakinkan orang lain. Jadi setiap pernyataan harus dibuktikan, sehingga dalam logika terdapat pemikiran yang mampu membuktikan suatu pernyataan atau ucapan yang dikeluarkan. Logika juga termasuk cabang dari filsafat yang membahas mengenai kesimpulan dan proses pemikiran untuk mendapatkan suatu kebenaran.

Logika berguna untuk melakukan penyelidikan atau menganalisa, merumuskan dan menerapkan peraturan yang harus di tepati, sehingga logika bukan merupakan teori tapi merupakan suatu keterampilan untuk menerapkan peraturan tentang pemikiran dalam praktek atau tindakan. Ilmu logika diartikan juga sebagai ilmu yang mempelajari cara berfikir lurus, tepat dan juga teratur.

Logika Matematika atau Logika Simbol ialah logika yang menggunakan bahasa Matematika, yaitu dengan menggunakan lambang-lambang atau simbol- simbol. Keuntungan atau kekuatan bahasa simbol adalah ringkas, univalent/bermakna tunggal, dan universal/dapat dipakai dimana-mana.

Kelebihan lain dalam mempelajari logika adalah dapat bisa memperoleh nilai-nilai bersifat praktis. Dengan menguasai prinsip-prinsipnya, kita akan sangat tertolong untuk menjadi lebih efektif dalam mengenal dan menghindari kesalahan bernalar yang dilakukan oleh orang lain, maupun yang dilakukan oleh diri kita sendiri.

b. Pengertian Pernyataan

Pernyataan harus dibedakan dari kalimat biasa. Tidak semua kalimat termasuk ke dalam pernyataan. Pernyataan diartikan sebagai kalimat matematika tertutup yang benar saja, atau salah saja, tetapi tidak kedua-duanya dalam waktu yang bersamaan. Biasanya pernyataan dinotasikan dengan huruf kecil, seperti: p, q, r, s, dan sebagainya.

Contoh :

Di bawah ini adalah contoh-contoh **pernyataan**:
p : Semua sapi adalah hewan menyusui.
q : 3 + 2 = 6.
r : Semua makhluk hidup pasti akan mengalami kematian.
s : Bilangan ganjil adalah bilangan yang tidak habis dibagi dua.

Contoh :

Di bawah ini adalah contoh-contoh yang **bukan pernyataan**:

1. Kapan kamu menikah?
2. Makan, yuk!
3. $2x + 3 = 10$.
4. $25y - 3 = 17$, dengan y adalah bilangan real.

c. Nilai Kebenaran

Kebenaran atau kesalahan sebuah pernyataan disebut ***Nilai Kebenaran*** dari pernyataan tersebut. Nilai kebenaran suatu pernyataan p ditulis **τ (p)**. Jika benar, maka nilai kebenarannya B, dan jika salah nilai kebenarannya S.

Contoh :

p : 3 + 2 = 6 maka τ (p) = S.
p : $2x - 4 = 6$, untuk $x = 5$ maka τ (p) = B.

1.2. Operasi Uner

Dalam logika matematika terdapat dua jenis operasi, yaitu operasi *uner* dan *biner*. Operasi uner berarti hanya melibatkan satu unsur, yang dalam hal ini unsur tersebut berupa pernyataan. Yang termasuk operasi uner ini adalah operasi *negasi*, atau *penyangkalan*.

a. Negasi

Negasi biasanya dilambangkan dengan " ~ ". Nilai kebenaran negasi dari sebuah pernyataan adalah kebalikan dari nilai kebenaran pernyataan itu. Jadi, jika nilai kebenaran suatu pernyataan adalah B, maka nilai kebenaran negasinya adalah S, begitu pun sebaliknya.

Definisi:

Jika P pernyataan bernilai benar maka negasi P pernyataan yang bernilai salah dan sebaliknya, jika P bernilai salah maka negasi P pernyataan yang bernilai benar.

ketentuan tentang nilai kebenaran dari ingkaran, disajikan dalam tabel berikut:

P	~ p
B	S
S	B

Contoh :

1. p : $23 + 51 = 100$
   maka ~ p : $23 + 51 \neq 100$, atau
   ~ p : Tidak benar bahwa $23 + 51 = 100$.
   τ (p) = S dan τ (~ p) = B

2. Jika P : " 12321 habis dibagi 3"
   maka: ~ p : " 12321 tidak habis dibagi 3"

3. Jika p : Semua burung pandai terbang
   maka ~ p : Tidak benar semua burung pandai terbang
   atau ~ p : Beberapa burung tidak pandai terbang.

4. Jika p : $2 + 5 > 7$
   maka ~ p : $2 + 5 > 7$
   atau ~ p : $2 + 5 \leq 7$

1.3. Operasi Biner

Operasi biner adalah operasi yang melibatkan dua unsur. Contoh operasi biner yang sering kita jumpai dalam matematika adalah: penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, perpangkatan, dan sebagainya. Khusus dalam logika, terdapat empat macam operasi biner, antara lain: ***konjungsi***, ***disjungsi***, ***implikasi***, dan ***biimplikasi***. Keempat operasi biner ini akan segera kita pelajari, namun sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu mengenai pernyataan majemuk.

1.4. Pernyataan Majemuk

Pernyataan tunggal yang digabung disebut pernyataan majemuk. Perhatikan contoh sederhana berikut!

Dika adalah pria yang kaya.

Dika adalah pria yang tampan.

Kedua pernyataan tunggal di atas dapat digabungkan sehingga membentuk suatu pernyataan majemuk dengan menggunakan kata penghubung "dan". Pernyataan majemuk yang dimaksud adalah

Dika adalah pria yang kaya dan tampan.

Pernyataan majemuk yang merupakan gabungan dari dua pernyataan tunggal. Kata penghubungnya adalah: "dan", "atau", "jika..... maka.....", serta ".....jika dan hanya jika....."

a. Operasi Konjungsi

Salah satu cara untuk menggabungkan pernyataan tunggal sehingga menjadi pernyataan majemuk adalah dengan menggunakan kata "dan"., yang dikenal dengan nama operasi *konjungsi*. Perhatikan kembali kalimat majemuk yang telah dibuat sebelumnya dengan menggunakan kata penghubung "dan", yaitu

Aufa adalah pria yang kaya ***dan*** *tampan.*
Pernyataan pertama : *Aufa adalah pria yang kaya.*
Pernyataan kedua : *Aufa adalah pria yang tampan.*

Pernyataan majemuk dengan kata penghubung "***dan***" hanya bernilai *benar* jika baik pernyataan pertama maupun pernyataan kedua sekaligus *benar*. Dalam keadaan lain adalah salah, yaitu jika salah satu atau kedua-duanya dari pernyataan tunggal adalah *salah,* pernyataan majemuk adalah *salah.* Kata penghubung "dan" pada pernyataan majemuk dilambangkan dengan "$\wedge$",

Definisi

Misalkan p dan q adalah pernyataan. Pernyataan majemuk ***p dan q*** disebut konjungsi dari p dan q dan dilambangkan dengan $p \wedge q$ Pernyataan p dan q masing-masing disebut konjung-konjung. Konjungsi bernilai benar jika keduannya p dan q adalah benar, dan dalam keadaan lain adalah salah. Kita sarikan definisi konjungsi dengan tabel kebenaran berikut.

P	q	p ∧ q
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Contoh :

Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk $p \wedge q$ berikut ini!

a. p : 100 + 500 = 800
   q : 4 adalah faktor dari 12

b. p : Pulau Bali dikenal sebagai pulau Dewata
   q : 625 adalah bilangan kuadrat

Jawaban:

a. p salah, q benar

   $p \wedge q$: 100 + 500 = 800 dan 4 adalah faktor dari 12 (Salah)

   Atau bisa juga ditulis:

   $\tau(p) = S$, $\tau(q) = B$.

   Jadi, $\tau(p \wedge q) = S$.

b. $\tau(p) = B$, $\tau(q) = B$.

   $p \wedge q$: Pulau Bali dikenal sebagai pulau Dewata dan 625 adalah bilangan kuadrat (benar).

   Jadi, $\tau(p \wedge q) = B$.

b. Operasi Konjungsi

Suatu pernyataan majemuk yang terdiri dari dua pernyataan tunggal yang dihubungkan dengan menggunakan kata "atau" dinamakan pernyataan *disjungsi*. Kedua buah pernyataan pembentuk disjungsi ini disebut sebagai disjung-disjung. Kata penghubung "atau" dalam keseharian dapat memiliki arti ganda. Misalnya seorang berkata, "Pada pukul 10 malam nanti, saya akan menonton pertandingan sepakbola *world cup* atau tidur", tetapi tidak mungkin keduanya. Pernyataan majemuk seperti ini disebut *disjungsi eksklusif*.

Sekarang, perhatikan *disjungsi* majemuk berikut:

Orang yang boleh memilih dalam pemilu adalah WNI yang berumur di atas 17 tahun atau sudah menikah.

Pernyataan ini dapat diartikan, orang yang boleh memilih dalam pemilu tidak hanya yang berumur di atas 17 tahun dan sudah menikah. Disjungsi seperti ini disebut *disjungsi inklusif*. Dalam matematika dan sains, "atau" diartikan sebagai *disjungsi inklusif*, kecuali jika disebut lain.

Disjungsi pernyataan p dan q adalah pernyataan majemuk ***p atau q***, ditulis $\boldsymbol{p \vee q}$. Disjungsi didefinisikan sebagai berikut :

Misalkan p dan q adalah pernyataan. Pernyataan majemuk ***p atau q*** disebut disjungsi dari p dan q dan dilambangkan dengan $\boldsymbol{p \vee q}$. Disjungsi $p \vee q$ bernilai benar jika salah satu p atau q, atau keduanya adalah benar, disjungsi bernilai salah jika dan hanya jika keduanya p dan q adalah salah. Kita sarikan definisi konjungsi dengan tabel kebenaran berikut.

P	q	p ∨ q
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Contoh :

Tentukanlah nilai kebenaran untuk disjungsi dua pernyataan yang diberikan !

a. p : 3 + 4 = 12
   q : Dua meter sama dengan 200 cm
b. p : 29 adalah bilangan prima
   q : Bandung adalah ibu kota Provinsi Jawa Barat
c. p : Dua garis yang sejajar mempunyai titik potong
   q : $\sqrt{23}$ adalah bilangan cacah.

Jawaban:

a. τ (p) = S, τ (q) = B. Jadi, τ (p $\vee$ q) = B.
   p $\vee$ q : 3+4 =12 atau dua meter sama dengan 200 cm (**benar**).
b. τ (p) = B, τ (q) = B. Jadi, τ (p $\vee$ q) = B.
   p $\vee$ q : 29 adalah bilangan prima atau Bandung adalah ibukota Provinsi Jawa barat (**benar**).
c. τ (p) = S, τ (q) = S. Jadi, τ (p $\vee$ q) = S.

c. Operasi Impilikasi

Dua pernyataan tunggal p dan q dapat di komposisi dengan menggunakan kata hubung "Jika …. Maka …. " untuk membentuk pernyataan majemuk yang di sebut Implikasi atau pernyataan bersyarat. Implikasi :" **Jika p maka q** " dilambangkan dengan "**p $\Rightarrow$ q "** (dibaca Jika p maka q)

Implikasi **p $\Rightarrow$ q** dapat juga dibaca sebagai :

(i) p hanya jika q
(ii) q jika p
(iii) p syarat cukup bagi q
(iv) q syarat perlu bagi p

Dalam implikasi **p $\Rightarrow$ q** , pernyataan **p** disebut **alasan** atau **sebab (antecedent)** , dan pernyataan **q** sering disebut **kesimpulan** atau **akibat (Consequent)**

Nilai kebenaran suatu Implikasi di tentukan oleh pernyataan pernyataan penyusunnya.

Jika pernyataan p bernilai benar dan pernyataan q bernilai salah maka **p $\Rightarrow$ q** bernilai salah , jika tidak demikian maka **p $\Rightarrow$ q** bernilai benar.

Ketentuan tersebut dapat dinyatakan dalam tabel kebenaran sebagai berikut:

p	Q	p $\Rightarrow$ q
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Contoh :

Tentukanlah nilai kebenaran dari implikasi berikut !

a. Jika 4 + 7 = 10 maka besi adalah benda padat.
b. Jika 6 + 9 = 15 maka besi adalah benda cair.
c. Jika cos 30° = 0,5 maka 25 adalah bilangan ganjil.

Jawab :

a. Jika 4 + 7 = 10 maka besi adalah benda padat.
   Alasan *salah*, kesimpulan *benar*. Jadi, implikasi bernilai **benar.**
b. Jika 6 + 9 = 15 maka besi adalah benda cair.
   Alasan *benar*, kesimpulan *salah*. Jadi implikasi bernilai **salah**.
c. Jika cos 30°= 0,5 maka 25 adalah bilangan ganjil.
   Alasan *salah*, kesimpulan *salah*. Jadi, implikasi bernilai **benar.**

d. Operasi Biimpilikasi

Perhatikanlah pernyataan berikut:

Jika sore ini hujan, maka jalan raya basah.

Jika jalan raya basah, apakah selalu disebabkan oleh hujan? Tentu saja tidak selalu begitu, karena jalan raya basah bisa saja disebabkan disiram, banjir, ataupun hal lainnya. Pernyataan seperti ini telah kita ketahui sebagai sebuah implikasi.

Sekarang, perhatikan pernyataan berikut:

Jika orang masih hidup maka dia masih bernafas.

Jika seseorang masih bernafas, apakah bisa dipastikan orang tersebut masih hidup? Ya, karena jika dia sudah tidak bernafas, pasti orang tersebut sudah meninggal. Pernyataan yang demikian disenut *biimplikasi* atau *bikondisional* atau *bersyarat ganda*.

Pernyataan biimplikasi dilambangkan dengan " $\Leftrightarrow$ " yang berarti "jika dan hanya jika" disingkat "jhj" atau "jika". Biimplikasi "p $\Leftrightarrow$ q" *ekuivalen* dengan "jika p maka q **dan** jika q maka p", dinotasikan sebagai: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Adapun definisi tentang biimplikasi adalah sebagai berikut.

Definisi:

Misalkan p dan q adalah pernyataan. Suatu biimplikasi adalah suatu pernyataan majemuk dengan bentuk ***p jika dan hanya jika q*** dilambangkan dengan $\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$. Biimplikasi p dan q bernilai benar jika keduanya p dan q adalah benar atau jika keduannya p dan q adalah salah; untuk kasus lainnya biimplikasi adalah salah.

Ekuivalensi **p $\Leftrightarrow$ q** dapat juga dibaca :
(i) jika p maka q dan jika q maka p
(ii) p syarat perlu dan cukup bagi q
(iii) q syarat perlu dan cukup bagi p

Ketentuan tentang nilai kebenaran suatu **Biimplikasi** , disajikan dalam tabel berikut :

p	**q**	**p $\Leftrightarrow$ q**
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh :

Tentukan nilai kebenaran biimplikasi di bawah ini!

a. $\underbrace{20 + 7 = 27}_{B}$ **jika dan hanya jika** 27 $\underbrace{\text{bukan bilangan prima.}}_{B}$

$\tau(p) = B$, $\tau(q) = B$. Jadi, $\tau(p \Leftrightarrow q) = B$.

b. $2 + 5 = 7$ **jika dan hanya jika** 7 adalah bilangan genap.

$\tau(p) = B$, $\tau(q) = S$. Jadi, $\tau(p \Leftrightarrow q) = S$.

c. $\tan^2 45° + \cos^2 45° = 2$ **jika dan hanya jika** $\tan^2 45° = 2$

$\tau(p) = S$, $\tau(q) = S$. Jadi, $\tau(p \Leftrightarrow q) = B$.

1.5. Tautologi dan Kontradiksi

Di antara berbagai pernyataan majemuk, ada yang disebut sebagai *tautologi* dan ada pula *kontradiksi. Tautologi* merupakan pernyataan yang semua nilai kebenarannya *Benar* (B), tanpa memandang nilai kebenaran komponen-komponennya. Sedangkan yang dimaksud dengan *kontradiksi* adalah pernyataan yang semua nilai kebenarannya *Salah* (S), tanpa memandang nilai kebenaran. Jika pada semua nilai kebenaran menghasilkan nilai benar (B) dan salah (S), maka disebut formula campuran (*contingent).*

Contoh :

1. Tunjukkan bahwa **$p \vee (\sim p)$** adalah ***tautologi!***

P	~p	$p \vee (\sim p)$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	B

2. Tunjukkan bahwa **$(p \vee q) \vee [(\sim p) \wedge (\sim q)]$** adalah ***tautologi!***

P	Q	~p	~q	$p \vee q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \vee q) \vee [(\sim p) \wedge (\sim q)]$
B	B	S	S	B	S	B
B	S	S	B	B	S	B
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	B	S	B	B

3. Tunjukkan bahwa **$(p \vee q) \wedge [(\sim p) \wedge (\sim q)]$** adalah ***kontradiksi!***

P	q	~p	~q	$p \vee q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \vee q) \wedge [(\sim p) \wedge (\sim q)]$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	B	S	S
S	B	B	S	B	S	S
S	S	B	B	S	B	S

4. Tunjukkan bahwa **$[(p\wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow p$** adalah ***contingent!***

P	q	r	$p\wedge q$	$(p\wedge q) \Rightarrow r$	$[(p\wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow p$
B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	B	B
B	S	B	S	S	B
B	S	S	S	S	B
S	B	B	S	B	S
S	B	S	S	B	S
S	S	B	S	B	S
S	S	S	S	B	S

1.6. Aturan Penarikan Kesimpulan

Suatu argumen yang terdiri dari beberapa pernyataan tunggal, jika pembuktiannya dikerjakan dengan tabel kebenaran, maka prosesnya mungkin akan sangat panjang dan membosankan. Untuk itu, pada bagian ini kita akan membahas mengenai cara singkat, langsung, dan tepat yang dapat kita gunakan, yaitu dengan "menurunkan" konklusi argumennya. Maksudnya adalah menurunkan konklusi dari premis-premisnya dengan menggunakan rangkaian argumen dasar yang sudah diketahui valid.

1. Modus Ponen

Berikut adalah suatu ilustrasi mengenai penalaran kondisional.

Jika saya lapar, maka saya makan.
Ternyata saya lapar.
Jadi, saya makan.

Penalaran kondisional menjelaskan hubungan antara dua buah kondisi, dalam ilustrasi di atas adalah kondisi lapar dan makan. Hubungan tersebut dapat dinyatakan sebagai:

$P \Rightarrow q$ premis
P premis

$\therefore$ q Konklusi

sah tidaknya suatu argmntasi ,dapat dikaji menggunakan tabel kebenaran sebagai berikut

P	**q**	**$p \Rightarrow q$**	**$(P \Rightarrow q) \wedge p$**	**$[(P \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$**
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Suatu argumentasi dianggap sah atau valid jika argumen tersebut benar untuk setiap kemungkinan premisnya atau merupakan **tautologi** untuk semua nilai kebenaran premis-premisnya.
Dari tabel dapat kita lihat bahwa pada kolom 5 bernilai benar untuk setiap nilai kebenaran premisnya.

2. Modus Tollen

Dengan konteks yang sama, sekarang kita lihat bahwa suatu pernyataan kondisional atau pernyataan implikasi yang benar dengan konsekuen yang salah harus mempunyai anteseden yang salah. Argumen ini dinamakan ***Modus Tollen***, dengan bentuk:

$P \Rightarrow q$ premis
$\sim q$ premis

$\therefore \sim p$ Konklusi

Dengan menggunakan tabel dapat dibuktikan bahwa :
Bentuk :

$[(P \Rightarrow q) \wedge \sim q\ ] \Rightarrow \sim p$ merukakan Tautologi

3. Silogisme Hipotetik

Beranjak pada argumen lain yang disebut sebagai ***Silogisme Hipotetik*** dengan bentuk sebagai berikut:

$$p \Rightarrow q$$
$$q \Rightarrow r$$
$$\therefore p \Rightarrow r$$

4. Silogisme Disjungtif

Argumen berbentuk ***Silogisme Disjungtif*** ini mengandung pernyataan yang berupa disjungsi, misalnya:

Saya berada di Bandung atau di Garut.
Saya tidak berada di Bandung.
Jadi, saya berada di Garut.
Jika kita buat simbolnya, maka dapat kita tulis:

$$A \vee B$$
$$\sim A$$
$$\therefore B$$

Jika $A \vee B$ *benar* dan ternyata A *salah*, maka dengan sendirinya B *benar*, sesuai dengan aturan yang berlaku untuk operasi disjungsi.

5. Addisi

Addisi merupakan prinsip penarikan kesimpulan yang sangat ringkas. Aturan ini hanya memuat satu buah premis tunggal. Dalam addisi kita dapat menggabungkan suatu pernyataan dengan pernyataan lain menggunakan disjungsi. Secara simbolik, addisi dinyatakan dengan:

$$A$$
$$\therefore A \vee B$$

6. Simplifikasi

Salah satu cara untuk melakukan penarikan kesimpulan adalah dengan menambah beberapa bentuk valid sederhana yang lain untuk membantu pemeriksaan bukti formal suatu argumen. Perhatikan contoh berikut ini:

Jika Avilla datang, Firsya pun ikut.
Avilla dan Syahda datang.
***Jadi**, Firsya pun ikut datang.*
Secara simbolik, argumen di atas ditulis:
1. $P \Rightarrow Q$ Premis
2. $P \wedge R$ Premis / $\therefore Q$

Bentuk umum simbol simplifikasi adalah sebagai berikut:

$$A \wedge B$$
$$\therefore A$$

1.7. Aturan Penukaran (*Rule of Replacement*)

Aturan-aturan baru yang menunjang aturan penarikan kesimpulan yang akan kita diskusikan pada bagian ini, yaitu aturan penukaran. Dengan dasar ekuivalensi, kita tahu bahwa dua pernyataan disebut ekuivalen jika memiliki nilai kebenaran yang sama. Dengan demikian, jika sebagian atau keseluruhan dari pernyataan majemuk ditukar dengan pernyataan lain yang *ekuivalen logis*, maka nilai kebenaran pernyataan majemuk yang baru adalah sama dengan nilai kebenaran pernyataan majemuk semula.

Aturan-aturan yang terdapat dalam aturan penukaran antara lain:

1. **Teorema de Morgan**
$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

2. **Komutasi**
$p \vee q \equiv q \vee p$

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

3. **Assosiasi**
$[(p \vee q) \vee r)] \equiv [p \vee (q \vee r)]$

$[(p \wedge q) \wedge r)] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$

4. **Distribusi**
$[(p \vee q) \wedge r)] \equiv [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$

$[(p \wedge q) \vee r)] \equiv [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$

5. **Negasi Rangkap**
$p \equiv \sim (\sim p)$

6. **Transposisi**
$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim \mathrm{p})$

7. **Implikasi Material**
$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

8. **Ekuivalensi Material**
$(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

$(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$

9. Eksportasi

$[(p \wedge q) \Rightarrow r)] \equiv [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$

10. Tautologi

$p \equiv (p \wedge p)$

$p \equiv (p \vee p)$

Contoh :

1. Kita tunjukkan dengan tabel kebenaran bahwa :
   a. $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
   b. . $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ Disebut dalil De Morgan

a. Tabel kebenaran untuk : $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

P	q	~ p	~ q	p ∨ q	~(p ∨ q)	(~ p ∧ ~ q)
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	B	S	S
S	B	B	S	B	S	S
S	S	B	B	S	B	B

Nilai logisnya sama

Pada kolom ke enam dan ke tujuh terlihat bahwa pernyataan majemuk itu untuk semua nilai kemungkinan p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama.

b. tabel kebenaran untuk $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

P	q	~ p	~ q	(p ∧ q)	~(p ∧ q)	(~ p ∨ ~ q)
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	S	B	B
S	B	B	S	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B

Nilai logisnya sama

Pada kolom ke enam dan ke tujuh terlihat bahwa pernyataan majemuk itu untuk semua nilai kemungkinan p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama.

Latihan !

1. Apakah setiap kalimat berikut merupakan pernyatan? Jika ya tentukan nilai kebenarannya
   a. Irian jaya adalah provinsi paling timur di negara Indonesia
   b. Jika x = 3 maka $X^2 = 9$
   c. Apa jawabnya
   d. Pulanglah, tinggalkan aku sendiri!
   e. 9 adalah bilangan prima dan 9 adalah bilangan ganjil
2. Tuliskan negasi dari pernyataan berikut:
   a. Semua mahasiswa mahasiswa lulus mata kuliah pengantar dasar matematika
   b. 8 > 9
   c. 3+4 = 7
   d. 5 adalah bilangan prima
3. Konstruksilah tabel kebenaran dari setiap kalimat berikut ini.
   a. $\sim p \wedge q$
   b. $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee \sim q)$
   c. $(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$
   d. $P \Rightarrow (\sim p \vee q)$
   e. $(\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow q$
   f. $(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \Rightarrow q)$
4. Manakah implikasi berikut ini yang bernilai benar?
   a. Jika persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ mempunyai akar-akar yang sama, maka $b^2 - 4ac = 0$.
   b. Jika persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ mempunyai akar-akar yang sama, maka $b^2 - 4ac < 0$.
   c. Jika persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ mempunyai akar-akar yang sama, maka $b^2 - 4ac > 0$.
   d. Jika persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ mempunyai akar-akar yang berlainan, maka $b^2 - 4ac < 0$.

e. Jika persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ tidak mempunyai akar-akar yang real, maka $b^2 - 4ac > 0$.

5. Ubahlah kalimat berikut menjadi bentuk biimplikasi
   a. Segitiga sama sisi adalah segitiga yang ketiga sisinya sama panjang
   b. Bilangan prima adalah bilangan yang memiliki tepat dua faktor
   c. Jajar genjang adalah segi empat yang sepasang-sepasang sisinya sejajar
6. Ubahlah ungkapan brikut dalam bentuk pernyataan implikasi
   a. Setiap bilangan real kuadratnya selalu positif
   b. Setiap segitiga jumlah ketiga sudutnya 180°
   c. Setiap segitiga siku-siku jumlah kuadrat sisi siku-siku sama dengan kuadrat sisi miring
7. Buktikan bahwa $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$ adalah tautologi!
8. Tunjukan bahwa $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ merupakan kontradiksi!
9. Tunjukkan dengan tabel kebenaran bahwa pernyataan majemuk berikut ekuivalen (ekuivalen logis).
   a. $p \Rightarrow q \equiv (\sim p \vee q)$
   b. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
10. Tunjukan tabel kebenaran ekuivalensi dari $(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

BAB II
HIMPUNAN DAN OPERASINYA

2.1. Konsep Himpunan

Dalam matematika konsep himpunan termasuk konsep yang tidak didefinisikan (konsep dasar). Konsep himpunan mendasari hampir semua cabang matematika. Himpunan digunakan dalam matematika menyatakan kumpulan benda-benda atau objek-objek yang didefinisikan dengan jelas dimaksudkan, sehingga dengan tepat dapat diketahui objek yang termasuk himpunan dan yang tidak termasuk dalam himpunan tersebut. Benda-benda atau objek-objek yang termasuk dalam sebuah himpunan disebut anggota atau elemen himpunan tersebut.

Contoh :

Kumpulan yang bukan merupakan himpunan:

a. Kumpulan lukisan yang indah
b. Kumpulan makanan lezat
c. Kumpulan mahasiswa yang rajin

Ketiga contoh kumpulan diatas bukan merupakan himpunan sebab anggota-anggotanya tidak didefinisikan dengan jelas.

Contoh :

Kumpulan yang merupakan himpunan:

a. Kumpulan segitiga
b. Kumpulan bilangan asli
c. Kumpulan negara asean

2.2. Notasi Himpunan

Nama suatu himpunan dinyatakan dengan huruf kapital atau huruf besar, misalnya: A, B, C, P, Q, R dan sebagainya. Sedangkan huruf-huruf kecil biasanya dipakai untuk menyatakan anggota suatu himpunan. Antara anggota yang satu dengan yang lainnya dipisahkan dengan tanda koma dan untuk

menyatakan istilah himpunan itu sendiri dinotasikan dengan tanda kurung kurawal.
Contoh :

a. A={x, y, z}
b. Q={3, 6, 9}
c. A={0, 1, 2,...,10}

2.3. Cara Menyatakan Himpunan

Ada beberapa cara menyatakan himpunan, diantaranya dengan tabulasi atau mendaftar (*the roster method*), dengan notasi pembentuk himpunan (*the rule method*), dan dengan meyebutkan syarat keanggotaanya. Cara-cara menyatakan himpunan tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut.

a. Tabulasi (*the roster method*)

metode ini mengharuskan kita untuk menyebutkan/mendaftarkan anggota-anggota himpunan satu demi satu, dan dalam penulisan tiap-tiap anggota dipisah dengan tanda koma(,).
Contoh :

1) Himpunan A adalah himpunan bilangan asli yang kurang dari 7 maka ditulis: A = {1,2,3,4,5,6}.
2) Himpunan B adalah himpunan huruf-huruf vokal maka ditulis B = {a, i, u, o}.
3) Himpunan C adalah himpunan lima buah aat transportasi darat maka ditulis C = {delman, becak, motor, mobil, kereta api}.

b. Dengan Notasi Pembentuk Himpunan (*The Rule Method*)

anggota himpunan dinyatakan dengan notasi pembentuk himpunan (*set builder*). Dalam cara ini anggota himpunan yang akan ditulis dinyatakan dengan variabel (pengganti, pengubah), yang diikuti dengan tanda garis kemudian dilanjutkan dengan menyebutkan sifat-sifat atau ciri-ciri unsur himpunan. Untuk memperjelas cara ini, kita perhatikan contoh dibawah:

contoh

1) A = {x | x alat musik tiup}

   Maka dibaca: himpunan A adalah himpunan x sedemikian hingga x adalahalat musik tiup.
2) B = {y | warna lampu lalu lintas}

   Maka dibaca: himpunan B adalah himpunan y dimana y adalah warna lampu lalu lintas.
3) C = {x | x adalah bilangan bulat genap dan $0 < x < 10$}

   Maka dibaca: himpunan C adalah himpunan x sedemikian hingga x adalah bilangan bulat genap yang berada di antara 0 dan 10.
4) D = {x | x adalah lima huruf pertama abjad latin}

   Maka dibaca: himpunan D adalah himpunan x sedemikian hingga x adalah huruf pertama abjad latin.

c. Dengan menyebut syarat keanggotaannya

Dalam menyatakan himpunan dapat disajikan dengan cara deskripsi, yaitu menyatakan himpunan dengan kata-kata; yaitu dengan menyebutkan syarat keanggotaannya.

Contoh

1) Himpunan A adalah himpunan warna-warna yang ada dalam lagu ‘Balonku ada lima’.
2) Himpunan B adalah himpunan empat huruf pertama dalam urutan abjad latin.
3) Himpunan C adalah himpunan-himpunan warna lalu-lintas.
4) Himpunan D adalah himpunan siswa TK Al-Farisi Kelompok A.

2.4. Macam-macam Himpunan

a. Himpunan Kosong

Himpunan kosong yaitu himpunan yang tidak memiliki anggota atau elemen, himpunan kosong merupakan himpunan bagian (subset) dari semua himpunan. Himpunan kosong dinotasikan dengan ϕ atau { }.

Contoh 1.4

a. Himpunan bilangan asli kurang dari 1

b. Himpunan bilangan ganjil yang habis dibagi dua

c. A={x | x < 6 dan x > 5, x ∈ bilangan bulat}

b. Himpunan Semesta

Himpunan semesta atau himpunan umum adalah himpunan yang anggotanya terdiri dari semua anggota atau elemen yang sedang dibicarakan. Himpunan semesta sering pula disebut semesta pembicaraan atau *set universum* dilambangkan dengan "S" atau "U"

Contoh :

a. A={1,3,5,7}. Himpunan semesta yang mungkin untuk himpunan A adalah

S={Bilangan ganjil}
S={bilangan cacah}
S={bilangan bulat}
S={x | x ≥ 1, x ∈ bilangan ganjil}

c. Himpunan Berhingga dan Tak Berhingga

Dilihat dari kardinalitasnya suatu himpunan ada yang merupakan himpunan berhingga dan himpunan tak berhingga. Himpunan berhingga adalah himpunan yang banyak anggotanya menyatakan bilangan tertentu atau dapat juga dikatakan suatu himpunan disebut berhingga bila anggota-anggota himpunan tersebut dihitung, maka proses perhitungannya dapat berakhir. Sedangkan himpunan tak berhingga adalah himpunan yang banyak anggotanya tidak dapat dinyatakan dengan bilangan tertentu, atau dapat juga dikatakan suatu himpunan disebut himpunan tak berhingga bila anggota-anggota himpunan tersebut dihitung dan proses perhitungannya tidak dapat diakhiri.

Contoh :

1. Himpunan berhingga
   a. D = Himpunan nama-nama hari
   b. B = { x | x < 100, x ∈ bilangan cacah ganjil}
   c. P ={ x | x negara-negara ASEAN}
2. Himpunan tak berhingga
   a. R = {1,2,3,4,...}
   b. P = Himpunan Bilangan cacah kelipatan 5
   c. B = { x | x >10, x ∈ bilangan cacah bulat}

d. Koleksi Himpunan

Koleksi himpunan atau himpunan dari himpunan adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya merupakan himpunan pula. Misalnya suatu gudang adalah himpunan dari beberapa peti rokok, setiap peti terdiri beberapa bungkus rokok dan setiap bungkus terdiri dari berisi beberapa batang rokok. Contoh lain, misalnya suatu himpunan yang anggota-anggotanya merupakan himpunan bagian – himpunan bagian.

Contoh :

A = {{a, b, c}, {d}, {e}}

Dari contoh diatas diketahui bahwa {a,b,c} ∈ {{a,b,c},{d},{e}}=A atau {a,b,c}∈A, a∈{a,b,c} tetapi a ∉A.

e. Himpunan Kuasa

Himpunan kuasa atau *power set* adalah himpunan yang seluruh anggotanya merupakan kumpulan dari himpunan-himpunan bagian. Himpunan kuasa dari himpunan A dinotasikan dengan

P(A) dengan anggota-anggotanya merupakan bagian dari himpunan A. Banyak anggota himpunan kuasa dapat dihitung menggunakan rumus $\mathbf{n(P(A)) = 2^{n(A)}}$.

Contoh :

Jika diketahui A ={1,2,3}. Maka banyak anggota himpunan A adalah 3 buah. P(A) merupakan himpunan kuasa dari A dengan semua anggotanya merupakan himpunan bagian dari A.

Jadi banyaknya anggota P(A) = $2^{n(A)} = 2^3 = 8$, yang anggotanya terdiri dari P(A)={{ }, {1}, {2},{3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3}}.

2.5. Hubungan Dua Himpunan

a. Himpunan bagian

Himpunan A dikatakan himpunan bagian (*subset)* dari himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota A merupakan anggota dari B. Himpunan bagian di notasikan dengan $A \subset B$ atau $A \subseteq B$.

Contoh :

a. A = {a}, Q = {a, b, c}.

   $A \subset Q$ karena semua anggota A merupakan anggota Q dan tidak ada anggota A yang bukan merupakan anggota Q.

b. B ={a, c}, Q = {a, b, c}

   $B \subset Q$ karena semua anggota B merupakan anggota Q dan tidak ada anggota B yang bukan merupakan anggota Q.

c. C = {b, d}, Q = {a, b, c}

   $C \not\subset Q$ karena tidak semua anggota C merupakan anggota Q, berarti ada anggota C yang bukan merupakan anggota Q, yaitu d.

b. Dua Himpunan Sama

Himpunan A dan B disebut dua himpunan yang sama, dinotasikan dengan A=B jika dan hanya jika anggota-anggota A tepat sama dengan anggota-anggota B artinya setiap anggota A ada di B dan setiapa anggota B ada di A dan dapat ditulis.

A=B jika dan hanya jika $A \subset B$ dan $B \subset A$
Dapat disimpulkan bahwa $A \neq B$ jikan dan hanya jika $A \not\subset B$ atau $B \not\subset A$.f
Contoh :
Diketahui himpunan A = {1,3,5,7,9}, B = {2,4,6,8,10}, dan C={7,3,9,1,5}. Banyaknya anggota himpunan A ditulis dengan n(A), sehingga:
a. A = C dan n(A) = n(C) =5,
b. n(A) = n(B) = 5 tetapi $A \neq B$.

c. Dua Himpunan Ekuivalen

Himpunan A dan himpunan B disebut dua himpunan yang ekuivalen, dinotasikan dengan A~B jika dan hanya jika :

a. n(A) = n(B) , untuk A dan B himpunan berhingga.

b. A dan B berkorespondensi satu – satu, untuk A dan B himpunan tak berhingga.

Contoh :

a. A = {1,2,3,4,5} dan B = {a,b,c,d,e}

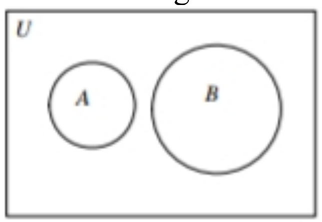
   A~B, karena n(A) = n(B)

b. A = {5,3,2,4} dan B = {2,3,4,5}

   A~B, karena A=B dan n(A) = n(B)

d. Dua Himpunan Saling lepas

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint)* jika keduanya tidak memiliki unsur yang sama. Dengan notasi A //B. Jika dinyatakan dalam bentuk diagram venn adalah :



Contoh :
Jika A={x | x ∈ N, x < 10} dan B = {11,12,13,14,15}

Maka A // B

2.6. Operasi Pada Himpunan

a. Irisan Dua himpunan

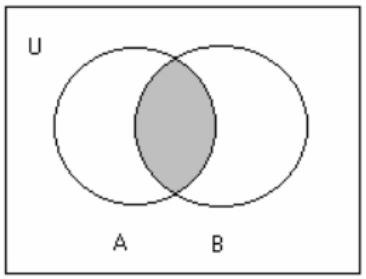
Misalkan A dan B adalah himpunan, irisan A dan B ditulis A∩B adalah himpunan semua anggota yang berada dalam A dan juga berada didalam B. Irisan A dan B dinotasikan dengan:

$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$

Atau

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram venn adalah :



Contoh :

a. Misalkan A = {2,3,5,7,11} dan B = {3,6,9,12}

Maka $A \cap B = \{3\}$

b. Misalkan A adalah himpunan mahasiswi pendidikan matematika dan B merupakan himpunan wanita lanjut usia (50 tahun keatas)

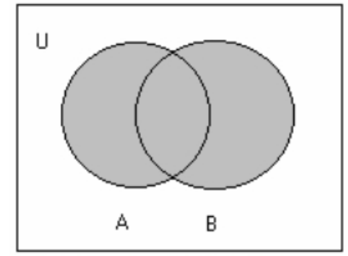
Maka $A \cap B = \emptyset$
Hal ini berarti A dan B adalah himpunan yang saling lepas.

b. Gabungan Dua himpunan

Misalkan A dan B adalah himpunan, gabungan A dan B ditulis A∪B adalah himpunan semua anggota yang berada dalam A atau B atau dalam A dan B. Gabungan A dan B dinotasikan dengan:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram venn adalah :



Contoh :

a. Jika A ={2,3,4,5} dan B ={1,2,3,4,5,6}

Maka $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

b. Jika A ={a,b,c,d} dan B ={e,f}

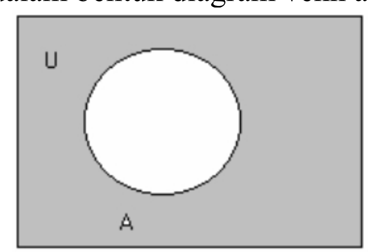
Maka $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f\}$

c. Komplemen Suatu Himpunan

Komplemen dari suatu merupakan unsur-unsur yang ada pada himpunan universal (semesta pembicaraan) kecuali anggota himpunan tersebut. Misalkan A merupakan himpunan yang berada pada semesta pembicaraan U maka komplemen dari himpunan A dinotasikan :

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U \text{ dan } x \notin A\}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram venn adalah



Contoh :

a. Misalkan U = {1,2,3,...,9} dan A={1,3,7,9}

Maka $\bar{A} = \{2,4,5,6,8\}$

b. Misalka U = {1,2,3,...,12}

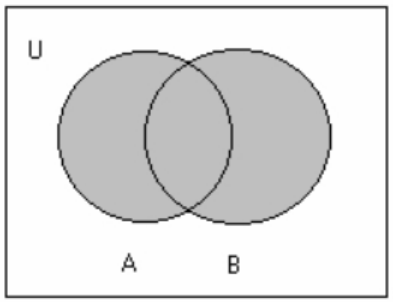
A= {x∈U | x habis dibagi dua}
Maka $\bar{A}$ ={1,3,5,7,9,11}

d. Selisih Dua Himpunan

Selisih himpunan A oleh B, ditulis A – B adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota A tetapi bukan anggota B. Selisih himpunan dan B dinotasikan:

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\} = A \cap \bar{B}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram venn adalah



Contoh :

a. Jika A ={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, B= {1,3,5,7,9} Maka:

A – B = {2,4,6,8,10}
B – A = ∅

b. Jika P ={2,4,6,8,10}, B= {1,2,3,4} Maka:

A – B = {6,8,10}
B – A = {1,3}

e. Perkalian Dua Himpunan

Perkalian antara himpunan A dengan himpunan B ditulis A × B adalah himpunan yang anggotanya semua pasangan terurut (a,b) dengan a ∈A dan b ∈B. Perkalian dua himpunan dinotasikan sebagai berikut:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

Contoh 1.15:
Jika diketahui A ={a,b,c} dan B = {1,2}

a. A × B = {(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)}

b. B × A= {(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b),(2,c)}

c. B × B= {(1,1), (1,2), (2,1),(2,2)}

d. A × A={(a,a), (a,b),(b,a),(b,b)}

Jadi pada umumnya A × B ≠ B × A, sebab (x,y)≠(y,x)

2.7. Sifat –Sifat Operasi Pada Himpunan

1. Sifat komutatif
   a. A∩B=B∩A (komutatif irisan)
   b. A∪B=B∪A (komutatif gabungan)
2. Sifat asosiatif
   a. A∩(B∩C) = (A∩B) ∩C (asosiatif irisan)
   b. A∪(B∪C) = (A∪B) ∪C (asosiatif gabungan)
3. Sifat distributif
   a. A∩(B∪C)=(A∩B)∪(A∩C) (irisan terhadap gabungan)
   b. A∪(B∩C)=(A∪B)∩(A∪C) (gabungan terhadap irisan)
4. Sifat identitas (sifat unsur satuan)
   a. A∩S=A
   b. A∩ ∅=∅
   c. A∪S=S
   d. A∪ ∅=A
5. Sifat komplemen
   a. A∩ $\bar{A}$ = ∅
   b. A∪ $\bar{A}$ = S

c. $\overline{(\bar{A})}$ =A

d. $\bar{S} = \varnothing$

e. $\bar{\varnothing} = S$

6. Sifat De Morgan

a. $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

b. $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

7. Sifat Idempoten

a. $A \cap A = A$, idempoten irisan.

b. $A \cup A = A$, idempoten gabungan.

8. Sifat Pengurangan

a. $\bar{A} = S - A$

b. $A - A = \phi$

c. $A - \phi = A$

d. $A - B = A \cap \bar{B}$

e. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

f. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

9. Sifat Himpunan Bagian

a. $A \cap B \subset A$

b. $A \cap B \subset B$

c. $(A - B) \subset A$

d. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$ ($\Leftrightarrow$ = jika dan hanya jika).

e. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

f. Jika $A \subset B$ maka $\bar{B} \subset \bar{A}$

g. Jika $A \subset B$ maka $A \cup (B - A) = B$

10. Sifat Kanselasi

a. $A \cap C = B \cap C \Leftrightarrow A = B$, kanselasi irisan.

b. $A \cup C = B \cup C \Leftrightarrow A = B$, kanselasi gabungan.

Latihan !

1. Berikut ini adalah beberapa contoh kumpulan tentukan manakah yang merupakan himpunan dan yang bukan himpunan.

a. Kumpulan anak-anak cerdas

b. Kumpulan anak-anak TK Harapan yang beruia 5 tahun

c. Kumpulan bianatang berkaki empat

d. Kumpulan makanan lezat

e. Kumpulan warna – warna pelangi

f. Kumpulan anak yang rajin

g. Kumpulan kendaraan roda 3

2. Berikut ini adalah beberapa contoh himpunan. Tentukan manakan yang merupakan himpunan hingga dan himpunan tak hingga

a. { bilangan prima yang kurang dari 100}

b. {1000, 100, 10,1}

c. {...,-2,-1,0,1,2,..}

d. {huruf –huruf vokal}

e. {bilangan kelipatan 2}

3. Tulislah himpunan berikut dengan menyebutkan syarat keanggotaanya dan notasi pembentuk himpunan

a. A = { a, i, u, e, o}

b. $B = \{2, 3,5,7,11,13\}$

c. $C = \{3,6,9,12,..\}$

d. $D = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$

4. Diketahui $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,3,5\}$ dan $C = \{2,4\}$

   Tentukan :

   a. $(A \cap B) \cup C$

   b. $(A \cup B) \cap C$

   c. $(A - C)$

   d. $(A \times B)$

5. Tentukan himpunan kuasa dari $A= \{2,3,5,7\}$!

6. Diantara himpunan – himpunan berikut tujukan yang merupakan himpunan kosong!

   a. $\{ x \mid x$ bilngan prima genap$\}$

   b. $\{ x \mid x$ bilngan ganjil yang habis dibagi dua$\}$

   c. $\{ x \mid x^2 - 3x + 5=0,$ x bilngan real$\}$

   d. $\{ x \mid x$ persegi panjang yang belah ketupat$\}$

   e. $\{ x \mid x \neq x\}$

7. Diketahui himpunan $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{1,3,5\}$, $C= \{2,4,6\}$, $D = \{2,3,4,5,6\}$, $E= \{8,9,10\}$. Tentukan pernyataan dibawah ini yang benar.

   a. $A \subset B$

   b. $B \subset A$

   c. $E \subset A$

   d. $C \subset D$

   e. $E \not\subset A$

   f. $B \subset B$

8. Dari pasangan-pasangan himpunan berikut, tentukan yang merupakan himpunan sama dengan himpunan yang ekuivalen.

   a. $A = \{k, l, m\}$

      $B = \{p, g, r\}$

   b. $P = \{ x \mid x$ warna bendera Indonesia$\}$

      $Q =\{ x \mid x$ warna seragam sekolah nasional siswa SD$\}$

   c. $E = \{u, l, a, t\}$

      $F = \{l, a, u, t\}$

   d. $G = \{ x \mid x <10, x \in$ bilangan prima$\}$

      $H= \{ x \mid x <4, x \in$ bilangan cacah$\}$

   e. $I = \{m, a, r, e, t\}$

      $J = \{a, p, r, i, l\}$

9. Diketahui $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A = \{1,3,5\}$ dan $B = \{3,4\}$

   Tentukan :

   a. $A \cup \bar{B}$

   b. $\bar{A} \cap B$

   c. $\bar{A} - \bar{B}$

   d. $\bar{A} \times \bar{B}$

10. Buktikan Sifat komutatif berikut:

    a. $A \cap B = B \cap A$

    b. $A \cup B = B \cup A$

BAB III
BILANGAN DAN LAMBANG BILANGAN

3.1. Definisi Bilangan

Bilangan adalah suatu konsep matematika yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran. Bilangan merupakan kumpulan angka yang menempati urutan dari kanan sebagai nilai satuan, puluhan, ratusan, ribuan dan seterusnya. Simbol atau lambang yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan disebut sebagai angka atau lambang bilangan.

3.2. Himpunan Bilangan-bilangan

a. Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah bilangan yang berbentuk : a + bi atau a + ib, a dan b bilangan real dan $i^2 = -1$. Bilangan kompleks dinyatakan dengan huruf Z, sedangkan huruf x dan y menyatakan bilangan real. Jika Z = x + yi meyatakan sembarang bilangan kompleks maka x disebut bagian real dan y bagian imajiner dari Z. Bagian real dan bagian imajiner dari kompleks z biasanya dinyatakan dengan Re(z) dan Im(z).

Contoh:

1. Z = 2 +3i dengan a = 2 dan b = 3
2. Z = -5 +2i dengan a= -5 dan b= 2
3. Z = 2- 4i dengan a =2 dan b = -4

b . Himpunan Bilangan Real

Himpunan bilangan real dinotasikan sebagai **R,** himpunan bilangan real merupakan gabungan dari bilangan rasional dan irasional.

Sifat-sifat bilangan real :

Untuk sebarang **R** berlaku sifat-sifat sebagai berikut:

1. Sifat komutatif

   (i) a + b = b +a

   (ii) a.b = b.a
2. Sifat assosiatif

   (i) a + (b + c) = (a + b) +c

   (ii) a(b.c) = (a.b)c
3. sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan

   a (b + c) = (a.b) + (a.c)
4. (i) a(-b) = (-a)b = -(ab)

   (ii) (-a)(-b) = ab

   (iii) –(-a) = a
5. (i) $\frac{0}{a} = 0$, unt\uk setiap bilangan a≠0

   (ii) $\frac{a}{0}$, tak terdefinisi

   (iii) ($\frac{a}{a} = 1$, untuk setiap bilangan a≠0
6. Hukum kanselisasi

   (i) Jika a.c = b.c dan c≠0 maka a = b

   (ii) Jika a,b, c ≠0 maka $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$
7. Sifat perkalian nol

   Jika a.b = 0 maka a =0 atau b = 0

d. Bilangan Rasional

Pada semesta himpunan bilangan bulat, persaman 5x + 3 = 0 tidak memunyai selesaian. Oleh karena itu himpunan bilangan bulat diperluas menjadi himpunan bilangan rasional sehingga persamaan tersebut mempunyai selesaian. Himpunan semua bilangan rasional didefinisikan sbagai berikut:

Definisi himpunan bilangan rasional:

$Q = \left\{\frac{a}{b} \mid \text{a dan b bilangan bulat, b} \neq 0\right\}$

Contohnya, $-\frac{6}{2}, -\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, \frac{0}{1}, \frac{1}{3}$, dan seterusnya

Dari definisi tersebut setiap bilangan bulat merupakan bilangan rasional karena setiap bilangan bulat dapat dinyatakan dalam $\frac{a}{b}$, dengan a dan b merupakan bilangan bulat b≠0

Kesamaan bilangan rasional didefinisikan sebagai berikut:

Definisi kesamaan bilangan rasional:

Jika $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ masing-masing merupakan bilangan rasional maka berlaku hubungan : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ jika dan hanya jika ad = bc.

Definisi kesamaan bilangan rasional tersebut berguna untuk menyederhanakan dan menyamakan penyebut pada penjumlahan, pengurangan atau membandingkan beberapa bilangan rasional memunculkan teorema berikut

Teorema:

Jika $\frac{a}{b}$ sebarang bilangan rasional n sebarang bilangan bulat, maka berlaku $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = \frac{na}{nb}$

Teorema tersebut dapat digunakan untuk menentukan bentuk sederhana dari suatu bilangan rasional. Bilanagan rasional $\frac{a}{b}$ dikatakan menpunyai bentuk paling sederhana jika a dan b mempunyai faktor prima yang bersekutu dan b bilangan positif.

1) Penjumlahan bilangan rasional

Penjumlahan bialangan rasional didefinisikan sebagai berikut:

Definisi penjumlahan bilangan rasional

Jika $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ masing-masing merupakan bilangan rasional maka berlaku hubungan: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

Dari definisi penjumlahan bilangan rasional diatas dapat dikembngkan sifat-sifat penjumlahan bilangan rasional

Sifat-sifat penjumlahan bilangan rasional

Misalkan $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ dan $\frac{e}{f}$ masing-masing merupakan bilangan rasional

a) Sifat ketertutupan penjumlahan bilangan rasional

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ adalah bilangan rasional tunggal

b) Sifat komutatif penjumlahan bilangan rasional

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

c) Sifat assosiatif penjumlahan bilangan rasional

$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$

d) Sifat identitas penjumlahan bilangan rasional

$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b} = 0 + \frac{a}{b}, \left(0 = \frac{0}{m}, m \neq 0\right)$

e) Sifat invers penjumlahan bilangan rasional

Pada setiap bilangan rasional $\frac{a}{b}$, ada bilangan rasional tunggal $-\frac{a}{b}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0 = \left(-\frac{a}{b}\right) + \frac{a}{b}$

Konsekuensi dari sifat-sifat penjumlahan bilangan rasional diatas dapat diturunkan teorema sebagai berikut:

Teorema : sifat kanselisasi bilangan rasional

Misalkan $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ dan $\frac{e}{f}$ masing-masing merupakan bilangan rasional, jika :

$\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ maka $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Contoh :

1. $\frac{2}{5} + \frac{4}{6} = \frac{12+20}{30} = \frac{22}{30}$

2. $\frac{4}{3} + \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{20+4+3}{15} = \frac{27}{15}$

2) Pengurangan bilangan rasional

Pengurangan bilangan rasional didefisikan sebagai berikut

Definisi:

Jika $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ masing-masing merupakan bilangan rasional maka berlaku hubungan $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right)$

Pengurangan bilangan rasional pada definisi diatas dapat dipandang sebagai perluasan pengurangan pecahan dengan penyebut sama ditunjukan sebagai berikut

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{b}\right) = \frac{a}{b} + \left(\frac{-c}{b}\right) = \frac{a+(-c)}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Pengurangan pecahan dengan penyebut tak sama ditunjukan sebagai berikut

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

Contoh :

1. $\frac{10}{8} - \frac{3}{6} = \frac{30-12}{24} = \frac{18}{24}$

2. $\frac{13}{7} - \frac{23}{7} = \frac{13-23}{7} = -\frac{10}{7}$

3) Perkalian bilangan rasional

Perkalian bilangan rasional didefisikan sebagai berikut

Definisi:

Jika $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ masing-masing merupakan bilangan rasional maka berlaku hubungan $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bc}$

Dari definisi penjumlahan bilangan rasional diatas dapat dikembngkan sifat-sifat penjumlahan bilangan rasional

Sifat-sifat perkalian bilangan rasional

Misalkan $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ dan $\frac{e}{f}$ masing-masing merupakan bilangan rasional

a) Sifat ketertutupan perkalian bilangan rasional

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ adalah bilangan rasional tunggal

b) Sifat komutatif perkalian bilangan rasional

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$

c) Sifat assosiatif perkalian bilangan rasional

$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$

d) Sifat identitas perkalian bilangan rasional

$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{a}{b}$, $(1 = \frac{m}{m}, m \neq 0)$

e) Sifat invers perkalian bilangan rasional

Pada setiap bilangan rasional $\frac{a}{b} \neq 0$ ada bilangan rasional tunggal $\frac{b}{a}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 = \left(\frac{b}{a}\right)\frac{a}{b}$

f) Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan bilangan rasional

$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$

Invers kali suatu bilangan sering disebut juga kebalikan dari bilangan tersebut. Kebalikan dari kebalikan bilangan rasional yang tidak nol adalah bilangan rasional itu sendiri.

Contoh :

1. $\left(\frac{2}{4} \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{4}\left(\frac{12}{15}\right) = \frac{24}{60}$

2. $\frac{4}{7} \cdot \frac{8}{9} = \frac{32}{63}$

4) Pembagian bilangan rasional

Pembagian bilangan rasional didefisikan sebagai berikut

Definisi:

Jika $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ masing-masing merupakan bilangan rasional maka berlaku hubungan $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Contoh :

1. $\frac{6}{5} \div \frac{7}{10} = \frac{5}{6} \times \frac{10}{7} = \frac{50}{42}$

2. $\frac{7}{10} \div (-\frac{9}{12}) = \frac{7}{10} \times -\frac{12}{9} = -\frac{84}{90}$

5) Sifat urutan bilangan rasional

Teorema : sifat perkalian saling ketaksamaan
Jika $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ masing-masing merupakan bilangan rasional dengan b > 0 dan d > 0 maka berlaku hubungan $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ jika dan hanya jika ad < bc.
Selanjutnya sifat-sifat urutan bilangan rasional ditunjukan sebagai berikut

Sifat urutan bilangan rasional
Misalkan $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ dan $\frac{e}{f}$ masing-masing merupakan bilangan rasional

a) Sifat transitif kurang dari

jika $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dan $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ maka $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$

b) Sifat kurang dari dan penjumlahan

Jika $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ maka $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$

c) Sifat kurang dari dan perkalian dengan bilangan positif

Jika $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dan $\frac{e}{f} > 0$ maka $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} < \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$

d) Sifat kurang dari dan perkalian dengan bilangan negatif

Jika $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dan $\frac{e}{f} < 0$ maka $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} > \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$

Sifat-sifat urutan tersebut tetap berlaku apabila simbol < diubah dengan ≤, > dan ≥ tampak bahwa ketiga urutan yang pertama berlaku pada semesta himpunan bilangan cacah, tetapi sifat yang keempat tidak berlaku pada semesta himpunan bilangan cacah

Contoh :

1. $x + \frac{2}{3} < \frac{1}{2}$

$x + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} < \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$

$x < -\frac{1}{6}$

2. $\frac{2}{3}x < -\frac{5}{2}$

$\left(\frac{3}{2}\right)\frac{2}{3}x < \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)$

$x < -\frac{15}{4}$

e. Bilangan Bulat

Bilangan-bilangan 0,-1,1,-2,2,-3,3,... disebut bilangan bulat. Himpunan semua bilangan bulat disebut himpunan bilangan bulat dan ditulis Z. Jadi Z ={...-3,-2,-1,0,1,2,3,...}. Bilangan bulat dapat diklasifikasikan menjadi bilangan bulat positif, nol dan bilangan bulat negatif. Nol bukan bilangan bulat positif maupun bilangan negatif.

1) Penjumlahan bilangan bulat

Aksioma penjumlahan bilangan bulat:
Misalkan a dan b masing- masing merupakan bilangan bulat

a. Penjumlahan dengan nol

a + 0 = 0 + a

b. Penjumlahan dua bilangan bulat positif

Misalkan a dan b masing-masing bilangan bulat positif. Jika A dan B dua himpunan yang saling asing dengan n(A) = a dan n(B)= b maka a + b = n (A∪B)

c. Penjumlahan dua bilangan negatif

Misalkan a dan b masing-masing bilangan bulat negatif. Berarti –a dan –b masing-masing bilangan negatif sehingga (-a) + (-b) = - (a + b), dalam hal ini a + b jumlah dua bilangan positi f.

d. Penjumlahan bilangan positif dan negatif

i) Jika a dan b masing-msing bilangan bulat dan a > b maka a + (-b) = a – b. Dalam hal ini a – b merupakan selisih bilangan cacah a dan b

ii) Jika a dan b masing-msing bilangan bulat dan a < b maka a + (-b) = - (b – a). Dalam hal ini b – a merupakan selisih bilangan cacah a dan b

Dari aksioma penjumlahan bilangan bulat diatas, dapat dikembangkan sifat-sifat penjumlahan bilangan bulat sebagai berikut:

Misalkan a, b dan c masing-masing merupakan bilangan bulat

a) Sifat ketertutupan bilangan bulat

a + b menunjukan bilangan bulat tunggal

b) Sifat komutatif penjumlahan bilangan bulat

a + b = b + a

c) Sifat asosiatif penjumlahan bilangan bulat

(a + b) + c = a + (b + c)

d) Sifat identitas penjumlahan bilangan bulat

0 adalah bilangan bulat tunggal, sedemikian hingga a + 0 = a = 0 + a untuk semua a

e) Sifat invers jumlah penjumlahan pada bilangan bulat

Untuk setiap bilangan bulat a, ada bilangan bulat tunggal –a sedemikian hingga a + (- a) =0

Konsekuensi dari sifat-sifat penjumlahan bilangan bulat diatas, dapat diturunkan teorema – teorema sebagai berikut:

Teorema 1: Kanselasi jumlah pada bilangan bulat

Misalkan a, b dan c masing-masing bilangan bulat.

Jika a + c = b + c maka a = b

Teorema 2:

Misalkan a sebarang bilangan bulat berlaku hubungan –(-a) = a

Contoh :

1. 23 + (-40) = - (40-23) = - 17
2. (-50) + (-30) + 80 = -(50+30) + 80 = (-80) +80 = 0

2) Pengurangan Bilangan Bulat

Definisi:

Misalkan a, b dan c masing-masing merupakan bilangan bulat, berlaku hubungan : a – b = c jika dan hanya jika a = b + c.

3) Perkalian Bilangan Bulat

Perkalian bilangan bulat dapat dipandang sebagai perluasan perkalian bilangan caacah. Pada bilangan cacah, perkalian dipandang sebagai penjumlahan berulang, seperti ditunjukan pada contoh berikut:

$$3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6$$

Definisi:

Misalkan a dan b masing-masing merupakan bilangan bulat maka:

a) Perkalian dengan nol

a . 0 = 0 = 0 . a

b) Perkalian dua bilangan bulat positif

Misalkan a dan b masing-masing merupakan bilangan positif. Jika A dan B dua himpunan yang saling asing dengan n(A) = a dan n(B) = b maka $a.b = n(A \times B)$.

c) Perkalian bilangan bulat positif dan negatif

Jika a dan b masing-masing merupakan bilangan bulat (dengan demikian -b negatif) maka a.(-b) = - (ab), dengan ab adalah hasil kali bilangan cacah a dan b. Hasil perkalian bilangan bulat positif dan bulat negatif adalah bilangan bulat negatif.

d) Perkalian dua bilangan bulat negatif

Jika a dan b bilangan negatif maka (-a).(-b) = ab dengan ab adalah hasil kali bilangan cacah a dan b. Hasil prkalian dua bilangan bulat negatif adalah bilangan bulat positif.

Dari definisi perkalian bilangan bulat dapat dikembangkan sifat-sifat perkalian bilangan bulat sebagai berikut:

Sifat-sifat perkalian bilangan bulat

Misalkan a, b dan c masing-masing merupakan bilangan bulat

a) Sifat ketertutupan perkalian bilangan bulat

ab menunjukan perkalian bilangan bulat tunggal

b) Sifat komutatif perkalian bilangan bulat

a.b = b.a

c) Sifat asosiatif perkalian bilangan bulat

(a.b)c = a (b.c)

d) Sifat identitas perkalian bilangan bulat

1 adalah bilangan bulat tunggal sehingga a.1 = a =1.a

e) Sifat distributif perkalian terhadap bilangan bulat

a (b+c) = ab + ac

konsekuensi dari sifat-sifat perkalian bilangan bulat diturunkan teorema – teorema berikut:

Teorema 1:

Jika a bilangan bulat maka berlaku a(-1) = -a

Teorema 2:

Jika a dan b masing-masing merupakan bilangan bulat maka berlaku : (-a)b = - (ab)

Teorema 3:

Jika a dan b masing-masing merupakan bilangan bulat maka berlaku ((-a)(-b)) = ab

Teorema 4: Kanselisasi kali pada bilangan bulat

Misalkan a, b dan c masing-masing bilangan bulat $c \neq 0$. Jika ac = bc maka a = b

Contoh :

1. (-15)(-30) = 450
2. 25(12+10) = 25(12) + 25(10) = 300 + 250 = 550

4) Pembagian Bilangan Bulat

Pembagian bilangan bulat dapat dijelaskan melalui contoh perkalian bilangan bulat $15 = 5 \times n$. Pada contoh tersebut n dan 5 merupakan faktor 15. Menentukan n berarti menentukan bulat dari 15 yang memenuhi hubungan tersebut. Ungkapan tersebut dapat ditulis sebagai 15:3 = n. Proses menentukan faktor bulat pada ilustrasi tersebut memunculkan definisi pembagian sebagai berikut :

Definisi:

Jika a dan b masing-masing merupakan bilangan bulat dengan $b \neq 0$ maka berlaku

a:b= c jika dan hanya jika a = bc untuk suatu bilangan bulat c.

Contoh :

1. $40:5 = 8 \Leftrightarrow 40 = 5 \times 8$

2. $63:7 = 9 \Leftrightarrow 63 = 7\times 9$

3. $100:5 = 20 \Leftrightarrow 100 = 5\times 20$

5) Sifat Urutan Bilangan Bulat

Misalkan a, b dan c masing-masing merupakan bilangan bulat, p bilangan bulat positif dan n bilangan bulat negatif.

a) Sifat transitif kurang dari

jika $a < b$ dan $b < c$ maka $a < c$

b) Sifat kurang dari dan penjumlahan

Jika $a < b$ maka $a+c < b+c$

c) Sifat kurang dari dan perkalian dengan bilangan positif

Jika $a < b$ maka $ap < bp$

d) Sifat kurang dari dan perkalian dengan bilangan negatif

Jika $a < b$ maka $an > bn$

Sifat-sifat urutan tersebut tetap berlaku apabila simbol $<$ diubah dengan $\leq$, $>$ dan $\geq$ tampak bahwa ketiga urutan yang pertama berlaku pada semesta himpunan bilangan cacah, tetapi sifat yang keempat tidak berlaku pada semesta himpunan bilangan cacah

f. Bilangan Pecahan

Bilangan pecahan adalah bilangan yang berbentuk $\frac{a}{b}$ dimana a merupakan pembilang dan b merupakan penyebut dengan $a,b \in Z$, $b \neq 0$ dan a bukan kelipatan dari b

Contoh: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{14}{6}, \ldots$

Jenis- jenis bilangan pecahan :

1) Bilangan Pecahan biasa

Bilangan pecahan biasa adalah bilangan pecahan yang terdiri dari pembilang dan penyebut, yang mana angka pembilang nilainya lebih kecil dari pada nilai angka penyebutnya atau sebaliknya.

Contoh : $\frac{9}{7}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{21}{40}, \ldots$

2) Bilangan pecahan murni

Bilangan pecahan murni adalah bilangan pecahan yang pembilangnya lebih kecil dari penyebut

Contoh : $\frac{2}{7}, \frac{2}{5}, \frac{3}{40}, \frac{21}{45}, \ldots$

3) Bilangan pecahan tidak murni

Bilangan pecahan tidak murni adalah bilangan pecahan yang pembilangnya lebih besar dari penyebut

Contoh : $\frac{24}{7}, \frac{6}{2}, \frac{67}{40}, \frac{5}{2}, \ldots$

4) Bilangan pecahan campuran

Bilangan pecahan campuran adalah bilangan pecahan yang terdiri atas bilangan bulat, pembilang dan penyebut

Contoh : $2\frac{1}{7}, 3\frac{2}{5}, \ldots.$

- Cara mengubah pecahan campuran ke pecahan biasa

  Kalikan penyebut dengan bilangan bulat yang ada pada bilangan pecahan campuran, hasil dari perkalian tersebut dijumlahkan dengan pembilang pecahan campuran sehingga hasilnya menjadi pembilang pada pecahan biasa sedangkan penyebutnya ttidak berubah

  Contoh:

  1. $2\frac{1}{7} = \frac{7\times 2+1}{7} = \frac{15}{7}$
  2. $3\frac{2}{5} = \frac{5\times 3+2}{5} = \frac{17}{5}$

- Cara mengubah pecahan biasa ke pecahan campuran

  Bagi angka pembilang dengan angka penyebut hasilnya menjadi bilangan bulat pada pecahan campuran, sisa dari hasil pembagian akan menjadi pembilang pada pecahan campuran
  Contoh :

  1. $\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$
  2. $\frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$

5) Bilangan pecahan desimal

   Bilangan pecahan desimal adalah bilangan yang diperoleh dari hasil pembagian sutu bilangan dengan 10,100,1000 dan seterusnya, pecahan desimal biasanya ditandai dengan tanda koma(,)
   Contoh :

   1. $\frac{3}{100} = 0{,}03$
   2. $\frac{20}{100} = 0{,}2$
   3. $\frac{5}{1000} = 0{,}005$

6) Persen atau permil

   Pecahan dengan penyebut 100 disebut persen (disimbolkan dengan %) sedangkan jika penyebut 1000 disebut permil (disimbolkan dengan ‰).
   Contoh :

   1. $\frac{20}{100}$ = 20 %
   2. $\frac{8}{25} = \frac{8\times4}{25\times4} = \frac{32}{100} = 32\%$
   3. $\frac{15}{200} = \frac{15\times5}{200\times5} = \frac{75}{1000} = 75\%_0$

   Jika himpunan semua bilangan pecahan dinyatakan dengan P maka Z ∪ P = Q, Z ⊄ P, Z//P

g. Bilangan Cacah

Bilangan cacah adalah himpunan bagian dari sistem bilangan bulat yang merupakan bilangan bulat positif yang dimulai dari angka 0 yaitu 0,1,2,3,4,5,.... Bilangan cacah disimbolkan dengan C = {0,1,2,3,4,...}. jelas N ⊂ C, C-N ={0}.

h. Bilangan Asli

Berdasarkan kesepakatan matematikawan tradisional, bilangan asli adalah himpunan bagian dari sistem bilangan bulat yang merupakan bilangan bulat positif yang dimulai dari angka 1 yaitu 1,2,3,4,5,.... Himpunan bilangan asli disimbolkan dengan N. Jadi N = {1,2,3,4,5,...}.

i. Bilangan Prima

Bilangan prima adalah seluruh bilangan asli yang hanya memiliki faktor pembagi satu dan bilangan itu sendiri atau bilangan yang bisa dibagi oleh satu dan dirinya sendiri

Contoh : 2,3,5,7,11,13,...

j. Bilangan ganjil

Bilangan ganjil merupakan bilangan yang bisa ditunjukan dalam bentuk 2n-1 dan yang tidak habis dibagi dengan bilangan 2.

Contoh : -3,-1,1,3,5,7,...

i. Bilangan genap

Bilangan genap merupakan bilangan yang bisa dinyatakan dalam bentuk 2n dan bilangan itu habis dibagi dengan bilangan 2. Contoh: 2,4,6,8,10,...

j. Bilangan komposit

Bilangan komposit merupakan semua bilangan asli kecuali 1 dan yang tidak termasuk bilangan prima.

Contoh: 4,6,8,9,10,...

k.Himpunan Bilangan Irasional

Bilangan irasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan desimal, tetapi tidak dinyatakan dalam bentuk pecahan biasa $\frac{a}{b}$ dengan a,b∈Z, b≠0. Bilangan irasional juga dikenal sebagai bilangan real yang tidak bisa dibagi (hasil baginya tidak pernah berhenti).

Contoh :

1. $\sqrt{2} = 1{,}414213$ ...
2. $\sqrt{3} = 1{,}7320508$ ...
3. $\pi = 3{,}1415926$ ...
4. e = 2,71828...

l. Bilangan imajiner

Bilangan imajiner atau yang dikenal dengan bilangan khayal merupakan bilangan yang mempunyai sifat $i^2 = -1$ dengan kata lain bilangan tersebut mempunyai bilangan tersebut mempunyai akar negatif.

Contoh : I = {i, 4i, 5i, ...}

3. 3. Lambang Bilangan

Lambng bilangan atau angka adalah simbol atau lambang yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan. Sedangkan nama bilangan adalah sebutan untuk suatu angka.

Contoh :

1. Contoh lambang bilangan dan nama bilangan untuk satuan :

No	Lambang bilangan	Nama bilangan
1	1	Satu
2	2	Dua
3	3	Tiga
4	4	Empat
5	5	Lima
6	6	Enam
7	7	Tujuh
8	8	Delapan
9	9	Sembilan

2. Contoh lambang bilangan dan nama bilangan untuk puluhan:

No	Lambang bilangan	Nama bilangan
1	10	Sepuluh
2	20	Dua puluh
3	30	Tiga puluh
4	40	Empat puluh
5	50	Lima puluh
6	60	Enam puluh
7	70	Tujuh puluh
8	80	Delapan puluh
9	90	Sembilan puluh

3. Contoh lambang bilangan dan nama bilangan untuk ratusan:

No	Lambang bilangan	Nama bilangan
1	100	Seratus
2	200	Dua ratus
3	300	Tiga ratus
4	400	Empat ratus
5	500	Lima ratus
6	600	Enam ratus
7	700	Tujuh ratus
8	800	Delapan ratus
9	900	Sembilan ratus

4. Contoh lambang bilangan dan nama bilangan untuk ribuan :

No	Lambang bilangan	Nama bilangan
1	1000	Seribu
2	2000	Dua ribu
3	3000	Tiga ribu
4	4000	Empat ribu
5	5000	Lima ribu
6	6000	Enam ribu
7	7000	Tujuh ribu
8	8000	Delapan ribu
9	9000	Sembilan ribu

5. Contoh lambang bilangan dan nama bilangan untuk jutaan :

No	Lambang bilangan	Nama bilangan
1	1.000.000	Satu juta
2	2.000.000	Dua juta
3	3.000.000	Tiga juta
4	4.000.000	Empat juta
5	5.000.000	Lima juta
6	6.000.000	Enam juta
7	7.000.000	Tujuh juta
8	8.000.000	Delapan juta
9	9.000.0000	Sembilan juta

Contoh :

1. Seratus delapan

   Lambang bilangannya dapat ditulis: 108
   Yang terdiri dari :
   1: ratusan , 0: puluhan , dan 8: satuan

2. Satu juta enam ratus lima puluh ribu empat ratus lima puluh

   Lambang bilangannya dapat ditulis: 1.650. 450
   Yang terdiri dari:
   1 : jutaan, 6 : ratus ribuan, 5: puluh ribuan, 0: ribuan, 4: ratusan, 5: puluhan, 0: satuan

Latihan !

1. Operasikan bilangan bulat berikut.
   a. 43 + (-79) =...
   b. (-108) + 125= ...
   c. (-1703) + 1123 =...
   d. (-1560) – 1345 =...
   e. (-172) – (-134) =...
2. Apakah sifat-sifat berikut berlaku pengurangan bilangan bulat ? berikan contoh apabila berlaku. Tunjukan contoh penyangkal apabila tidakberlaku.
   a. Tertutup
   b. Asosiatif
   c. Komutatif
   d. Identitas
3. Gunakan adanya invers jumlah pada himpunan bilangan bulat untuk menyelesaikan persamaan berikut.
   a. x + 23 = 19
   b. (-30) + x = 19
   c. x – 56 = -25
   d. – x + 89 = - 65
   e. x – 30 = - 25
4. Operasikan bilangan-bilangan rasional berikut. Tunjukan hasilnya dalam bentuk yang paling sederhana.
   a. $\frac{23}{40} : \frac{-21}{34}$

b. $\frac{21}{12} : \frac{25}{45}$

c. $\frac{35}{-9} : \frac{-36}{28}$

5. Operasikan bilangan-bilangan rasional berikut. Tunjukan hasilnya dalam bentuk yang paling sederhana.

a. $\frac{24}{-9} \times \frac{-36}{28}$

b. $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{-4}{5} + \frac{3}{7}\right)$

c. $\frac{5}{9} \cdot \left(\frac{4}{3}\right) + \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)$

d. $\frac{5}{9} \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{7}{8}\right)$

6. Dengan menggunakan sifat urutan bilangan rasional selesaikan pertidak samaan berikut:

a. $x + \frac{1}{2} < -\frac{5}{6}$

b. $x - \frac{2}{3} < -\frac{3}{4}$

c. $\frac{4}{5}x < \frac{15}{8}$

d. $-\frac{3}{7}x > \frac{8}{5}$

7. Operasikan bilangan-bilangan pecahan berikut. Tunjukan hasilnya dalam bentuk yang paling sederhana.

a. $\frac{2}{5} + 3\frac{1}{4} =$

b. $3\frac{5}{7} + 2\frac{3}{4} - \frac{5}{14} =$

c. $4\frac{1}{7} \times 3\frac{5}{4} =$

d. $4\frac{1}{7} \div 3\frac{5}{4} =$

8. Ubahlah bilangan pecahan dibawah ini menjadi bentuk persen dan permil

a. $\frac{8}{20}$

b. $\frac{3}{5}$

c. $\frac{15}{40}$

d. $\frac{7}{30}$

9. Tuliskan lambang bilangan berikut

a. Seribu lima puluh

b. Satu juta lima ratus enam puluh

c. Tujuh ratus delapan

d. Seribu lima ratus lima

e. Dua ribu tiga ratus empat puluh lima

10. Tuliskan nama bilangan dari:

a. 12905

b. 40005

c. 1091

d. 4578

e. 12078

BAB IV
KPK DAN FPB

4.1. Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)

a. Pengertian kelipatan dan faktorisasi prima

Kelipatan suatu bilangan diartikan sebagai hasil kali bilangan tersebut dengan bilangan asli. Bilangan negatif dan nol bukan merupakan bilangan asli. Hal ini diilustrasikan dari selembar kertas yang dilipat tidaka akan menghasilkan nol dan bilangan negatif.

Contoh :

1. Bilangan kelipatan 3 yaitu kalikan bilangan 3 dengan bilangan asli 1,2,3,4,5 dan seterusnya secara berurutan.

   $1\times3 = 3$
   $2\times3 = 6$
   $3\times3 = 9$
   $4\times3 = 12$

   Jadi bilangan kelipatan 3 adalah 3,6,9,12 dan seterusnya
2. Bilangan kelipatan 12 yaitu kalikan bilangan 12 dengan bilangan asli 1,2,3,4,5 dan seterusnya secara berurutan.

   $1\times12 = 12$
   $2\times12 = 24$
   $3\times12 = 36$
   $4\times12 = 48$

   Jadi bilangan kelipatan 3 adalah 12,24,36,48 dan seterusnya

Faktorisasi prima adalah penjabaran suatu bilangan menjadi perkalian – perkalian bilangan prima. Jadi dengan perkalian beberapa bilangan prima diperoleh hasil bilangan itu.

Contoh :

$6 = 2\times3$ (2 dan 3 adalah bilangan prima)
$20 = 2\times2\times5$ (2 dan 5 adalah bilangan prima)
$70 = 2\times5\times7$ (2,5 dan 7 adalah bilangan prima)

Faktor prima adalah bilangan-bilangan prima yang terdapat pada faktorisasi prima. Misalkan pada faktorisasi prima diatas:
6 memiliki faktor prima 2 dan 3
20 memiliki faktor prima 2 dan 5
70 memiliki faktor prima 2,5 dan 7

b. Pengertian KPK

Kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari suatu bilangan merupakan bilangan keliptan terkecil yang sama dari banyaknya bilangan tertentu. Dalam mencari nilai kpk dari bilangan dapat digunakan dengan metode sebagai berikut:

1) Kelipatan persekutuan

   Kelipatan persekutuan yaitu kelipatan yang sama dari dua bilangan atau lebih.

   Contoh :

   1. Kpk dari 6 dan 8

      Penyelesaian :
      Kelipatan 6 = 6,12,18,24,30,36,42,48,54,60,...
      Kelipatan 8 = 8,16,24,32,40,48,56,64,72,80,....
      Kelipatan persekutuannya adalah 24, 48,...
      Kpk dari 6 dan 8 adalah 24
   2. Kpk dari 12 dan 15

      Penyelesaian :
      Kelipatan 12 = 12,24,36,48,60,72,...
      Kelipatan 15=15,30,45,60,75,90,105,....
      Kelipatan persekutuannya adalah 60,...
      Kpk dari 12 dan 15 adalah 60

2) Faktorisasi prima

   Mencari KPK menggunakan cara faktorisasi prima yaitu dapat menggunakan pohon faktor yaitu membagi bilangan tersebut hingga menyisakan faktor-faktor prima saja.

   Langkah-langkah menentukan KPK denagn faktorisasi prima:

   a. Tulislah faktorisasi prima dari setiap bilangan
   b. Tulislah semua faktor yang sama

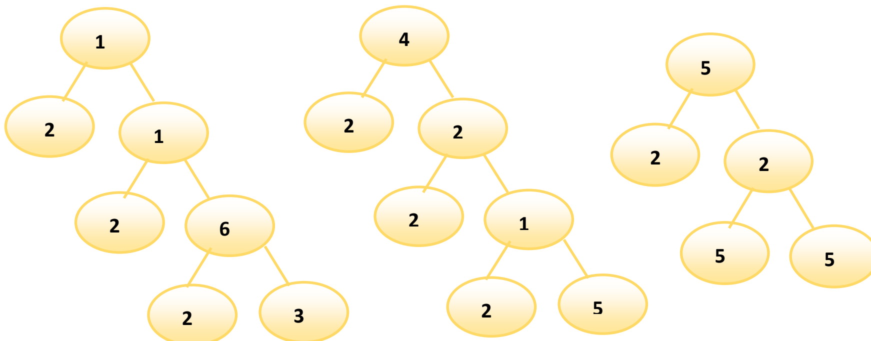
c. Jika ada faktor yang berpangkat, pilihlah bilangan pangkat terbesar, kemudian kalikanlah

Contoh :

1. Kpk dari 24, 40 dan 50

   Peneyelesaian :

   Langkah pertama yaitu dengan membuat pohon faktor



Faktor prima dari 12 adalah $2^3 \times 3$

Faktor prima dari 40 adalah $2^3 \times 5$

Faktor prima dari 50 adalah 2×5^2

Faktor 2 yang terbesar yaitu 2^3

Faktor 5 yang terbesar yaitu 5^2

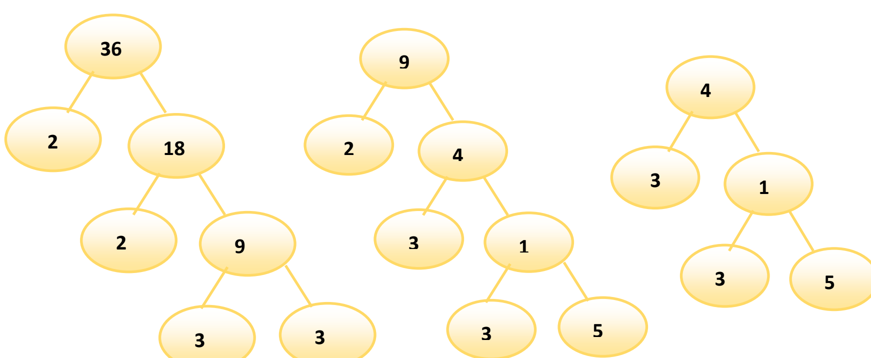
Faktor 3 yang hanya terdapat satu faktor

Jadi, KPK dari 12, 40 dan 50 adalah $2^3 \times 3 \times 5^2 = 600$

2. Kpk dari 36, 90 dan 50

   Peneyelesaian :

   Langkah pertama yaitu dengan membuat pohon faktor



Faktor prima dari 36 adalah $2^2 \times 3^2$

Faktor prima dari 90 adalah $2 \times 3^2 \times 5$

Faktor prima dari 45 adalah $3^2 \times 5$

Faktor 2 yang terbesar yaitu 2^3

Faktor 3 yang terbesar yaitu 3^2

Faktor 5 yang terbesar yaitu 5

Jadi, KPK dari 36, 90 dan 45 adalah $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$

3) Cara Tabel

Cara tabel biasa disebut dengan cara sengkedan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Tuliskan bilangan yang akan ditentukan KPK nya secara mendatar

b. Carilah bilangan prima yang dapat membagi sebagian atau seluruh bilangan tersebut. Untuk mecari bilangan prima sebaiknya pilih bilangan prima dari yang terkecil yaitu 2,3,5,7 dan seterunya

c. Tuliskan hasil baginya dibawah bilangan yang dibagi.

d. Apabila ada bilangan yang tidak habis dibagi oleh prima pembagi maka tuliskan kembali bilangan tersebut dibawahnya

e. Lakukan terus menerus hingga memperoleh suatu baris yang yang hanya berisi bilangan 1

f. KPK dari bilangan yang dicari adalah perkalian semua bilangan prima yang menjadi pembagi bilangan yang dicari KPK nya

Contoh :

1. Kpk dari 25, 60 dan 75

   Penyelesaian :

Pembagi	25	60	75
2	25	30	75
2	25	15	75
3	25	5	25
5	5	5	5
5	1	1	1

Jadi KPK dari 25, 60 dan 75 adalah 2×2×3×5×5 = 300

2. Kpk dari 18, 54 dan 80

   Penyelesaian :

Pembagi	18	54	60
2	9	27	30
2	9	27	15
3	3	9	5
3	1	3	5
3	1	1	5
5	1	1	1

Jadi KPK dari 25, 60 dan 75 adalah 2×2 ×3×3×3×5=540

3. Kpk dari 35, 115 dan 150

   Penyelesaian :

Pembagi	35	115	150
2	35	115	75
3	35	115	25
5	7	23	5
5	7	23	1
7	1	23	1
23	1	1	1

Jadi KPK dari 25, 60 dan 75 adalah 2×3×5×5×7×23=24.150

c. Soal Cerita KPK

1. Zul dan Fahry berenang bersama-sama pada tanggal 3 November 2012. Jika, Zul berenang setiap 4 hari sekali dan Fahry setiap 5 hari sekali. Pada tanggal berapa mereka akan berenang bersama-samauntuk kedua kalinya?

   Penyelesaian:

   Kpk 4 dan 5
   $4=2^2$
   $5=5.1$
   $KPK(4,5)=2^2.5=20$

Setiap 20 hari sekali Zul Dan Fahry akan berenang bersama-sama.
Untuk mengetahui pada tanggal berapa mereka akan berenang bersama untuk kedua kalinya setelah tanggal 3 november 2012 adalah 3(nov 2012)+20=23 november 2012
Jadi,Zul dan Fahry akan berenang bersama-sama untuk keduakalinya pada tanggal 23 november 2012

2. Susi, Riko, dan Tini berturut-turut mengunjungi perpustakaan setiap 4 hari, 6 hari, dan 8 hari sekali. Jika pada tanggal 15 Juli 2014 mereka bertemu di perpustakaan, pada tanggal berapa mereka bertemu di perpustakaan yang akan datang?

   Penyelesaian:

   KPK 4, 6 dan 8
   $4= 2^2$
   $6= 2 \times 3$
   $8= 2^3$
   KPK $= 2^3 \times 3 = 24$

   Susi, Riko, Tini akan bertemu 24 hari sehari. Dua puluh empat hari setelah tanggal 15 Juli 2014 adalah 8 Agustus 2014.

   Tanggal = (n + tanggal sekarang) - lama hari bulan Juli
   = (24 + 14) – 31
   = 8 Agustus 2014

3. Fajri meminjam buku di perpustakaan setiap 6 hari sekali. Taufik meminjam buku di perpustakaan setiap 8 hari sekali. Tiar meminjam buku di perpustakaan setiap 12 hari sekali.

a. Jika hari ini mereka meminjam buku bersama-sama, berapa hari lagi mereka akan meminjam buku di hari yang sama?

b. Jika hari ini adalah hari Senin, hari apa lagi mereka meminjam buku di hari yang sama?

   Penyelesaian :

   Untuk menyelesaikan soal pemecahan masalah di atas, menggunakan konsep KPK. Terlebih dahulu kita mencari KPK bilangan 10, 15 dan 20 misal dengan cara membilang kelipatan.

Kelipatan 6 = 6, 12, 18, **24**
Kelipatan 8 = 8, 16, **24**
Kelipatan 12 = 12, **24**
KPK 6, 8 dan 12 adalah 24
Dengan demikian

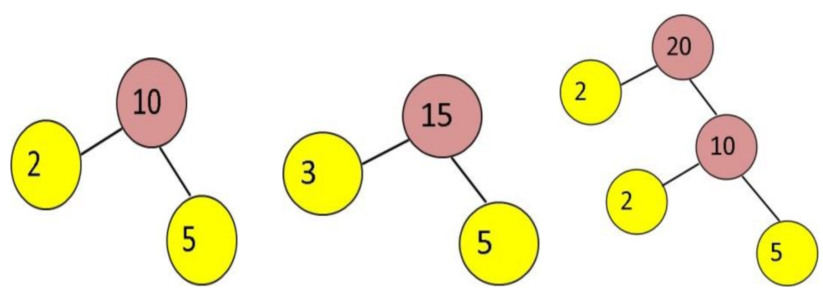
a. Mereka akan meminjam buku di hari yang sama dalam 24 hari berikutnya.

b. Jika hari ini hari senin, maka 24 hari berikutnya adalah hari Kamis.

4. Siswa-siswi kelas VI SDN Jayamulya III mengamati demonstrasi praktikum nyala bola lampu dengan tiga warna yang berbeda. Lampu putih menyala setiap 10 menit, lampu kuning menyala setiap 15 menit, sedangkan lampu bening menyala setiap 20 menit. Apabila pada pukul 09.10 lampu tersebut menyala bersama-sama, pada pukul berapa lagi lampu itu akan menyala bersama untuk kedua kalinya?

Penyelesaian :

Untuk menyelesaikan soal pemecahan masalah di atas, menggunakan konsep KPK. Terlebih dahulu kita mencari KPK bilangan 10, 15 dan 20 dengan cara faktorisasi prima.



Melalui metode faktorisasi prima didapat hasil sebagai berikut:
10 = 2 x 5

15 = 3 x 5
20 = 2 x 2 x 5
Semua faktor adalah 2, 3 dan 5. Ambil pangkat yang terbesar
Untuk 2 pangkat terbesarnya 2^2
Untuk 3 pangkat terbesarnya 3
Untuk 5 pangkat terbesarnya 5
maka didapat
KPK 10, 15 dan 20 = 2 x 2 x 3 x 5 = 60
Dengan demikian, lampu menyala bersama kembali dalam 60 menit ke depan setelah menyala bersama pertama kali. Sehingga: 09.10 + 60 menit = 09.10 + 1 jam (karena 60 menit adalah 1 jam) = 09.10 + 01.00 = 10.10
Jadi lampu tersebut akan menyala kembali untuk kedua kalinya pada pukul 10.10.

5. jika 1998 = $p^s q^t r^u$ dengan p, q, dan r bilangan prima, hitunglah p+q+r+s+t+u?

Penyelesaian :

1998= 2 x 3^3 x 37
Sehingga p+q+r+s+t+u = 2+3+37+1+3+1
=47

4.2. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

a. Pengertian Faktor dan Faktorisasi Prima

Faktor adalah pembagi dari suatu bilangan, yaitu bilangan-bilangan yang membagi habis bilangan tersebut.
Contoh :
Faktor dari 9 adalah 1, 3 dan 9.
Faktor dari 12 adalah 1, 2, 3, 4, 6, dan 12.
Faktor dari 30 adalah 1, 2, 3, 5, 6, 15 dan 30

Faktor persekutuan adalah faktor-faktor yang sama dari dua bilangan atau lebih.
Contoh :
Faktor persekutuan dari 12 dan 28 adalah
Fakor dari 12 adalah 1,2,3,4,6 dan 12
Faktor dari 28 adalah 1,2,4,7,14 dan 28
Jadi, faktor persekutuan dari 12 dan 28 adalah 1,2 dan 4

Faktorisasi prima adalah penjabaran suatu bilangan menjadi perkalian – perkalian bilangan prima. Jadi dengan perkalian beberapa bilangan prima diperoleh hasil bilangan itu.

Contoh :

6 = 2×3 (2 dan 3 adalah bilangan prima)

20 = 2×2×5 (2 dan 5 adalah bilangan prima)

70 = 2×5×7 (2,5 dan 7 adalah bilangan prima)

Faktor prima adalah bilangan-bilangan prima yang terdapat pada faktorisasi prima. Misalkan pada faktorisasi prima diatas:

6 memiliki faktor prima 2 dan 3

20 memiliki faktor prima 2 dan 5

70 memiliki faktor prima 2, 5 dan 7

b. Pengertian FPB

Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dari beberapa bilangan merupakan faktor bersama yang terbesar dari beberapa bilangan. FPB dari dua bilangan atau lebih adalah bilangan terbesar dari faktor-faktor persekutuan bilangan-bilangan itu.

Dalam mencari nilai kpk dari bilangan dapat digunakan dengan metode sebagai berikut:

1) Mencari FPB dengan Faktor Persekutuan

Yang dimaksud dengan faktor persekutuan adalah faktor yang sama dari 2 bilangan ataupun lebih.

Jadi FPB adalah nilai paling besar dari faktor-faktor persekutuan dari 2 bilangan atau lebih itu.

Contoh:

Carilah FPB dari 4, 8 dan 12

Faktor dari 4 adalah = {1, 2, 4}

Faktor dari 8 adalah = {1, 2, 4, 8}

Faktor 12 adalah= {1, 2, 3, 4, 6, 12}

Jadi faktor persekutuan dari ketiga bilangan tersebut adalah 1,2,4

Nilai yang terbesarnya adalah 4, sehingga FPBnya adalah 4

2) Faktorisasi Prima

Mencari FPB menggunakan cara faktorisasi prima yaitu dapat menggunakan pohon faktor yaitu membagi bilangan tersebut hingga menyisakan faktor-faktor prima saja.

Langkah-langkah menentukan FPB denagn faktorisasi prima:

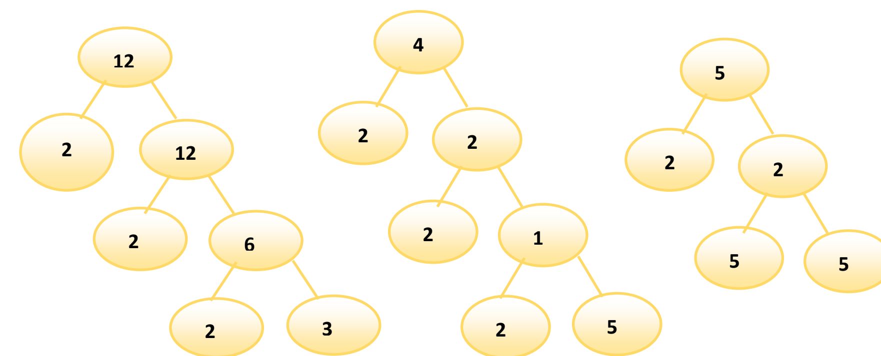
a. Tulislah faktorisasi prima dari setiap bilangan
b. Pilihlah faktor yang sama dan kalikanlah
c. Jika ada faktor yang berpangkat, pilihlah bilangan pangkat terkecil

Contoh :

1. FPB dari 24, 40 dan 50

   Penyelesaian :

   Langkah pertama yaitu dengan membuat pohon faktor



Faktor prima dari 12 adalah $2^3 \times 3$

Faktor prima dari 40 adalah $2^3 \times 5$

Faktor prima dari 50 adalah 2×5^2

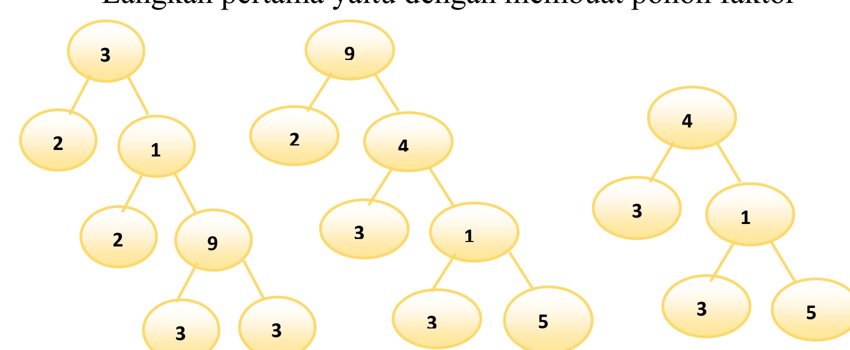
Faktor yang sama adalah 2 maka dipilih faktor 2 yang memiliki pangkat terkecil

Jadi, FPB dari 12, 40 dan 50 adalah 2

2. FPB dari 36, 90 dan 50

   Penyelesaian :

   Langkah pertama yaitu dengan membuat pohon faktor



Faktor prima dari 36 adalah $2^2 \times 3^2$

Faktor prima dari 90 adalah $2 \times 3^2 \times 5$

Faktor prima dari 45 adalah $3^2 \times 5$

Faktor yang sama adalah 3 maka dipilih faktor 2 yang memiliki pangkat terkecil yaitu $3^2 = 9$

Jadi, FPB dari 36, 90 dan 45 adalah $3^2 = 9$

3) Cara Tabel

Cara tabel biasa disebut dengan cara sengkedan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Tuliskan bilangan yang akan ditentukan FPB nya secara mendatar
b. Carilah bilangan prima yang dapat membagi sebagian atau seluruh bilangan tersebut. Untuk mecari bilangan prima sebaiknya pilih bilangan prima dari yang terkecil yaitu 2,3,5,7 dan seterunya
c. Apabila bilangan prima yang dipilih dapat membagi semua bilangan diberi kode (dilingkari atau dikasi tebal tulisannya) dan tuliskan hasil baginya dibawah bilangan yang dibagi.
d. Apabila ada bilangan yang tidak habis dibagi oleh prima pembagi maka tuliskan kembali bilangan tersebut dibawahnya
e. Lakukan terus menerus hingga memperoleh suatu baris yang yang hanya berisi bilangan 1
f. FPB dari bilangan yang dicari adalah perkalian semua bilangan prima yang dapat membagi semua bilangan yang dicari FPB nya atau bilangan prima yang telah diberi kode

Contoh :

1. FPB dari 25, 60 dan 70

   Penyelesaian :

Pembagi	25	60	70
2	25	30	35
2	25	15	35
3	25	5	35
5	5	1	7
5	1	1	7
7	1	1	1

Jadi FPB dari 25, 60 dan 70 adalah 5

2. FPB dari 18, 54 dan 80

   Penyelesaian :

Pembagi	18	54	60
2	9	27	30
2	9	27	15
3	3	9	5
3	1	3	5
3	1	1	5
5	1	1	1

Jadi FPB dari 25, 60 dan 75 adalah 3

3. FPB dari 35, 115 dan 150

   Penyelesaian :

Pembagi	35	115	150
2	35	115	75
3	35	115	25
5	7	23	5
5	7	23	1
7	1	23	1
23	1	1	1

Jadi FPB dari 25, 60 dan 75 adalah 5

c. Soal cerita FPB

1. Dalam acara seminar diikuti oleh 90 guru Matematika dan 72 guru IPA. Dalam sesi diskusi, panitia meminta agar dibentuk kelompok diskusi. Masing-masing kelompok terdiri atas guru-guru fengan jenis guru mapel dan jumlah jumlah sama banyak. Panitia akan membuat sebanyak-banyaknya kelompok tersebut. Banyak guru Matematika setiap kelompok ada . . . .

Penyelesaian:

Permasalahan di atas adalah permasalahan FPB Mari menentukan FPB dari bilangan-bilangan tersebut.

72 $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

40 $= 2 \times 3 \times 3 \times 5$

FPB $= 2 \times 3 \times 3 = 18$

Terbentuk 18 kelompok

Banyak guru Matematika pada setiap kelompok = 90 : 18 = 5 orang.

2. Siswa-siswi SDN Jayamulya III akan membagikan bantuan untuk korban banjir di daerah Cibuaya. Bantuan tersebut berupa 80 kg gula pasir, 100 kg beras dan 150 bungkus mi instan. Jika setiap warga mendapat ketiga jenis barang bantuan tersebut sama berat atau sama banyak, berapa warga paling banyak yang mendapat bantuan dari siswa-siswi tersebut?

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan soal pemecahan masalah di atas, menggunakan konsep FPB. Terlebih dahulu kita mencari FPB dari bilangan 80, 100 dan 150 dengan cara faktorisasi prima.

Dari hasil faktorisasi prima didapat

80= 2 x 2 x 2 x 2 x 5

100 = 2 x 2 x 5 x 5

150 = 2 x 3 x 5 x 5

FPB (80, 100) dan 150 = 2 x 5 = 10

Jadi warga paling banyak yang mendapat bantuan dari siswa-siswi tersebut yaitu 10 orang.

3. Panitia O2SN tingkat Kecamatan Cibuaya menyediakan paket hadiah yang terdiri atas 40 alat tulis, 60 buku cerita dan 80 buku tulis. Setiap paket berisi ketiga jenis barang tersebut masing-masing sama banyak.
   a. Berapa paket paling banyak yang disediakan panitia?

   b. Berapa banyaknya alat tulis, buku cerita dan buku tulis untuk setiap paket hadiah?

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan soal pemecahan masalah di atas, menggunakan konsep FPB. Terlebih dahulu kita mencari FPB dari bilangan 40, 60 dan 80 dengan cara faktorisasi prima.

Dari hasil faktorisasi prima didapat

40= 2 x 2 x 2 x 5

60 = 2 x 2 x 3 x 5

80 = 2 x 2 x 2 x 2 x 5

FPB 40, 60 dan 80 = 2 x 2 x 5 = 20

Jadi paket hadiah paling banyak adalah 20 paket.

a. Banyaknya alat tulis pada setiap paket = banyak alat tulis : FPB= 40 : 20 = 2 alat tulis

b. Banyaknya buku cerita pada setiap paket = banyak buku cerita : FPB = 60 : 20 = 3 buku cerita.

c. Banyaknya buku tulis pada setiap paket = banyak buku tulis: FPB = 80 : 20 = 4 buku tulis.

4. Diketahui FPB dan kpk dari 72 dan x berturut-turut adalah 3 dan 1800. Tentukan nilai x tersebut!

Jawab :

Diketahui : FPB dari 72 dan x adalah 3

Kpk dari 72 dan x adalah 1800

Berdasarkan suatu teorema misalkan a dan b adalah suatu bilangan bulat, d adalah fpb (a,b) dan l adalah kpk (a,b) maka ab = Fpb (a,b) x Kpk (a,b)

Sehingga diperoleh

Fpb (72, x) $\times$ kpk (72, x) = 72 $\times$ X

$3 \times 1800 = 72\ X$

$X = 5400 / 72$

$X = 75$

Jadi diperoleh nilai X= 75

LATIHAN!

1. Tentukan kelipatan dari bilangan berikut :
   a. 12
   b. 15
   c. 25

d. 30
e. 35

2. Tentukan faktorisasi prima dari bilangan berikut:
   a. 250
   b. 560
   c. 1250
   d. 1998
   e. 2580

3. Tentukan faktor persektuan dari bilangan berikut:
   a. 70
   b. 120
   c. 270
   d. 800
   e. 1560

4. Tentukan KPK dari bilangan berikut:
   a. 12, 15 dan 25
   b. 30, 45 dan 70
   c. 40, 60, dan 90
   d. 125, 150 dan 200

5. Tentukan FPB dari bilangan berikut :
   a. 18, 24 dan 30
   b. 50, 65 dan 70
   c. 120, 160, dan 180
   d. 250, 300 dan 450

5. Ibu pergi berbelanja ke pasar setiap 4 hari sekali. Bibi berbelanja ke pasar setiap 7 hari sekali. Pada tanggal 11 Maret 2020 Ibu dan Bibi berbelanja ke pasar bersama-sama. Tanggal berapa Ibu dan Bibi akan ke pasar bersama kembali untuk kedua kalinya?

6. Rian mempunyai 12 kelereng hijau, 16 kelereng merah dan 20 kelereng kuning. Kelereng-kelereng tersebut akan dimasukkan dalam beberapa kantong dengan sama banyak. Berapa banyak kantong yang diperlukan rian?

7. Tiga orang petugas jaga malam memukul kentongan secara berkala. Petugas 1 memukul kentongan setiap 12 menit, petugas 2 memukul kentongan setiap 24 menit dan petugas 3 memukul kentongan setiap 8 menit. Pada pukul 20. 20. 32 mereka memukul kentongan bersama-sama. Pada pukul berapa mereka akan memukul kentongan secara bersamaan ?

8. Ema membagikan 75 buku tulis dan 50 pensil kepada anak-anak yatim piatu. Setiap buku tulis dan pensil akan dibagikan kepada anak-anak dengan jumlah yang sama banyak. Berapa anak yatim yang bisa mendapatkan buku tulis dan pensil? Berapa buku tulis dan pensil untuk masing-masing anak?

9. Ibu membeli 28 kue keju dan 40 kue donat. Kue-kue tersebut akan di masukan kedalam kotak, jika setiap kotak memuat jumlah kue keju dan kue donat dalam jumlah yang sama, berapa banyak kotak yang diperlukan?

10. Fajri meminjam buku di perpustakaan setiap 6 hari sekali.
    Taufik meminjam buku di perpustakaan setiap 8 hari sekali.
    Tiar meminjam buku di perpustakaan setiap 12 hari sekali.

    a. Jika hari ini mereka meminjam buku bersama-sama, berapa hari lagi mereka akan meminjam buku di hari yang sama?

    b. Jika hari ini adalah hari Senin, hari apa lagi mereka meminjam buku di hari yang sama?

BAB V
PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN

5.1. Persamaan Linier Satu Variabel

A. Kalimat Tertutup Dan Kalimat Terbuka

1. Kalimat Tertutup (Pernyataan)

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menjumpai berbagai macam kalimat, misalkan sebagai berikut :

a. Indonesia adalah Negara di kawasan Asia Tenggara.
(kalimat tersebut sepakat dikatakan benar)
b. Semua benda yang dipanaskan akan memuai.
(kalimat tersebut, kita katakan salah. Karena terdapat benda yang tidak memuai ketika dipanaskan, misalnya kayu)

Berdasarkan dua contoh di atas, dalam kehidupan sehari-hari terdapat kalimat yag benar dan kalimat salah. Sama halnya dengan kalimat-kalimat di atas, dalam dunia matematika kita juga memiliki kalimat pernyataan. Perhatikan kalimat berikut ini.

a. $6 + 4 = 10$
b. 9 adalah bilangan genap.
c. Bilangan prima selalu bilangan ganjil.

Dari ketiga kalimat di atas terlihat bahwa ruang lingkup pembahasan hanya ada dua kemungkinan, yaitu benar atua salah. Dengan rincian kalimat (1) menyatakan kalimat yang benar karena memberikan informasi yanng sesuai dengan keadaan yang ada. Kalimat (2) dan (3) menyatakan kalimat yang salah karena informasi yang diberikan bertentangan dengan kenyataan yang ada.
Kalimat benar atau kalimat salah disebut *pernyataan atau kalimat tertutup.*

a. *Kalimat yang salah* adalah kalimat yang menyatakan hal-hal yang tidak sesuai dengan kenyataan/ keadaan yang berlaku umum.
b. *Kalimat yang benar* adalah kalimat yang menyatakan hal-hal yang sesuai dengan keadaan, kenyataan yang berlaku umum.
c. Kalimat yang bernilai benar atau salah disebut *kalimat tertutup* atau sering disebut *pernyataan.*

2. Kalimat Terbuka, Variabel, dan Konstanta

Perhatikan kalimat berikut :

a. $x + 5 = 12$
b. $x - 2 = 5$

Belum dapat mengatakan kalimat itu benar atau salah, sebab nilai *(x)* belum diketahui. Bila lambang *(x)* diganti dengan lambang bilangan cacah, barulah itu dapat dikatakan kalimat itu benar atau salah. Jika *(x)* diganti dengan “3” , kalimat itu bernilai salah ; tetapi bila *(x)* diganti dengan 7 , kalimat itu bernilai benar. Lambang *(x)* dapat pula diganti menggunaan huruf-huruf kecil dalam abjad lainnya, yaitu ; *a, b, c, … x,y,z* dari bentuk diatas

$x + 5 = 12$ (kalimat terbuka)
$3 + 5 = 12$ (kalimat pernyataan bernilai salah)
$7 + 5 = 12$ (kalimat pernyataan bernilai benar)
$7 - 2 = 5$ (kalimat pernyataan bernilai benar)

Huruf x pada $x + 5 = 12$ dan $x - 2 = 5$ disebut *variabel* (peubah), sedangkan 5, 2, dan 12 disebut konstanta.

a. Kalimat terbuka adalah kalimat yang memuat variabel dan belum dapat diketahui nilai kebenarannya.
b. Variabel (peubah) adalah lambang (simbol) pada kalimat terbuka yang dapat diganti oleh sebarang anggota himpunan yang telah ditentukan
c. Konstanta adalah lambang yang menyatakan suatu bilangan

3. Penyelesaian Kalimat Terbuka

Setiap kalimat terbuka memuat variabel yang dapat diganti dengan satu atau beberapa anggota yang telah ditentukan.
Pengganti dari variabel yang membuat kalimat terbuka menjadi kalimat bernilai benar disebut penyelesaian.
Contoh :

a. $x + 6 = 25.$
Pengganti x yang benar adalah 19.
Jadi, penyelesaian dari kalimat terbuka tersebut adalah $x = 19$

b. *Suatu hari Ricki mambawa sebuah tas yang berisi buku. Sebelum tas dibuka Ricki berkata pada temannya ”banyak buku dalam tas ada 9 buah”. Bagaimana pendapatmu tentang ucapan Ricki ? benar atau salah ?*

Perhatikan kalimat ” 9 dikurangi **suatu bilangan** hasilnya adalah 5 ”
Kita tidak dapat menentukan apakah kalimat itu benar atau salah, karena *”suatu bilangan ”* pada kalimat itu belum diketahui nilainya. Benar atau salahnya bergantung pada berapakah *” suatu bilangan ”* itu. Jika *” suatu bilangan”* diganti dengan 4, maka kalimat itu menjadi ” 9 dikurangi 4 hasilnya 5 ”, kalimat ini adalah kalimat yang benar. Jika *” suatu bilangan”* diganti dengan 2, maka kalimat itu menjadi ” 9 dikurangi 2 hasilnya 5 ”, kalimat ini adalah kalimat yang salah. Kalimat yang belum bisa ditentukan benar atau salahnya dinamakan kalimat terbuka. *” suatu bilangan ”* pada kalimat di atas belum diketahui nilainya. Dalam matematika, sesuatu yang belum diketahui nilainya dinamakan variabel atau peubah. Biasanya disimbolkan dengan huruf kecil x, y, a, n atau bentuk yang lain. *”9 dikurangi suatu bilangan hasilnya adalah 5”*. Jika suatu bilangan diganti dengan x, maka kalimat itu dapat ditulis dalam simbol matematika 9 – x = 5.

B. Pengertian Kesamaan, Persamaan Liniar Satu Variabel (PLSV), dan Persamaan yang Ekuivalen

1. Kesamaan

Kesamaan adalah kalimat pernyataan yang memuat hubungan sama dengan (=). Artinya, kalimat tersebut sudah jelas nilai kebenarannya baik benar ataukah salah. Contoh :

a. $2+3=10$. (kesamaan yang bernilai salah)
b. $5-3=2$. (kesamaan yang bernilai benar)

Akan tetapi, tidak semua kesamaan tidak memiliki variabel, atau dengan kata lain, tidak semua kalimat terbuka yang memuat hubungan sama dengan (=) merupakan persamaan. Perhatikan beberapa contoh berikut ini.

a. $x-3=x-3$
b. $2x+5=x+x+5$

Pada contoh di atas yaitu, $x-3=x-3\ dan\ 2x+5=x+x+5$ merupakan sebuah kesamaan, karena jika *x* diganti dengan sebarang bilangan, maka selalu diperoleh kalimat benar. Dengan demikian $x-3=x-3\ dan\ 2x+5=x+x+5$ bukan kalimat terbuka, karena merupakan kalimat benar atau disebut **kesamaan**.

2. Pengertian Persamaan Linier Satu Variabel

Kalimat terbuka yang dihubungkan dengan tanda sama dengan (=), disebut persamaan. Sedangkan Persamaan Linier Satu Variabel adalah kalimat terbuka yang dihubungkan tanda sama dengan (=) dan hanya mempunyai satu variabel berpangkat satu (1).

Bentuk umum persamaan linier satu variabel adalah $\boldsymbol{ax+b=0}$

Contoh :

1. $x+3=7$
2. $3a+4=1$

Pada contoh diatas *x* dan *a* adalah variabel (peubah) yang dapat diganti dengan sebarang bilangan yang memenuhi .

3. Persamaan yang Ekuivalen

Perhatikan persamaan-persamaan berikut !

i. $x+4=11$

Jika *x* diganti dengan 7, maka persamaan tersebut menjadi $7+4=11$, yang merupakan *kalimat benar.* Jadi, penyelesaiannya adalah $x=7$

ii. $2x+8=22$

Jika *x* diganti dengan 7, maka persamaan tersebut menjadi $2\times7+8=22$, yang merupakan *kalimat benar.* Jadi, penyelesaiannya adalah $x=7$

iii. $2x+12=26$

Jika *x* diganti dengan 7, maka persamaan tersebut menjadi $2\times7+12=26$, yang merupakan *kalimat benar.* Jadi, penyelesaiannya adalah $x=7$

Ketiga persamaan di atas memiliki penyelesaian yang sama, yaitu *x* = 7. Persamaan-persamaan seperti di atas disebut persamaan yang ekuivalen.

Persamaan $\boldsymbol{x+4=11 \Leftrightarrow 2x+8=22}$

Dua persamaan atau lebih yang memiliki penyelesaian yang sama disebut persamaan yang **ekuivalen**.

Notasi untuk ekuivalen pada persamaan adalah $\Leftrightarrow$

C. Penyelesaian Persamaan Linier Satu Variabel (PLSV)

Misalkan, Deny ingin menjawab secara mencongkak soal persamaan linear satu variabel 3x = 9 dengan x anggota bilangan asli. Dia mengganti x dengan 3 sehingga kalimat terbuka 3x = 9 menjadi benar.

$3x = 9 \Rightarrow 3 \,.\, 3 = 9$, $x = 3$ adalah penyelesaian/ jawaban PLSV $3x = 9$. Jadi himpunan penyelesaian dari $3x = 9$ adalah $\{3\}$.

Penyelesaian suatu persamaan linear satu variabel adalah bilangan pengganti dari variabel pada daerah definisi persamaan yang membuat persamaan menjadi pernyataan yang benar.

1. Menyelesaikan Persamaan dengan Cara Substitusi

Menyelesaikan persamaan dengan cara substitusi artinya menyelesaikan persamaan dengan cara **mengganti *variabel*** dengan bilangan-bilangan yang telah ditentukan, sehingga persamaan tersebut menjadi **kalimat benar**.

Contoh :

Tentukan penyelesaian dari persamaan $2x - 1 = 5$

Jawab :

Untuk $x = 1$, maka $2 \times 1 - 1 = 5$ (merupakan kalimat salah).

Untuk $x = 2$, maka $2 \times 2 - 1 = 5$ (merupakan kalimat salah).

Untuk $x = 3$, maka $2 \times 3 - 1 = 5$ (merupakan kalimat **benar**).

Untuk $x = 4$, maka $2 \times 4 - 1 = 5$ (merupakan kalimat salah).

Jadi, penyelesaiannya adalah $x = 3$

2. Menyelesaikan Persamaan dengan Cara Menambah atau Mengurangi Kedua Ruas dengan Bilangan yang Sama

Perhatikan kesamaan-kesamaan berikut ini !

a. $3 + 4 = 7$ (kalimat **benar**)
   $3 + 4 + 10 = 7 + 10$ (kedua ruas ditambah 10)
   $17 = 17$ (kalimat **benar**)

b. $5 + 6 = 11$ (kalimat **benar**)
   $5 + 6 - 3 = 11 - 3$ (kedua ruas dikurangi 3)
   $8 = 8$ (kalimat **benar**)

Ternyata kesamaan tetap bernilai benar jika kedua ruas *ditambah atau dikurangi dengan bilangan yang sama*.

Selanjutnya perhatikan persamaan-persamaan berikut ini !

a. $x + 6 = 10$
   $x + 6 - 6 = 10 - 6$ (kedua ruas dikurangi 6)
   $x - 0 = 4$
   $x \quad = 4$
   Pengecekkan $x + 6 = 10$
   Untuk $x = 4$, maka $4 + 6 = 10$ (kalimat **benar**).
   Jadi penyelesaiannya adalah $x = 4$.

b. $x - 7 = -12$
   $x - 7 + 7 = -12 + 7$ (kedua ruas ditambah 7)
   $x - 0 \quad = -5$
   $x \quad = -5$
   Pengecekkan $x - 7 = -12$
   Untuk $x = -5$, maka $-5 - 7 = -12$ (kalimat **benar**).
   Jadi penyelesaiannya adalah $x = -5$.

3. Menyelesaikan Persamaan dengan Mengalikan atau Membagi Kedua Ruas Persamaan dengan Bilangan yang Sama

Perhatikan kesamaan-kesamaan berikut!

a. $3 \times 7 = 21$ (kalimat benar)
   $3 \times 7 \times 2 = 21 \times 2$ (kedua ruas dikalikan 2)
   $42 = 42$ (kalimat **benar**)

b. $2x \times 5 = 20$
   $\frac{1}{5} \times 2x \times 5 = \frac{1}{5} \times 20$ (Kedua ruas dikali $\frac{1}{5}$)
   $2x = 4$
   $\frac{1}{2} \times 2x = \frac{1}{2} \times 4$ (Kedua ruas dikali $\frac{1}{2}$)

$$x = 2$$

Pembuktian:

$$2x \times 5 = 20$$

Untuk $x = 2$, maka $2(2) \times 5 = 20$

$$4 \times 5 = 20$$

$$20 = 20 \quad \text{(kalimat } \textbf{benar}\text{)}$$

Jadi penyelesaiannya adalah $x = 2$.

Ternyata kalimat kesamaaan tetap bernilai benar jika kedua ruas dikalikan atau dibagi dengan bilangan yang sama.

4. Grafik Penyelesaian Persamaan dengan satu Variabel

Pada garis bilangan, grafik penyelesaian dari suatu persamaan dinyatkan dengan noktah atau titik. Perhatikan penyelesaian persamaan-persamaan berikut beserta grafiknya!

$$2x - 1 = 5$$

$$2x - 1 + 1 = 5 + 1 \qquad \text{(kedua ruas ditambah 1)}$$

$$2x = 6$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \qquad \text{(kedua ruas dibagi 2)}$$

$$x = 3 \qquad \text{(kalimat } \textbf{benar)}$$

Penyelesaiannya adalah $x = 3$,

Pembuktian :

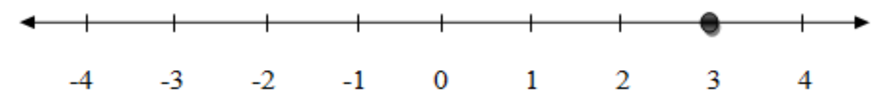
$$2x - 1 = 5$$

Untuk $x = 3$, maka $2(3) - 1 = 5$

$$5 = 5 \qquad \text{(kalimat } \textbf{benar)}$$

Jadi penyelesaiannya adalah $x = 3$.

Grafik penyelesaian dari persamaan di atas adalah:



5. Menyelesaikan Persamaan Bentuk Pecahan

Persamaan bentuk pecahan adalah persaman yang variabelnya memuat pecahan, atau bilangan konstantanya berbentuk pecahan atau keduanya memuat pecahan.

Untuk penyelesaian persamaan bentuk pecahan dengan cara yang lebih mudah, terlebih dahulu merubah persamaan tersebut menjadi persamaan lain yang ekuivalen tetapi tidak lagi memuat pecahan. Hal ini dapat dilakukan dengan cara mengalikan kedua ruas persamaan dengan Kelipatan Persekutuan Terkecil (**KPK**) dari penyebut-penyebutnya.

Selain itu, persamaan bentuk pecahan dapat juga deselesaikan tanpa mengubah bentuk persamaan.

Contoh:

1. Tentukan penyelesaian dari persamaan $\frac{2}{5}(3x - 2) = 6$.

Jawab:

$$\frac{2}{5}(3x - 2) = 6$$

$$5 \times \frac{2}{5}(3x - 2) = 5 \times 6 \leftarrow \text{-- Kedua ruas dikalikan 5}$$

$$2(3x - 2) = 30$$

$$6x - 4 = 30$$

$$6x - 4 + 4 = 30 + 4 \leftarrow \text{-- Kedua ruas ditambah 4}$$

$$6x = 34$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{34}{6} \leftarrow \text{---- kedua ruas dibagi 6}$$

$$x = 5\frac{4}{6}$$

Jadi penyelesaiannya adalah $= 5\frac{4}{6}$

6. Penerapan Persamaan dalam Kehidupan

Untuk menyelesaian soal-soal dalam kehidupan sehari-hari yang berbentuk cerita, maka langkah-langkah berikut dapat membantu mempermudah penyelesaian.

a. Jika memerlukan diagram (sketsa), misalnya untuk yang berhubungan dengan geometri, buatlah diagram (sketsa) berdasarkan kalimat cerita itu.

b. Menerjemahkan kalimat cerita menjadi kalimat matematika dalam bentuk persamaan.

c. Menyelesaikan persamaan tersebut.

Contoh:

1. Umar dan Ali adalah kakak beradik. Hari ini Ali berulang tahun yang ke 6. Saat ini usia Umar 10 tahun lebih tua dari pada umur Ali. Barapakah usia Umar saat ini?

Jawab :

Usia Umar lebih tua dari usia Ali.
Usia Ali saat ini adalah 6 tahun.
Dimisalkan usia Umar saat ini adalah x tahun.
Maka,
x = Usia Umar saat ini
x – 10 = Usia Ali saat ini
x = Usia Ali saat ini
Sehingga,

$x - 10 = 6$

$x - 10 + 10 = 6 + 10$ (kedua ruas ditambah 10)

$x = 16$

Jadi, umur Umar saat ini adalah 16 tahun.

5.2. Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

A. Definisi

Misal *a, b* adalah bilangan real, dengan $a \neq 0$.
Pertidaksamaan Linear Satu Variabel (PtLSV) adalah kalimat terbuka yang memiliki sebuah variabel yang dinyatakan dengan bentuk $ax + b > 0$ atau $ax + b < 0$ atau $ax + b \leq 0$ atau $ax + b \geq 0$.

Pertidaksamaan yang memuat satu variabel dan pangkat variabelnya adalah satu disebut pertidaksamaan linier satu variabel.

Contoh **:**

a. 3 kurang dari 5 ditulis $3 < 5$
b. 8 lebih dari 4 ditulis $8 > 4$
c. x tidak lebih dari 9 ditulis $x \leq 9$
d. dua kali y tidak kurang dari 16 ditulis $2y \geq 16$

B. Sifat-Sifat Pertidaksamaan

i. Jika kedua ruas pertidaksamaan ditambah atau dikurang dengan sebuah bilangan maka tanda pertidaksamaan tetap.
Contoh : Berapakah nilai x yang memeuhi pertidaksamaan $4 + x > 1$?
Jawab :

$4 + x > 1$

$4 - 4 + x > 1 - 4$ *(kedua ruas dikurangi 4)*

$x > -3$

Jadi, tanda pertidaksamaan tetap

ii. Jika kedua ruas pertidaksamaan dikali atau dibagi dengan sebuah bilangan positif maka tanda pertidaksamaan tetap.
Contoh: Berapakah nilai x yang memeuhi pertidaksamaan $4 - 2x < 8$?
Jawab :

$2x < 8$

$\frac{2x}{2} < \frac{8}{2}$ *(kedua ruas bibagi 2)*

$x < 4$

Jadi, tanda pertidaksamaan tetap

iii. Jika kedua ruas pertidaksamaan dikali atau dibagi dengan sebuah bilangan negatif maka tanda pertidaksamaan harus diubah (< menjadi >, ≤ menjadi ≥, dan sebaliknya).
Contoh : Berapakah nilai x yang memeuhi pertidaksamaan $-2x \geq 30$?
Jawab :
$-2x \geq 30$

$-\frac{2x}{2} \geq \frac{30}{2}$ *(kedua ruas dibagi 2)*

$-x \geq 15$ *(Kedua ruas dibagi -1)*

$x \leq -15$

Jadi, tanda pertidaksamaan harus diubah

Contoh:

1. Pak Fredy memiliki sebuah mobil box pengangkut barang dengan daya angkut tidak lebih dari 500 kg. Berat Pak Fredy adalah 60 kg dan dia akan mengangkut kotak barang yang setiap kotak beratnya 20 kg.

a. Berapa kotak paling banyak dapat diangkut Pak Fredy dalam sekali pengangkutan?

b. Jika Pak Fredy akan mengangkut 110 kotak, paling sedikit berapa kali pengangkutan kotak itu akan habis?

Penyelesaian :

Agar masalah di atas dapat kita selesaikan, terlebih dahulu kita ubah ke dalam bentuk model matematika.
Langkah-langkah mengubahnya adalah:
Misalkan: x = banyaknya kotak barang yang diangkut dalam mobil box.
Mengubah kata 'tidak lebih' ke dalam simbol matematika yaitu: ≤
Sehingga model matematikanya adalah: $20x + 60 \leq 500$
Berat satu kotak = 20 kg
Berat = $20 \times x$ kg = $20x$
Berat Pak Fredy = 60
Berat keseluruhan = $20x + 60$

a. Paling banyak kotak yang dapat diangkut pak Fredy dalam sekali pengangkutan adalah nilai x paling besar pada penyelesaian pertidaksamaan $20x + 60 \leq 500$. Mengapa? Berdiskusilah dengan temanmu.
Penyelesaian pertidaksamaan ini kita lakukan sebagai berikut.
$20x + 60 \leq 500$
$20x + 60 - 60 \leq 500 - 60$ *(kedua ruas dikurang 60)*
$20x \leq 440$ *(kedua ruas dibagi 20)*
$x \leq 22$
x paling besar yang memenuhi pertidaksamaan $x \leq 22$ adalah 22. Maka kotak yang dapat diangkut pak Fredy dalam sekali pengangkutan paling banyak adalah 22 kotak.

b. Pengangkutan kotak paling sedikit dapat terjadi jika Pak Fredy mengangkut 22 kotak pada setiap pengangkutan. Apakah kamu setuju? Berdiskusilah dengan temanmu.
Banyak pengangkutan paling sedikit = $\frac{110}{22}$ = 5 kali.
Sehingga banyak pengangkutan paling sedikit untuk mengangkut barang sebanyak 110 kotak adalah 5 kali pengangkutan.

Latihan !

1. Tentukan yang merupakan persamaan linier satu variabel dan berikan alasan nya.
   a. $x + y + z = 20$
   b. $3x^2 + 2x - 5 = 0$
   c. $x + 9 = 12$
   d. $3a - 6 = 7 + a$
   e. $2x + y = 1$
   f. $3x = 1$
   g. $3xy + 2 = 5$
   h. $\frac{1}{3}(2y - 8) = 4$
2. Tentukan penyelesaian dari persamaan $\frac{4}{7}(2x - 1) = 9$.
3. Tentukan penyelesaian dari persamaan $\frac{4x-1}{x-3} = 5$
4. Diantara persamaan berikut tunjukan persamaan yang ekuivalen!
   i. $x - 2 = 3$
   ii. $3x - 2 = 7$

iii. $4x - 8 = 12$
iv. $9x - 6 = 21$
v. $3x - 3 = 9$
vi. $9x – 9 = 27$

5. Carilah himpunan penyelesaian pertidaksamaan berikut ini.
   a. $2 – 3x \geq 2x + 12$
   b. $4x + 1 < x – 8$
   c. $\frac{4}{3}(3x - 6) > 12$
6. Setiap hari Fitri menyisihkan uang jajannya untuk ditabung dirumah. Setelah 11 hari uang Fitri menjadi Rp154.000,00. Berapa rupiah Fitri menyisihkan uangnya setiap hari ?
7. Anton membantu ayahnya untuk membuat kerangka balok yang akan digunakan sebagai kandang anak ayam. Suatu model kerangka balok terbuat dari kawat dengan ukuran panjang (x+5) dm, lebar (x-2) dm, dan tinggi x dm.
   a. Tentukan model matematika dari persamaan panjang kawat yang diperlukan dalam x!
   b. Jika panjang kawat yang digunakan seluruhnya tidak lebih dari132 dm, tentukan ukuran maksimum balok tersebut!
8. Umur Tasya dan Dina masing-masing $(5x – 2)$ dan $(2x + 4)$. Jika umur Tasya lebih dari umur Dina, maka tentukan batas-batas nilai x.
9. Permukaan sebuah meja berbentuk persegi panjang dengan panjang 16x cm dan lebar 10xcm. Jika luasnya tidak kurang dari 40 dm^2, tentukan ukuran minimum permukaan meja tersebut
10. Seorang petani mempunyai sebidang tanah berbentuk persegi panjang. Lebar tanah tersebut 6 m lebih pendek dari panjangnya. Jika keliling tanah 60 m, tentukanluas tanah petani tersebut.

BAB VI
RELASI DAN FUNGSI

6.1. Relasi

a. Pengertian relasi

Relasi merupakan hubungan antara anggota pada suatu himpunan dengan anggota himpunan yang lainnya. Relasi adalah kalimat matematika yang memasangkan unsur-unsur dari suatu himpunan ke suatu himpunan yang lain. Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah pemasangan anggota himpunan A ke anggota himpunan B.
Contoh :
A = { Rupiah, Rupee, Baht, Ringgit}
B = { Indonesia, India, Thailand, Malaysia}
Anggota himpunan A terdiri atas nama-nama mata uang dan anggota himpunan B terdiri atas nama-nama negara. Jika diperhatikan maka diperoleh relasi antara anggota himpunan A dan B adalah sebagai berikut:

Rupiah merupakan mata uang Indonesia
Ruppe merupakan mata uang India
Bhat merupakan mata uang Thailand
Ringgit merupakan mata uang Malaysia

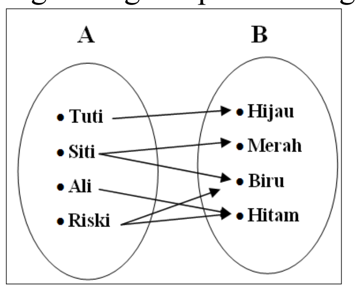
b. Cara menyatakan relasi

Untuk menyatakan relasi antara dua himpunana dapat digunakan 3 cara yaitu:

1) Diagram panah

Diagram panah merupakan cara yang paling mudah untuk menyatakan suatu relasi. Diagram ini membentuk pola dari suatu relasi kedalam bentuk gambar arah panah yang menyatakan hubungan antar anggota himpunan A dengan anggota himpunan B.
Contoh:
Misalnya 4 orang anak yaitu Tuti, Siti, Ali dan Riski. Mereka diminta untuk menyebutkan warna favorit mereka.

Tuti menyukai warna hijau, Siti menyukai warna merah dan biru, Ali menyukai warna hitam dan Riski menyukai warna hitam dan biru. Dari hasil uraian diatas terdapat dua buah himpunan. Himpunan pertama adalah himpunan anak yang dimisalkan sebagai himpunan A dan himpunan kedua adalah warna yang dimisalkan sebagai himpunan B. hubungan antara himpunan A dan himpunan B dapat diiliustrasikan dengan diagram panah sebagai berikut:



Jadi dapat disimpulkan bahwa diagram panah diatas merupakan relasi antara anak dan warna yang disukai. Relasi antara kedua himpunan tersebut dapat dinyatakan dengan panah-panah yang memasangkan anggota himpunan A dengan anggota himpunan B

2) Himpunan Pasangan Berurutan

Menyatakan relasi dengan himpunan pasangan berurutan yaitu dengan cara memasangkan himpunan A dan himpunan b secara berurutan dengan anggota himpunan A ditulis pertama dan anggota himpunan B menjadi pasangannya

Contoh :

Misalnya 4 orang anak yaitu Tuti, Siti, Ali dan Riski. Mereka diminta untuk menyebutkan warna favorit mereka. Tuti menyukai warna hijau, Siti menyukai warna merah dan biru, Ali menyukai warna hitam dan Riski menyukai warna hitam dan biru. Dari hasil uraian diatas terdapat dua buah himpunan yaitu :

Misalkan : A = {Tuti, Siti, Ali, Riski}
B = {Hijau, Merah, Biru, Hitam}

Himpunan pasangan berurutan adalah {(Tuti,Hijau), (Siti,Merah), (Siti, Biru), (Ali, Hitam), (Riski, Hitam), (Riski, Biru)}

Jadi relasi antara himpunan A dengan himpunan B dinytkn sebagai himpunan pasangan berurutan (x,y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$

3) Diagram kartesius

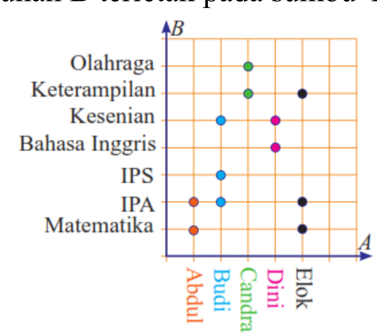
Diagram kartesius merupakan diagram yang terdiri dari sumbu X dan sumbu Y. pada diagram kartesius anggota himpunan A terletak pada sumbu X sedangkan anggota himpunan B terletak pada sumbu Y.

Contoh :

Misalnya 4 orang anak yaitu Abdul, Budi, Candra, Dini dan Elok. Mereka diminta untuk menyebutkan mata pelajaran yang mereka sukai. Abdul menyukai mata pelajaran IPA dan Matematika, Budi menyukai mata pelajaran IPA, IPS dan Kesenian, Candra menyukai mata pelajaran Keterampilan dan Olah raga, Dini menyukai mata pelajaran Bahasa Ingris dan Kesenian dan Elok menyukai mata pelajaran Matematika IPA dan Keterampilan. Dari hasil uraian diatas terdapat dua buah himpunan yaitu :

Misalkan : A = { Abdul, Budi, Candra, Dini, Elok }
B = {Matematika, IPA, IPS, Bahasa Ingris, Kesenian, Keterampila, Olah raga}

Berikut akan dinyatakan dalam diagram kartesius dengan anggota himpunan A terletak pada sumbu X sedangkan anggota himpunan B terletak pada sumbu Y



c. Sifat-sifat Relasi

1) Relasi Invers (R^{-1})

Misalkan R adalah sebuah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Invers dari R dilambangkan dengan R^{-1} adalah relasi dari himpunan B ke himpunan A yang mengandung semua pasangan terurut yang bila dipertukarkan masih termasuk dalam R.

Relasi invers dinotasikan dengan $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$

Contoh :

1. P = { 1,2,3} dan Q = {1,4,9} dimana P,Q ∈ R. Jika P akar dari Q maka:

   $R = \{(1,1), (2,4), (3,9)\}$

   $R^{-1} = \{(1,1), (4,2), (9,3)\}$

2. Misalkan A={1,2,3}, B={a,b} dan relasi R={(1,a), (2,a), (2,b), (3,a)} merupakan relasi dari A pada B. invers dari relasi R adalah

   $R^{-1} = =\{(a,1), (a,2),(b,2), (a,3)\}$

2) Relasi Simetrik

Relasi R pada himpunan A disebut simetris jika a,b ∈ R maka b,a ∈ R untuk semua a,b ∈ A

Contoh :

1. Diketahui A = {1,2,3}. Pada A didefinsikan relasi R = {(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)}. Pada relasi R disebut simetris
2. Diketahui B={2,4,5}. Pada B didefinisikan relasi R = {(x,y) | x kelipatan y, x,y∈B},

   R = {(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)}. Relasi R tersebut tidak bersifat simetris karena (4,2)∈R tetapi (2,4)∉R

3) Relasi Refleksif

Relasi R pada himpunan A disebut refleksif jika (a,a)∈R untuk setiap a∈A dan setiap elemen didalam A berhubungan dengan diinya sendiri. Sedangkan jika relasi R pada himpunan A tidak refleksif jika ada a ∈ A tetapi tidak terdapat (a,a)∉R

Contoh:

1. Misalkan A ={ 1,2,3,4} dan relasi R adalah relasi "≤" yang didefinisikan pada himpunan A maka:

   R = {(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3), (3,3), (3,4), (4,4)}

   Terlihat bahwa (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) merupakan unsur dari R. Dengan demikian R dinamakan bersifat refleksif

2. Misalkan P = { 2,3,4,8,9,15} jika relasi R pada himpunan P didefinisikan dengan aturan (a,b) ∈ R jika a faktor prima dari b

   Perhatikan bahwa (4,4)∉R

   Jadi dapat disimpulkan bahwa R tidak bersifat refleksif.

4) Relasi Anti Simetrik

Relasi R pada himpunan A disebut antisimetris jika (a,b)∈R dan (b,a)∈R maka (a,c)∈R, untuk semua a,b,c∈A

Contoh:

1. Diketahui B={2,4,5}. Pada B didefinisikan relasi R = {(x,y) | x kelipatan y, x,y∈B}dengan demikian

   R = {(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)}. Relasi R tersebut bersifat antisimetris

1. Diketahui A = {1,2,3}.

   Pada A didefinisikan relasi R = {(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)}. Relasi R tersebut tidak bersifat anti simetris karena terdapat (1,2) ∈ R dan (2,1) ∈ R tetapi 1≠2

5) Relasi Transitif

Relasi R pada himpunan A disebut transitif jika (a,b)∈R maka (a,c)∈R untuk semua a,b,c ∈ R

Contoh:

1. diketahui A = {1,2,3}

Pada A didefinisikan relasi R = {(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)} Relasi R tersebut bersifat transitif.

2. Relasi R = {(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3)} yang didefinisikan pada himpunan A ={1,2,3} tidak bersifat transitif, karena terdapat (1,2) $\in$ R dan (2,3) $\in$ R tetapi (1,3) $\notin$ R.

6.2. Fungsi

a. Pengertian Fungsi

Fungsi atau pemetaan adalah suatu relasi khusus antara anggota-anggota dua buah himpunan. Fungsi dapat didefinisikan sebagai suatu relasi antara anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B disebut Fungsi (pemetaan) jika dan hanya jika relsi tersebut mengkaitkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B.

Suatu fungsi biasanya disajikan dengan lambang f. Jika fungsi f mengkaitkan anggota-anggota himpunan A, maka dikatakan bahwa f adalah fungsi dari A ke B dan disajikan dengan lambang:

$$\mathbf{f : A \rightarrow B}$$

A disebut daerah asal (daerah sumber, domain) dari fungsi f, sedangkan B disebut daerah kawan. (daerah jajahan , kodomain) dari fungsi f. Jika x$\in$A oleh fungsi f dikaitkan (dikawankan) dengan suatu anggota dari B, maka anggota dari B itu disebut ”bayangan dari x” dan disajikan dengan lambang ”f(x)”. f(x) seringkali juga disebut ”nilai fungsi” untuk x.

Secara simbolis matematis, definisi fungsi f dapat disajikan sbb.

$\mathbf{f : A \rightarrow B}$ jika dan hanya jika $\forall \mathbf{x \in A}, \exists\ \mathbf{y \in B}$ dengan $\mathbf{y = f(x)}$

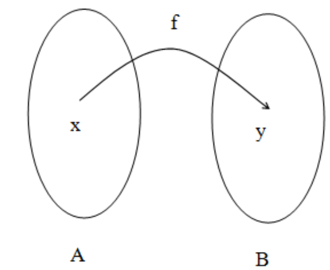
Perhatikan bahwa suatu fungsi f dari A ke B adalah suatu relasi yang mempunyai dua sifat khusus, yaitu:

a. Setiap anggota himpunan A (daerah asal) dikawankan dengan anggota himpunan B (Sering kali dikatakan bahwa ”daerah asal dihabiskan”

b. Kawan dari anggota-anggota himpunan A (daerah asal) adalah tunggal. Sifat ini dapat dinyatakan secara simbolis:
$(\forall x_1, x \in A).\ x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Pada umumnya, untuk suatu fungsi f : A $\rightarrow$ B, anggota-anggota dari himpunan B (daerah kawan) tidak perlu mempunyai kawan anggota himpunan A (daerah kawan tidak perlu di habiska), dan jika anggota himpunan B mempunyai kawan anggota himpunan A, kawannya di A itu tidak harus tunggal.

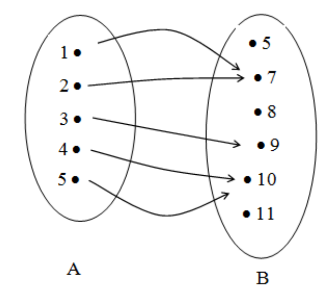
Suatu fungsi f dari A ke B dapat diilustrasikan dengan diagram panah sebagai berikut.



Himpunan semua anggota himpunan B yang merupakan bayangan dari suatu anggota himpunan A disebut daerah hasil (range) dari fungsi f dan disajikan dengan R_f. Jadi:

$$\mathbf{R_f = \{\, y \in B \mid (\exists\ x \in A).y = f(x) \,\}}$$

Misalnya untuk fungsi f : A $\rightarrow$ B yang disajikan dengan diagram panah sebagai berikut.



f (1) = f (2) = 7 ; f (3) = 9 ; F (4) = f (5) = 10

$R_f = \{ 7, 9, 10 \}$

Dari contoh diatas yang merupakan daerah asal adalah A = {1, 2, 3, 4, 5,}, daerah kawan adalah B = {5,6,7,8,9,10,11} dan daeeah hasil adalah $R_f = \{ 7, 9, 10 \}$

b. Cara menyajikan fungsi

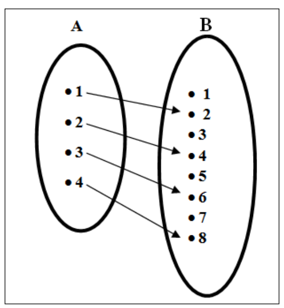
Ada lima cara untuk menyajikan suatu fungsi , yaitu :

1) Himpunan Pasangan Berurutan

Misalkan diketahui fungsi f dari P = {1,2,3,4} ke Q = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}. Relasi yang didefinisikan adalah "setengah kali dari". Relasi ini dapat dinyatakan dengan himpunan pasangan berurut sebagai berikut:
f = {(1,2), (2,4), (3,6),(4,8)}

2) Diagram Panah

Diketahui fungsi f dari P = {1,2,3,4} ke Q = {1,2,3,4,5,6,7,8,}. Relasi yang didefinisikan adalah "setengah kali dari" relasi ini dapat dinyatakan dengan diagram panah sebagai berikut:



3) Dengan Persamaan Fungsi

Misalkan diketahui fungsi f dari P = {1,2,3,4} ke Q = {1,2,3,4,5,6,7,8}. Relasi yang didefinisikan adalah "setengah kali dari". Relasi ini dapat dinyatakan dengan rumus fungsi yaitu:

$x = \frac{1}{2}y$, diperoleh y = 2x

Bentuk ini biasa ditulis dengan f(x) = 2x untuk setiap $x \in P$

Inilah yang dinyatakan persamaan fungsi.

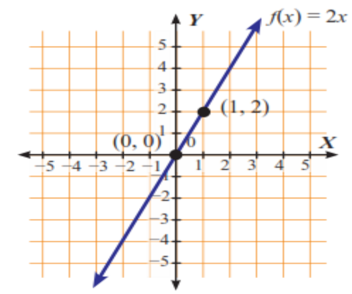
4) Dengan Tabel

Misalkan diketahui fungsi f dari P = {1,2,3,4} ke Q = {1,2,3,4,5,6,7,8}. Relasi yang didefinisikan adalah "setengah kali dari". Relasi ini dapat dinyatakan dengan tabel yaitu:

x	1	2	3	4
f(x)	2	4	6	8

5) Dengan Grafik

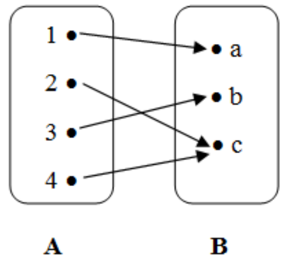
Misalkan diketahui fungsi f dari P = {1,2,3,4,5} ke Q = {1, 2, 3, 4, 5,6,7,8,9,10}. Relasi yang didefinisikan adalah "setengah kali dari". Relasi ini dapat dinyatakan dengan grafik sebagau berikut:



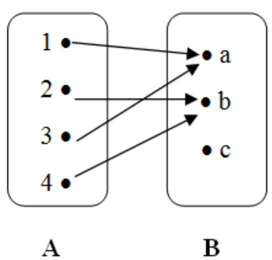
C. **Sifat-sifat fungsi**

1) Fungsi Surjektif

Fungsi f : A → B disebut fungsi surjektif atau fungsi onto atau fungsi kepada jika dan hanya jika daerah hasil jika dan hanya jika daerah hasil fungsi f sama dengan himpunan B atau $R_f = B$
Contoh dalam diagram panah



Fungsi f : A → B dinyatakan dalam pasangan terurut : f = {(1,a), (2,c), (3,b), (4,c)}. Tampak bahwa daerah hasil fungsi f adalah Rf : {a,b,c} dan Rf = B maka fungsi f adalah fungsi surjektif atau fungsi onto atau fungsi kepada.
Fungsi f : A → B disebut fungsi into atau fungsi ke dalam jika dan hanya jika daerah hasil fungsi f merupakan himpunan bagian murni dari himpunan B atau Rf $\subset$ B.
Contoh :

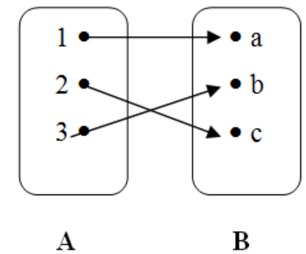


A : {1,2,3,4} , B : {a,b,c}
Fungsi f : A → B dinyatakan dalam pasangan terurut f : {(1,a), (2,b), (3,a), (4,b)}.
Tampak bahwa daerah hasil fs f : Rf : {a,b} dan Rf $\subset$ B, maka fungsi f adalah fungsi into atau fungsi ke dalam.

2) **Fungsi Injektif**

Fungsi f : a → B disebut fungsi injektif (fungsi satu-satu) jika dan hanya jika untuk tiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$ berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.

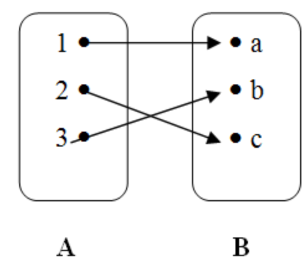
Contoh



A : {1,2,3} , B : {a,b,c}
f : A → B dinyatakan dalam pasangan terurut f : {(1,a), (2,b), (3,c)}. Tampak bahwa tiap anggota A yang berbeda mempunyai peta yang berbeda di B
Fungsi f adalah fungsi injektif atau satu-satu

3) **Fungsi Bijektif**

Fungsi f : A → B disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika fungsi f sekaligus merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif
Contoh:



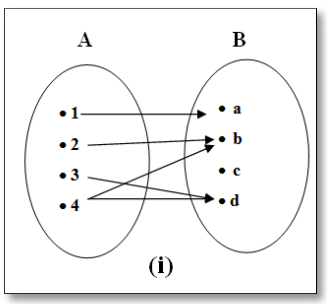
A : {1,2,3} , B : {a,b,c}
fs f : A → B, dinyatakan dalam pasangan terurut f : {(1,a), (2,c), (3,b)}.
Tampak bahwa fungsi f adalah fungsi surjektif sekaligus fungsi injektif.
Fungsi f adalah fungsi bijektif atau korespondensi satu-satu

6.3. Perbedaan Relasi dan Fungsi

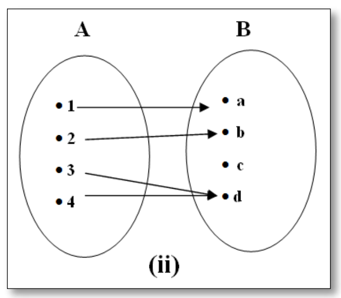
Secara sederhana relasi dapat diartikan sebagai hubungan. Hubungan yang dimaksud adalah hubungan antara daerah asal (domain) dan daerah kawan (kodomain). Sedangkan fungsi adalah relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan daerah asal tepat satu ke himpunan daerah kawannya. Perbedaan antara relasi dan fungsi terletak pada cara memasangkan anggota himpunan ke daerah asalnya.

Pada relasi tidak ada aturan khusus untuk memasangkan setiap anggota himpunan daerah asal ke daerah kawan. Aturan hanya terikat atas pernyataan relasi tersebut. Setiap anggota himpunan daerah asal boleh mempunyai pasangan lebih dari satu atau boleh tidak memiliki pasangan di daerah kawan. Sedangkan pada fungsi, setiap anggota himpunan daerah asal dipasangkan dengan aturan khusus. Aturan tersebut mengharuskan setiap anggota himpunan daerah asal mempunyai pasangan dan hanya tepat satu dipasangkan dengan daerah kawannya.

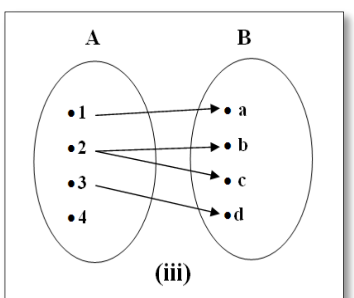
Contoh :



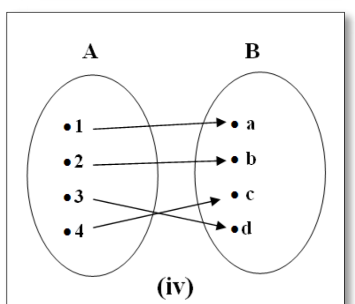
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

Pada gambar (i) contoh relasi dan bukan fungsi

Pada gambar (ii) contoh relasi dan fungsi

Pada gambar (iii) contoh relasi dan bukan fungsi

Pada gambar (iv) contoh relasi dan fungsi

Jadi dapat disimpulkan bahwa setiap relasi belum tentu merupakan fungsi tetapi setiap fungsi pasti merupakan relasi.

6.4. Pemetaan

Pemetaan adalah relasi khusus dari dua himpunan yang memasangkan setiap anggota himpunan daerah asal ke himpunan daerah kawan. Pemetaan sering disebut juga sebagau fungsi. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B tergantung dari banyaknya anggota himpunan A dan anggota himpunan B.

Dalam pemetaan atau fungsi terdapat aturan khusus yang mengharuskan sebuah relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan domain tepat satu pada anggota himpunan kodomain.

Ada dua cara yang digunakan untuk menentukan banyaknya pemetaan dari dua himpunan yaitu:

a. Dengan diagram panah

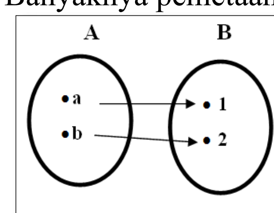
Misalkan diberikan dua buah himpunan A dan himpunan B dengan anggota himpunan A = {a,b} dan himpunan B = {1,2}. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B adalah..

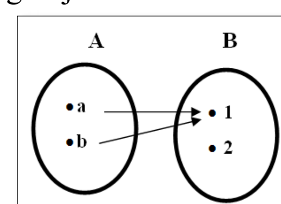
Penyelesaian:

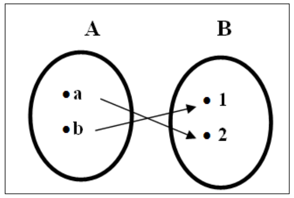
A = {a, b} dengan n(A) = 2

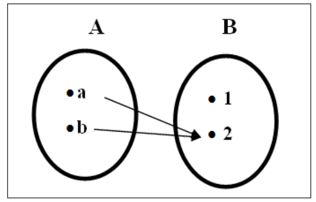
B = {1,2} dengan n(B) = 2

Banyaknya pemetaan yang terjadi dari A ke B adalah









Jadi banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B ada 4 cara.

b. Dengan menggunakan rumus pemetaan

Menentukan banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B atau pemetaan dari B ke A terdapat rumus yang dapat digunakan menentukan banyaknya pemetaan yang mungkin adalah sebagai berikut:

- Rumus banyaknya pemetaan dari A ke B

$$n(B)^{n(A)}$$

Keterangan :
n(A) = banyaknya anggota himpunan A
n(B) = banyaknya anggota himpunan B

- Rumus banyaknya pemetaan dari B ke A

$$n(A)^{n(B)}$$

Keterangan :
n(A) = banyaknya anggota himpunan A
n(B) = banyaknya anggota himpunan B

Contoh :

Misalkan diberikan dua buah himpunan A dan himpunan B dengan anggota himpunan A = {a,b,c} dan himpunan B = {1,2,3,4}. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B adalah..

Penyelesaian:
A = {a, b,c} dengan n(A) = 3
B = {1,2,3,4} dengan n(B) = 4

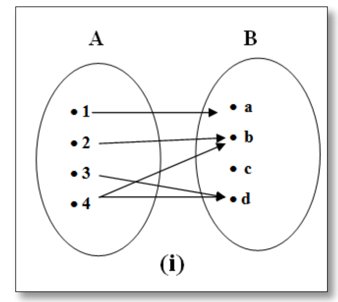
$$n(B)^{n(A)} = 4^3 = 64$$

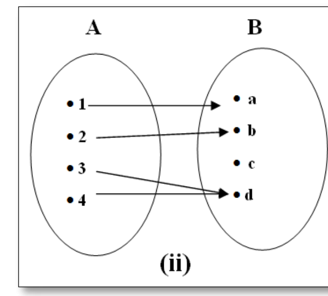
Jadi banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B ada 64 cara.

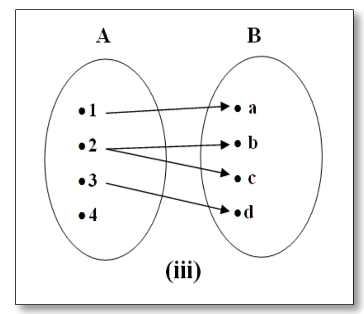
6.5. Korespondensi

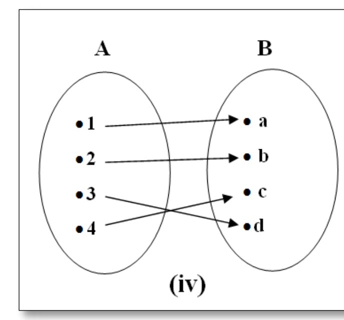
Korespondensi satu - satu adalah fungsi yang memetakan anggota himpunan dari himpunan A dan B, dimana semua anggota himpunan A dan B dapat dipasangkan sedemikian sehingga setiap anggota A berpasangan dengan tepat satu anggota B dan setiap anggota B berpasangan dengan tepat satu anggota A.

Contoh :









Pada gambar (i) bukan korespondensi
Pada gambar (ii) bukan korespondensi
Pada gambar (iii) bukan korespondensi
Pada gambar (iv) korespondensi satu-satu

Jadi salah satu syarat suatu fungsi atau pemetaan dikatakan sebagai korespondensi satu-satu jika banyak anggota himpunan A dan himpunan B sama atau n(A) = n(B).

Jika n(A) = n (B) = n maka banyak korespondensi satu-satu yang mungkin antara himpunan A dan himpunan B adalah n! = n × (n-1) × (n-2) ×...×1

Contoh :

Tentukan berapa banyak korespondensi satu-satu yang dapat dibuat dari himpunan A = { huruf vokal} dan B = {bilangan cacah antara 0 dan 6}!

Penyelesaian :

A = { huruf vokal} = {a,i,u,e,o}

B = {bilangan cacah antara 0 dan 6} = {1,2,3,4,5}

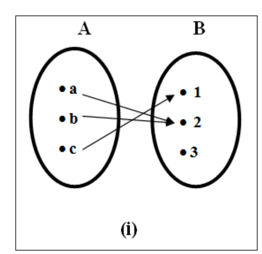
n(A) = 5 dan n(B) = 5 maka banyak korespondensi satu-satu yang mungkin anata himpunan A dan B adalah :

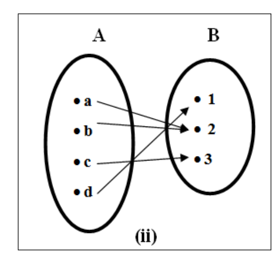
5! = 5×4×3×2×1 = 120 buah

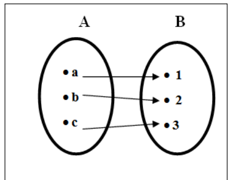
Jadi banyak korespondensi satu-satu yang dapat dibuat dari himpunan A = { huruf vokal} dan B = {bilangan cacah antara 0 dan 6} adalah 120 buah.

Latihan !

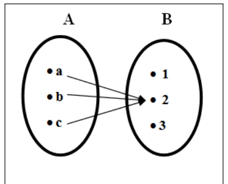
1. Manakah diantara himpuanan pasangan berurutan berikut yang merupakan relasi, fungsi dan bukan fungsi?
   a. {(a,x), (b,z), (a,y)}
   b. {(1,p), (2,q), (3,P)}
   c. {(5,6), (6,7), (7,5)}
   d. {(a,2), (b,2), (b,1)}
   e. {(2,2), (2,4), (2,6)}
   f. {(a,1), (b,2), (c,3)}
2. Tentukan relasi yang dapat dibuat dari himpunan A = {4,9,16, 25} dan B = {1,2,3,4,5}
   a. "kurang dari"
   b. "akar dari"
   c. "kelipatan dari"
   d. "Kuadrat dari"
3. Sajikan relasi "akar dari" dari himpunan A = {1,2,3,4,5,6} ke himpunan B = { 1,2,4,9,12,16,20,25,36,49} dalam:
   a. Diagram panah
   b. Diagram kartesius
   c. Himpunan pasangan berurutan
4. Pak Bayu mempunyai tiga orang anak, bernama Andri, Riski dan Yuni. Pak Firman mempunyai dua orang anak yang bernama Sita dan Bima. Pak Adi mempunyai seorang anak yang bernama Doni. Nyatakan dalam diagram panah relasi "ayah dari" dari himpunan ayah kehimpunan anak
5. Misalkan A = {3,4,6,8,9,12,14,18} dan B = {1,6,9}. Relasi yang didefinisikan adalah "anggota A sepertiga kali anggota B" . apakah relasi dari A ke B merupakan fungsi?
6. Suatu fungsi f dirumuskan sebagai f(x) = 3x – 2 dengan daerah asal adalah A = {-2,-1,0,1,2}.
   a. Tentukanlah daerah hasil atau range dari fungsi tersebut
   b. Tentukanlah letak titik-titik tersebut pada koordinat kartesius
   c. Gambarlah suatu garis yang melalui titik tersebut.
7. Perhatikn gambar dibawah ini:







(iii)



(iv)

Dari gambar diatas berdasarkan sifat-sifat fungsi tunjukan yang merupakan fungsi bijektif, fungsi injektif dan fungsi surjektif!

8. Fungsi f ditentukan oleh f(x) = ax + b. jika f(4) = 5 dan f(-2) = -7 tentukanlah :
   a. Nilai a dan b
   b. Persamaan fungsi tersebut
9. Diketahui himpunan A = {1,2,3,4,5}, B = {a,b,c, d} dan C = {3,5,7,9,11}. Tentukan banyaknya pemetaan yang mungkin dari:
   a. A ke B
   b. B ke A
   c. B ke C
   d. C ke A
   e. C ke B
10. Manakah diantara himpuanan pasangan berurutan berikut yang merupakan korespondensi satu-satu?
   g. {(a,x), (b,z), (a,y)}
   h. {(1,p), (2,q), (3,P)}
   i. {(5,6), (6,7), (7,5)}
   j. {(a,2), (2,b), (b,a)}
   k. {(2,2), (2,4), (2,6)}
   l. {(a,1), (b,2), (c,3)}

DAFTAR PUSTAKA

Andinawan.M.Cholik, dan Sugijono. 2007. *Matematika Untuk SMP KelasVII*. Jakarta: Erlangga

As'ari, Abdur Rahman dan Tohir, Muhammad. 2017. *Matematika Kelas VIII SMP/MTs Kurikulum 2013edisi revisi 2017.* Kementrian Pendidikan Dan Kebudayaan Republik Indonesia.

Bahtiar, Sjarif. 1990. *Pengantar Dasar Matematika.* Bandung: Fakultas MIPA ITB.

Djumanta, Wahyudin. 2005. *Memahami Konsep Matematika.* Bandung: Grafindo Media Pratama.

Hasibuan. 2004. *Logika Matematika.*[online]. Tersedia di: http://www.cs.ui.ac.id/wescientific-writing/deductive%20Reasoning.ppt [9 Oktober 2020]

Karso, dkk. 2008. *Pendidikan Matematika*. Jakarta: Modul PGSD S1 Universitas Terbuka

Karso. 2004. *Pengantar Dasar Matematika.* Jakarta: Universitas Terbuka.

Kusuma, Y.S. 1986. *Logika Matematika Elementer*. Bandung: Tarsito

Kusumah, Yaya S. dab Endang Deddy. 1986. *Teori Himpunan.* Bandung: IKIP Jurusan Matematika

Nurharini,Dewi, daan Tri Wahyuni.2008.*Matematik Konsep dan Aplikassinya Kelas VII.*Jakarta:Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.

Pardde,C. 2003. *Leture Notes Logika Matematika.* Depok: Universitas Gunadarma

Prayitno, E. 1995. *Logika Matematika*. Yogyakarta: PPPG Matematika.

Ruseffendi, E.T. (1984). *Dasar-dasar Matematika Modern untuk Guru.* Bandung: Tarsito.

Sugiarto, Isti Hidayah. 2011. *Pengantar Dasar Matematika.* . Semarang: FMIPA UNNES Jurusan Matematika.

Sukirman. 2006. Pengantar Teori Bilangan. Yogyakarta: Hanggar Kreator

Suryadi, H.S. 1991. *Aljabar, Logika dan Himpunan.* Depok: Diktat kuliah Gunadarma

Thomas, D.A. (2002). *Modern Geometry*. California, USA: Pacific Grove.
Wheeler, R.E. (1992). *Modern Mathematics*. Belmont, CA: Wadsworth.

BIODATA PENULIS

Nasrun Syahrir lahir di Sungguminasa pada tanggal 28 Juni 1981. Pendidikan Sekolah Dasar hingga Menengah ditempuh di Kab. Gowa. Sedangkan, Pendidikan S-1 di tempuh di Universitas Muhammadiyah Makassar dan S-2 dan S-3 di tempuh di Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Malang. Saat ini, penulis aktif mengajar di Program Sarjana dan Magister di Universitas Muhammadiyah Makassar. Penulis aktif melakukan kolaborasi riset dan publikasi bersama dengan dosen dan mahasiswa di Jurnal Internasional bereputasi dan Jurnal Nasional Terakreditasi. Penulis aktif sebagai narasumber pada kegiatan nasional yang terkait dengan Kurikulum, Penelitian Tindakan Kelas, Penulisan Artikel Ilmiah, dan Masalah yang terkait di bidang Pendidikan Matematika.

Andi Kaharuddin, S.Pd., M.Pd, lahir di Kalempang pada tanggal 7 Februari 1992. Beliau menempuh S-1 di Program Studi Pendidikan Matematika Unismuh Makassar. Pendidikan S-2 ditempuh di Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Makassar. Sekarang lagi menempuh Pendidikan S-3 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Makassar. Saat ini beliau aktif sebagai dosen Program Sarjana di Universitas Lakidende Unaaha. Beberapa karya beliau telah dipublikasikan di Jurnal Internasional Bereputasi dan Jurnal Nasional Terkareditasi. Fokus riset beliau saat ini terkait dengan media dan teknologi pembelajaran.

Muhammad Muzaini adalah doktor di bidang Pendidikan Matematika lulusan Program Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya (2019). Lahir di Mulyorejo Kabupaten Luwu Utara 08 Desember 1986, ia menempuh pendidikan dasar di SD 502 Gontang (tamat 1999) dan SMP Negeri 1 Mappadeceng (tamat 2002); pendidikan Menengah di SMA Negeri 1 Palopo (tamat 2005); Pendidikan S-1 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Makassar; dan Pendidikan S-2 di Universitas Negeri Makassar. Saat ini penulis aktif mengajar di Program Sarjana dan Magister di Universitas Muhammadiyah Makassar. Penulis aktif melakukan kolaborasi riset dan publikasi bersama dengan dosen dan mahasiswa di Jurnal Internasional bereputasi dan Jurnal Nasional Terakreditasi. Selanjutnya, penulis telah menghasilkan buku pembelajaran terkait dengan Matematika Diskrit dan Program Komputer. Terakhir Penulis aktif dalam kegiatan Pengabdian Masyarakat, kegiatan yang dilakukan antara lain berupa Pelatihan dan Workshop pada Guru-guru SD, SMP dan SMA tentang tema-tema yang berkaitan dengan pendidikan Matematika.