PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

Andi Mulawakkan Firdaus
Evi Novianty

Editor:
Herwandi

Haura Utama

Pemecahan Masalah Matematika,
karya Andi Mulawakkan Firdaus
Evi Novianty,
diterbitkan pertama kali oleh Penerbit Haura Utama, 2023

15,5 x 23 cm, iv + 144 hlm

Editor: Herwandi
Penata isi: Indah
Perancang sampul: Nita

CV. Haura Utama
Anggota IKAPI Nomor 375/JBA/2020
Nagrak, Benteng, Warudoyong, Sukabumi
+62877-8193-0045 hautautama@gmail.com

Cetakan I, Agustus 2023

ISBN: 978-623-492-544-9

penerbithaura.com

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas rahmat dan hidayahNya saya dapat menyelesaikan Buku Pemecahan Masalah Matematika. Adapun tujuan dari pembuatan buku ini adalah sebagai bahan ajar dan referensi bagi para pembaca, khususnya mahasiswa pendidikan matematika. Mudah-mudahan buku ini dapat membantu para pembaca yang berminat untuk mengembangkan diri, memperkaya wawasan dan menambah khasanah ilmu pengetahuan.

Kami menyadari bahwa penyelesaian buku ini tidak terlepas dari bantuan berbagi pihak, dan masih banyak terdapat kekurangan dalam penulisan buku ini. Oleh karena itu, kami mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari pembaca.

Makassar, Juli 2023

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

A. Pengertian Pemecahan Masalah

Masalah adalah suatu persoalan yang tidak langsung diketahui bagaimana cara menyelesaikannya. Marilah kita sepakati sejak awal bahwa yang dibahas dalam hal ini adalah masalah matematika. Hal yang unik dari masalah adalah bahwa apa yang menjadi masalah bagi orang yang satu belum tentu menjadi masalah bagi orang lain. Hal ini terjadi karena tidak ada dua orang berbeda yang memiliki pengalaman yang sama. Oleh karena itu, seseorang mungkin akan lebih cepat memahami kalimat-kalimat dalam masalah dibandingkan orang yang lain. Beberapa orang mungkin dapat melihat pendekatan apa yang tepat untuk memecahkan masalah dibandingkan orang lainnya. Maka tak mengherankan apabila orang dewasa yang berpengalaman dapat memahami lebih banyak masalah dibandingkan anak-anak. Berikut adalah ilustrasi berbagai contoh dalam menyikapi masalah.

Ilustrasi 1: Pada waktu bulan puasa Syifa sudah tidur pada pukul 22.00, dengan harapan tidak akan kesiangan waktu sahur. Pada pukul 24.00 listrik di rumah nya padam, dan Ia tetap tidur pulas sehingga tidak mengetahui terjadinya padam listrik yang membuat rumahnya gelap-gulita.

Ilustrasi 2: Pada pukul 01.00 Syifa terbangun dan melihatnya/merasakan bahwa listrik di rumahnya masih tetap padam, lantas Syifa melihat jam dan memutuskan untuk tidur kembali tanpa ada usaha untuk megecek listrik rumahnya yang padam (apakah padam semua, atau ada gangguan pada instalasi listrik rumahnya)

Ilustrasi 3: Lain halnya dengan Adiknya Syifa, begitu terbangun dan melihat listrik mati, lantas menyuruh ayahnya untuk memperbaikinya, karena Adiknya Syifa tidak bisa tidur kalau ruangan gelap.

Ilustrasi 4: Ayah Syifa memperbaiki listrik yang padam dengan melihat dulu rumah tetangganya apakah listriknya mati atau tidak. Ternyata listrik di rumah tetangga tidak mati. Ayah Syifa lantas memeriksa saklar di meteran ternyata dalam keadaan of, lantas saklar dinaikan menjadi on, tetapi saklar tidak mau on dan listrik tetap mati. Ayah Syifa memutuskan untuk menggunakan lampu minyak saja, karena tidak sanggup memperbaikinya.

Ilustrasi 5: Lain halnya dengan tetangga Syifa, jika mengalami hal demikian maka tetangga Syifa itu mencobanya untuk memperbaiki sendiri tanpa bantuan orang lain, dengan cara mencoba-coba berbagai kemungkinan yang terjadi. Misalnya mengecek kabel-kabel yang dimungkinkan adanya konsletig (sambungan arus pendek yang tidak dikehendaki).

Ilustrasi 6: Pagi harinya Bapaknya Syifa menghubungi anaknya (Kakaknya Syifa) dan memintanya untuk memperbaiki kabel listrik yang konslet. Karena Kakaknya Syifa adalah sarjana elektro (mengetahui seluk beluk listrik), maka dengan mudah saja ia menemukan penyebab terjadi penyambungan arus pendek, yaitu dengan menggunakan alat-alat yang dimilikinya

Ilustrasi-ilustrasi di atas memberikan gambaran bagaimana seseorang menyikapi suatu masalah atau tidak punya sikap sama sekali. Ilustrasi 1: menggambarkan yang bernama Syifa tidak mempunyai sikap apa-apa, karena Syifa tidak mengetahui adanya listrik padam. Pada ilustrasi 2: Syifa mengetahui listrik padam, tetapi Syifa tidak peduli padamnya listrik, karena ia tak terganggu oleh padamnya listrik. Ilustrasi 3: Adiknya Syifa merasa terganngu oleh padamnya listrik dan ia menyuruh ayahnya untuk memperbaikinya. Ilustrasi 4: Ayah Syifa tidak bisa memperbaiki listrik dan memilih membiarkan listrik di rumahnya padam. Ilustrasi 5: Tetangga Syifa, jika menemukan kejadian tersebut sering melakukan coba-coba untuk memperbaiki listrik. Dan ilustrasi 6: Kakaknya Syifa sudah terampil memperbaiki listrik, karena ia ahli di bidangnya.

Ilustrasi tersebut ada beberapa kategori sikap yang terjadi pada diri seseorang dalam menghadapi situasi tertentu, yaitu: (1) Orang yang tidak mengetahui adanya masalah; (2) orang yang tidak peduli terhadap adanya masalah; (3) orang yang mengetahui adanya masalah, tetapi tidak bisa menyelesaikannya; (4) orang yang sering mencoba-coba menyelesaikan masalah; dan (5) orang yang mahir menyelesaikan masalah.

Apa yang berperan penting dalam memecahkan masalah matematika? Tentu saja pengetahuan matematika yang kita miliki. Hal ini semakin jelas, bahwa kita akan merasa lebih mudah memecahkan masalah yang sama pada saat ini dibandingkan waktu yang lalu, karena saat kita memecahkan masalah tersebut saat ini, pengetahuan matematika kita telah bertambah.

Biasanya masalah muncul pada situasi yang tidak diharapkan atau muncul karena akibat-akibat kita melakukan suatu pekerjaan, atau jika merencenakan suatu kegiatan kita akan menemukan berbagai permasalahan yang muncul. Munculnya masalah tersebut dapat dikatakan/dijadikan sebagai masalah jika kita mau menerimanya sebagai tantangan untuk diselesaikan, tetapi jika kita tidak mau menerima sebagai tantangan berarti masalah tersebut menjadi bukan masalah yang terselesaikan.

Polya (1985) mengartikan pemecahan masalah sebagai suatu usaha mencari jalan keluar dari suatu kesulitan guna mencapai suatu tujuan yang tidak segera dapat dicapai. Pemecahan masalah dalam hal ini (McGivney dan DeFranco, 1995) meliputi dua aspek, yaitu masalah menemukan *(problem to find)* dan masalah membuktikan *(problem to prove)*.

Pemecahan masalah dapat juga diartikan sebagai penemuan langkah-langkah untuk mengatasi kesenjangan *(gap)* yang ada. Sedangkan kegiatan pemecahan masalah itu sendiri merupakan kegiatan manusia dalam menerapkan konsep-konsep dan aturan-aturan yang diperoleh sebelumnya (Dahar, 1989; Dees, 1991).

Terkait memecahkan masalah, Lenchner (1983) pada intinya menyatakan bahwa memecahkan masalah adalah proses menerapkan pengetahuan yang telah diperoleh sebelumnya ke dalam situasi baru yang belum dikenal. Robert Harris menyatakan bahwa memecahkan masalah adalah *the management of a problem in a way that successfully meets the goals established for treating it*. Jika diterjemahkan kurang lebih bermakna memecahkan masalah adalah pengelolaan masalah dengan suatu cara sehingga berhasil menemukan tujuan yang dikehendaki.

Utari (1994) menegaskan bahwa pemecahan masalah dapat berupa menciptakan ide baru, menemukan teknik atau produk baru. Bahkan di dalam pembelajaran matematika, selain pemecahan masalah mempunyai arti khusus, istilah tersebut juga mempunyai interpretasi yang berbeda. Misalnya menyelesaikan soal cerita atau soal yang tidak rutin dalam kehidupan sehari-hari.

Dari sejumlah pengertian pemecahan masalah di atas, dapat dikatakan bahwa pemecahan masalah merupakan usaha nyata dalam rangka mencari jalan keluar atau ide berkenaan dengan tujuan yang ingin dicapai. Pemecahan masalah ini adalah suatu proses kompleks yang menuntut seseorang untuk mengkoordinasikan pengalaman, pengetahuan, pemahaman, dan intuisi dalam rangka memenuhi tuntutan dari suatu situasi. Sedangkan proses pemecahan masalah merupakan kerja memecahkan masalah, dalam hal ini proses menerima tantangan yang memerlukan kerja keras untuk menyelesaikan masalah tersebut. Dalam istilah sederhana, masalah adalah suatu perjalanan seseorang untuk mencapai solusi yang diawali dari sebuah situasi tertentu.

Di dalam memahami permasalahan matematika, kita dapat bertanya kepada diri kita sendiri dengan beberap pertanyaan yang dapat membantu kita untuk dapat menyeleksi informasi yang ada. Pertanyaan-pertanyaan yang dimaksud dapat berupa pertanyaan Apa, Berapa, Siapa, Bagaimana, Mengapa suatu hal dapat terjadi.

Permasalahan yang kita hadapi dapat dikatakan masalah jika masalah tersebut tidak bisa dijawab secara langsung, karena harus menyeleksi informasi (data) yang diperoleh. Dan tentunya jawaban yang diperoleh bukanlah kategori masalah yang rutin (tidak sekedar memindahkan/mentransformasi dari bentuk kalimat biasa ke pada kalimat matematika)

B. Tipe Masalah Matematika

Holmes (1995:35) menyatakan bahwa terdapat dua kelompok masalah dalam pembelajaran matematika yaitu masalah rutin dan masalah nonrutin.

1. Masalah Rutin

Masalah rutin dapat dipecahkan dengan metode yang sudah ada. Masalah rutin sering disebut sebagai masalah penerjemahan karena deskripsi situasi dapat diterjemahkan dari kata-kata menjadi simbol-simbol. Masalah rutin dapat membutuhkan satu, dua atau lebih langkah pemecahan.

Charles dalam Holmes (1995:35) pada intinya menyatakan bahwa masalah rutin memiliki aspek penting dalam kurikulum, karena hidup ini penuh dengan masalah rutin. Oleh karena itu tujuan pembelajaran matematika yang diprioritaskan terlebih dahulu adalah siswa dapat memecahkan masalah rutin.

2. Masalah Nonrutin

Kouba et.al dalam Holmes (1995:36) menyatakan bahwa masalah nonrutin kadang mengarah kepada masalah proses. Masalah nonrutin membutuhkanlebih dari sekadar penerjemahan masalah menjadi kalimat matematika dan penggunaan prosedur yang sudah diketahui. Masalah nonrutin mengharuskan pemecah masalah untuk membuat sendiri metode pemecahannya. Dia harus merencanakan dengan seksama bagaimana memecahkan masalah tersebut. Strategi-strategi seperti menggambar, menebak dan melakukan cek, membuat tabel atau urutan kadang perlu dilakukan. Holmes (1995:36) menyatakan yang intinya bahwa, masalah nonrutin dapat berbentuk petanyaan *open ended* sehingga memiliki lebih dari satu solusi atau pemecahan. Masalah tersebut kadang melibatkan situasi kehidupan atau membuat koneksi dengan subyek lain.

Holmes (1995: 36), menyatakan yang intinya bahwa apapun jenis masalahnya, rutin atau nonrutin, tetap bergantung pada si pemecah masalah.

a) Masalah penerjemahan sederhana (*simple translation problem*)

Penggunaan masalah dalam pembelajaran dimaksudkan untuk memberi pengalaman kepada siswa menerjemahkan situasi dunia nyata ke dalam pengalaman matematis.

Masalah 1.1:
Rinda mempunyai 20 ayam ras di dalam kandangnya. Di kandang yang berbeda, Aria mempunyai 25 ayam ras. Berapa lebihnya ayam ras yang dipunyai Aria dari yang dipunyai Rinda?

Masalah yang terdapat pada bagian a, sangat umum terjadi pada pelajaran matematika di sekolah. Masalah pada contoh 1 ini merupakan masalah penerjemahan sederhana yang penyelesaiannya cukup dengan menerjemahkan dalam satu kalimat matematika saja, yaitu: $25 - 20 = 5$ atau $20 + 5 = 25$. Penyelesaian masalah seperti ini sangat terkait dengan mental siswa. Bagi siswa yang telah memiliki mental *problem solving* mungkin secara cepat dapat menyimpulkan bahwa ini hanyalah masalah pengurangan biasa.

b) Masalah penerjemahan kompleks (*complex translation problem*)

Sebenarnya masalah ini mirip dengan masalah penerjemahan yang sederhana, namun di dalamnya menuntut lebih dari satu kali penerjemahan dan ada lebih dari satu operasi hitung yang terlibat.

Masalah 1.2:
Suatu perusahaan produsen lampu sepeda motor mengemas 12 lampu dalam satu paket. Setiap 36 paket dimasukkan dalam satu kardus. Toko Murah adalah penjual suku cadang sepeda motor. Toko Murah memesan 5184 lampu kepada perusahaan tersebut. Berapa kardus lampu yang akan diterima oleh toko tersebut?

Penyelesaian masalah pada bagian b, memerlukan paling tidak dua langkah penerjemahan ke dalam kalimat matematika. Oleh karena itu masalah tersebut dikatakan sebagai masalah penerjemahan kompleks. Penyelesaian masalah pada contoh 2 memerlukan dua langkah penerjemahan, yaitu:

1. $12 \times 36 \quad = 432 \rightarrow 432$ lampu dalam satu kardus
2. $5184 : 432 \ = 12 \rightarrow 12$ kardus

c) Masalah proses (*process problem*)

Penggunaan masalah tersebut dalam pembelajaran dimaksudkan untuk memberi kesempatan kepada siswa mengungkapkan proses yang terjadi dalam pikirannya. Siswa dilatih untuk mengembangkan strategi umum dalam memahami, merencanakan, dan memecahkan masalah, sekaligus mengevaluasi hasilnya.

Masalah 1.3:
Kelompok penggemar catur beranggota 15 orang akan mengadakan pertandingan. Jika setiap anggota harus bertanding dengan anggota lain dalam sekali pertandingan, berapa banyak pertandingan yang mereka mainkan?

Masalah pada bagian c, sangat berbeda dengan dua masalah pada masalah a dan masalah b. Siswa yang belum pernah menemui masalah ini akan *sangat sulit* untuk menuangkan pikirannya dalam kalimat matematika. Sebenarnya masalah dapat disederhanakan, misalnya untuk kelompok dengan 2 anggota, 3 anggota, 4 anggota dan seterusnya kemudian dilihat polanya. Cara penyelesaian lain dengan membuat diagram tabel seperti berikut ini.

Tabel 1.1 Peta Pertandingan Antar Anggota

	Anggota 1	Anggota 2	Anggota 3	…	Anggota 15
Anggota 1		√	√		√
Anggota 2			√		√
Anggota 3					√
….					√
Anggota 15					√

tanda √ berarti bertanding
Penyelesaian dengan diagram:
1 – 2 , 1 – 3 , 1 – 4 , … . , 1 – 15
2 – 3 , 2 – 4 , … ., 2 – 15
3 – 4 , … , 3 – 15
…. dst

Masalah ini jelas sangat berbeda dari dua masalah sebelumnya, karena banyak cara untuk menuju penyelesaiannya. Kecuali itu pada masalah tersebut tidak langsung jelas hasil akhir hitungannya. Sebagai catatan bahwa untuk meyelesaikan masalah tipe seperti ini memerlukan proses menduga, coba-coba, mendaftar, memperkirakan dan lain-lain proses berfikir (*thinking process*). Namun cukup disayangkan sangat sedikit masalah seperti ini muncul dalam mata pelajaran matematika sekolah.

d) Masalah penerapan (*applied problem*)

Penggunaan masalah tersebut dalam pembelajaran dimaksudkan untuk memberi kesempatan kepada siswa mengeluarkan berbagai keterampilan, proses, konsep dan fakta untuk memecahkan masalah nyata (kontekstual). Masalah ini akan menyadarkan siswa pada nilai dan kegunaan matematika dalam kehidupan sehari-hari.

Masalah 1.4:
Berapa banyak kertas yang digunakan di sekolah Anda dalam satu tahun? Berapa banyak pohon yang ditebang untuk membuat kertas-kertas yang digunakan di sekolah Anda?

Masalah matematika terapan adalah masalah nyata dalam kehidupan sehari-hari (atau paling tidak masalah kontekstual) yang penyelesaiannya memerlukan keterampilan, fakta, konsep dan prosedur matematika. Disini matematika menjadi alat (*tool*) untuk mengorganisasi, menyimpulkan, menyajikan data dan menyediakan bahan untuk membuat keputusan. Masalah pada bagian d dapat diilustrasikan sebagai berikut.

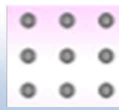
Fakta menunjukkan bahwa 250 kg kertas memerlukan kira-kira satu pohon sebagai bahan bakunya. Berapa banyak kertas yang digunakan sekolah Anda setiap hari? Jika satu hari menggunakan 100 lembar kertas maka dalam satu tahun ada $100 \times 365 = 36.500$ lembar. Satu lembar kertas beratnya 5 g, berarti dalam satu tahun menggunakan kertas sebanyak $36.500 \times 5 = 182.500$g = 182,5kg. Jika ada 1.000 sekolah maka dalam setahun menghabiskan $1.000 \times 182{,}5 = 182.500$ kg. Mengingat 250 kg diperlukan satu pohon maka untuk 182.500kg kertas diperlukan 730 pohon. Bayangkan jika keadaan ini berlangsung dalam puluhan tahun di seluruh dunia. Berapa pohon yang ditebang untuk keperluan membuat kertas?

Pertanyaan lebih lanjut, apakah matematika berperan dalam penyajian fakta ini? Dari sini siswa akan sadar tentang kegunaan matematika dalam kehidupan sehari-hari. Inilah sebenarnya esensi *applied problem*.

e). Masalah *puzzle* (*puzzle problem*)

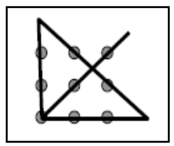
Penggunaan masalah tersebut dalam pembelajaran dimaksudkan untuk memberi kesempatan kepada siswa mendapatkan pengayaan matematika yang bersifat rekreasi (*recreational mathematics*). Mereka menemukan suatu penyelesaian yang terkadang fleksibel namun di luar perkiraan (memandang suatu masalah dari berbagai sudut pandang). Perlu diperhatikan di sini bahwa masalah *puzzle* tidak mesti berujud tekateki, namun dapat pula dalam bentuk aljabar yang penyelesaiannya diluar perkiraan.

Masalah 1.5:
Gambarlah 4 garis atau ruas garis yang melalui 9 titik. cobalah anda Gambar tanpa mengangkat alat tulis



Masalah pada bagian e merupakan kumpulan masalah (*collection of problem*). Masalah ini terkadang dapat diselesaikan dengan "*luck*" (keberuntungan) atau dengan menggunakan cara yang tidak biasa (*unusual way*). Masalah *puzzle* berbeda dengan masalah lain. Terkadang prosedur umum tidak mampu menemukan jawaban yang benar. Jawaban yang benar seringkali diperoleh dari sedikit "*trick*". Siswa terkadang termotivasi (senang) dengan masalah ini bilamana siswa lain tidak mampu menyelesaikan atau bahkan menyerah. Selain itu tipe masalah ini sebenarnya sangat membantu guru dalam membuka wawasan berpikir *divergen* dan kreatif. Namun demikian banyak orang yang tidak suka masalah tipe ini karena seringkali hanya merupakan permasalahan "teka-teki" yang dibuat oleh seseorang.

Untuk masalah 1.5 tersebut penyelesaiannya sebagai berikut. Jelas bahwa penyelesaian ini terlihat di luar prosedur umum dan memuat sedikit "*trick*" untuk menyelesaikannya.



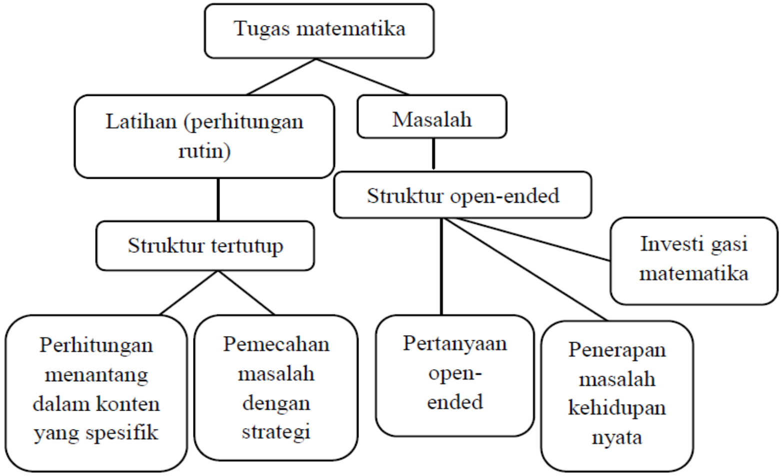
Terlihat suatu pertanyaan atau permasalahan yang kita hadapi disebut permasalahan bila pertanyaan tersebut tidak dapat dijawab langsung sebab masih harus menyeleksi informasi yang kita peroleh. Tentunya jawaban terhadap pertanyaan tersebut juga bukan merupakan jawaban yang rutin dan mekanistik, namun memerlukan strategi dengan menggunakan pengetahuan dan pengalaman yang kita miliki untuk menjawab pertanyaan tersebut. Namun pertanyaan yang tadinya merupakan permasalahan, setelah berhasil kita selesaikan, baik masalah tersebut kita selesaikan sendiri maupun diberitahukan penyelesaiannya oleh orang lain atau kita peroleh jawabannya dari buku, maka pertanyaan tersebut bukan merupakan permasalahan lagi.

Suatu pertanyaan merupakan permasalahan bagi anak SD, tetapi mungkin bukan permasalahan bagi gurunya, sebab anak SD untuk menjawab pertanyaan tersebut memerlukan proses yang rumit sedang bagi gurunya untuk menjawab tersebut memerlukan proses penalaran yang rutin.

Namun apabila suatu pertanyaan merupakan permasalahan bagi anda, apakah pertanyaan tersebut merupakan permasalahan bagi anak SD? Tentu saja pertanyaan tersebut bagi anak SD bukan merupakan permasalahan, karena anak SD memang belum siap untuk mampu menjawab permasalahan Anda. Demikian juga permasalahan yang dihadapi oleh ilmuwan, misalnya ahli geologi, tentunya bukan masalah bagi kita, karena kita tidak mempelajari permasalahan yang dihadapi oleh ahli geologi. Selain itu, pertanyaan itu merupakan permasalahan bila pertanyaan itu merupakan tantangan bagi kita untuk menjawabnya. Suatu pertanyaan merupakan suatu masalah bagi seseorang, jika orang itu tidak mempunyai cara tertentu yang segera dapat digunakan untuk menemukan jawaban pertanyaan tersebut. Ini berarti pertanyaan tersebut tidak dapat dijawab dengan prosedur rutin, pertanyaan tersebut dapat dimengerti, pertanyaan tersebut merupakan tantangan untuk dijawab yang sifatnya individu dan bergantung pada waktu. Pemecahan/penyelesaian masalah merupakan proses penerimaan tantangan dan kerja keras untuk menyelesaikan masalah tersebut. Jadi aspek penting dari makna masalah adalah bahwa penyelesaian yang diperoleh tidak dapat dikerjakan dengan prosedur rutin. Berpikir keras harus dilaksanakan untuk mendapatkan cara menyelesaikan suatu masalah. Kalkulasi/perhitungan sederhana dan aplikasi langsung rumus-rumus tidak dikualifikan sebagai permasalahan.

C. Klasifikasi Masalah

Tidak setiap tugas matematika yang diberikan guru adalah suatu masalah bagi siswa. Tugas matematika apapun dapat diklasifikasikan salah satunya sebagai latihan atau masalah. Latihan adalah suatu tugas dengan prosedur pemecahan masalah yang telah diketahui dan dapat dipecahkan dengan cara menerapkan satu atau lebih prosedur perhitungan secara langsung. Sedangkan masalah adalah tugas yang lebih kompleks karena strategi untuk memperoleh penyelesaian mungkin tidak dengan seketika tampak dalam arti bahwa untuk dapat memecahkan masalah itu membutuhkan suatu kreativitas atau orisinalitas dari individu.



Gambar 1.1 Diagram klasifikasi tugas matematika

Latihan pada buku teks yaitu tugas yang menyediakan latihan pada akhir pembelajaran dan dapat diselesaikan secara langsung menggunakan prosedur yang telah diketahui atau kemampuan yang baru saja dipelajari Masalah yaitu tugas yang tidak dengan segera diketahui penyelesaiannya, menjadi tantangan bagi individu dan memerlukan waktu untuk menyelesaikannya.

Masalah tertutup yaitu masalah yang memiliki struktur yang baik, dirumuskan dengan jelas, dimana satu jawaban yang tepat selalu ditentukan dengan suatu cara yang telah ditetapkan (tertentu) berdasarkan data penting yang diberikan dalam situasi masalah itu. Masalah tertutup ini meliputi masalah rutin menantang dengan banyak langkah dan konten yang spesifik serta masalah tidak rutin berbasis heuristik. Untuk menyelesaikan masalah-masalah tersebut, individu membutuhkan cara berpikir yang produktif daripada hanya menghafal saja dan harus menghasilkan kemampuan proses atau langkah-langkah esensial.

Perhitungan menantang yaitu masalah menantang yang dapat dipecahkan menggunakan sesuatu yang telah individu mempelajari topik matematika seperti topik aritmatika yaitu bilangan bulat, pecahan, persen dengan operasi aritmatika seperti penjumlahan, perkalian atau pembagian, tetapi yang membutuhkan kemampuan berpikir analisis tingkat tinggi.

Masalah tidak rutin yaitu masalah yang tidak familiar atau bukan ranah khusus terhadap sebarang topik di silabus yang membutuhkan strategi heuristik untuk mendekati dan memecahkan masalah itu. Masalah jenis ini seringkali memuat banyak kasus bagi siswa untuk mengatur dan mempertimbangkannya. Syarat dalam konten matematikanya harus sudah dikuasai sebelumnya agar dapat memecahkan masalah itu.

Masalah *open-ended* (seringkali dianggap sebagai "*illstructured problem*") yaitu masalah tanpa rumusan yang jelas karena tidak tersedia lengkap data atau asumsi dan tidak terdapat prosedur tertentu yang menjamin kebenaran penyelesaian. Masalah ini meliputi masalah penerapan kehidupan nyata, investigasi matematika dan pertanyaan open-ended pendek.

Masalah penerapan kehidupan nyata yaitu masalah yang berkaitan atau berasal dari situasi sehari-hari. Untuk memecahkan masalah ini, individu harus memulai dengan situasi dunia nyata dan kemudian melihat keterkaitan yang mendasari ide-ide matematis.

Investigasi matematika yaitu aktivitas *open-ended* bagi siswa untuk mengeksplorasi dan memperluas sebuah bagian dari kealamiahan matematika untuk kepentingannya sendiri. Aktivitas ini mungkin dikembangkan dalam cara yang berbeda untuk siswa yang berbeda untuk menyiapkan mereka untuk mengembangkan cara mereka sendiri dalam menggeneralisasi hasil dari eksplorasi, tabulasi data untuk melihat pola, membuat dugaan dan mengujinya, dan membenarkan serta menggeneralisasi temuan mereka. Pada umumnya, aktivitas seperti ini membutuhkan strategi-strategi alternatif, perlu untuk menanyakan "bagaimana jika..." dan mengamati perubahan-perubahan.

Pada umumnya masalah jenis ini digunakan untuk mengembangkan pemahaman yang lebih mendalam terhadap ide-ide matematika dan komunikasi diantara siswa. Masalah *open-ended* membutuhkan kognitif tingkat tinggi seperti (1) Membuat asumsi sendiri terhadap data yang tak tersedia lengkap, (2) Mengakses pengetahuan yang relevan, (3) Menunjukkan penalaran bilangan dan pola pengelompokan yang sama, (4) Menggunakan strategi dalam urutan yang sistematis, (5) Mengkomunikasikan argumentasi, (6) Menggunakan berbagai macam cara penyajian, serta (7) Menunjukkan kreativitas sebanyak mungkin dalam strategi dan penyelesaian

Masalah di dalam matematika dapat diklasifikasi dalam dua jenis (Pusat Kurikulum, 2002 a, b, dan c), yaitu:

1. Penemuan *Problem to find*, yaitu mencari, menentukan, atau mendapatkan nilai atau objek tertentu yang tidak diketahui dari soal serta memenuhi kondisi atau syarat yang sesuai dengan soal.

2. Pembuktian *Problem to prove*, yaitu prosedur untuk menentukan apakah suatu pernyataan benar atau tidak benar. Soal membuktikan terdiri atas bagian hipotesis dan kesimpulan. Untuk membuktikan kita harus membuat atau memproses pernyataan yang logis dari hipotesis menuju kesimpulan, sedangkan untuk membuktikan bahwa suatu pernyataan tidak benar kita harus memberikan contoh penyangkalnya sehingga pernyataan tersebut menjadi tidak benar.

Perhatikan beberapa contoh soal berikut:

1. Apa langkah pertama yang harus dilakukan dalam mengerjakan $3\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4}$?
2. Tentukan hasilnya bila $3\frac{1}{4} \times 6 : 2\frac{1}{2}$?
3. Manakah yang lebih luas, kebun yang berbentuk persegipanjang dengan panjang 314 m dan lebar 12 m atau kolam renang yang berbentuk lingkaran dengan jari-jari lingkaran 12 m?
4. Ani lebih tua dari Budi, Budi lebih tua daripada Chandra, Chandra lebih muda daripada Deni. Siapakah yang paling muda di antara mereka?
5. Diketahui sejumlah bangun geometri datar, yaitu persegi, persegipanjang, segitiga, lingkaran, belahketupat, jajargenjang, laying-layang, dan trapesium. Buatlah hubungan di antara mereka dalam bentuk diagram peta konsep!
6. Dengan cara bagaimana kita menunjukkan 6 dibagi 3 adalah 2?
7. Jelaskan mengapa $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} - 5 = 25$
8. Mengapa bilangan-bilangan ganjil dikalikan dengan bilangan genap selalu menghasilkan bilangan genap?
9. Mengapa setiap persegi adalah persegi panjang?
10. Mengapa sebuah relasi belum tentu merupakan fungsi?

Dari soal-soal di atas soal no 1-5 merupakan masalah penemuan, sedangkan soal no 6-10 merupakan masalah pembuktian, mengapa?

1. Pada soal no 1 siswa akan menentukan langkah pertama untuk mendapatkan nilai dari $3\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4}$***masalah penemuan***.
2. Pada soal no 2 siswa akan mencari nilai dari $3\frac{1}{4} \times 6 : 2\frac{1}{2}$ ***masalah penemuan***.
3. Pada soal no 3 siswa akan menentukan mana yang lebih luas dengan mencari luas kebun dan kolam renang dengan ukuran masing-masing yang sudah di tentukan ***masalah penemuan***.
4. Pada soal no 4 siswa akan menentukan kondisi yang sesuai soal dengan yang diberikan ***masalah penemuan***.
5. Pada soal no 5 siswa akan mencari, menentukan, dan mendapatkan hubungan bangun geometri datar yang diberikan dalam diagram peta konsep ***masalah penemuan***.
6. Pada soal no 6 siswa akan menunjukkan bahwa 6 dibagi 3 adalah 2 merupakan pernyataan yang bernilai benar ***masalah pembuktian***.
7. Pada soal no 7 siswa akan menunjukkan bahwa image 002.gif adalah benar ***masalah pembuktian***.
8. Pada soal no 8, 9, 10 merupakan masalah pembuktian diserahkan kepada Anda sebagai latihan.

D. Langkah-Langkah Pemecahan Matematika

Dalam menyelesaikan masalah kita harus bekerja keras menerima tantangan untuk menyelesaikan masalah yang kita hadapi. Berbagai macam kemampuan berpikir yang kita miliki, seperti: ingatan, pemahaman dan penerapan berbagai teorema, aturan, rumus, dalil, dan hukum akan sangat membantu dalam penyelesaian suatu masalah matematika yang kita hadapi.

Kemampuan dalam pemecahan masalah termasuk suatu ketrampilan, karena dalam pemecahan masalah melibatkan segala aspek pengetahuan (ingatan, pemahaman, penerapan, analisis, sintesis, dan evaluasi) dan sikap mau meneriam tantangan.

Secara umum strategi pemecahan masalah yang sering digunakan adalah strategi yang dikemukakan oleh Polya (1973). Menurut Poyla untuk mempermudah memahami dan menyelesaikan suatu masalah, terlebih dahulu masalah tersebut disusun menjadi masalah-masalah sederhana, lalu dianalisis (mencari semua kemungkinan langkah-langkah yang akan ditempuh), kemudian dilanjutkan dengan proses sintesis (memeriksa kebenaran setiap langkah yang dilakukan). Langkah-langkah pemecahan masalah matematika yang dikemukakan oleh Poyla, satu persatu sebagai berikut.

1. Memahami masalah

Pada langkah pertama ini, pemecah masalah harus dapat menentukan apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan. Untuk mempermudah pemecah masalah memahami masalah dan memperoleh gambaran umum penyelesaiannya dapat dibuat catatan-catatan penting dimana catatan-catatan tersebut bisa berupa gambar, diagram, tabel, grafik atau yang lainnya. Dengan mengetahui apa yang diketahui dan ditanyakan maka proses pemecahan masalah akan mempunyai arah yang jelas.

2. **Merencanakan cara penyelesaian**

Untuk dapat menyelesaikan masalah, pemecah masalah harus dapat menemukan hubungan data dengan yang ditanyakan. Pemilihan teorema-teorema atau konsep-konsep yang telah dipelajari, dikombinasikan sehingga dapat dipergunakan untuk menyelesaikan masalah yang dihadapi itu. Jadi diperlukan aturan-aturan agar selama proses pemecahan masalah berlangsung, dapat dipastikan tidak akan ada satupun alternatif yang terabaikan. Untuk keperluan ini, bila perlu perlu pemecah masalah mengikuti langkah-langkah berikut.

a. mengumpulkan data/informasi dengan mengaitkan persyaratan yang ditentukan untuk analisis
b. jika diperlukan analisis informasi yang diperoleh dengan menggunakan analogi masalah yang pernah diselesaikan
c. apabila ternyata “macet”, perlu dibantu melihat masalah tersebut dari sudut yang berbeda.

Jika hubungan data dan yang ditanyakan sulit untuk dilihat secara langsung, ikutilah langkah-langkah berikut.

a. Membuat sub masalah. Hal ini akan sangat berguna pada masalah yang kompleks.
b. Cobalah untuk mengenali sesuatu yang sudah dikenali, misalnya dengan mengingat masalah yang mirip atau memiliki prinsip yang sama.
c. Cobalah untuk mengenali pola dengan mencari keteraturan-keteraturan. Pola tersebut dapat berupa pola geometri atau pola aljabar.
d. Gunakan analogi dari masalah tersebut, yaitu masalah yang mirip, masalah yang berhubungan, yang lebih sederhana sehingga memberikan Anda petunjuk yang dibutuhkan dalam memecahkan masalah yang lebih sulit.
e. Masukan sesuatu yang baru untuk membuat hubungan antara data dengan hal yang tidak diketahui.
f. Buatlah kasus
g. Mulailah dari akhir (Asumsikan Jawabannya) yaitu dengan menganalisis bagaimana cara mendapatkan tujuan yang hendak dicapai.

3. **Melaksanakan rencana**

Berdasarkan rencana, penyelesaian–penyelesaian masalah yang sudah direncanakan itu dilaksanakan. Di dalam menyelesaikan masalah, setiap langkah dicek, apakah langkah tersebut sudah benar atau belum. Hasil yang diperoleh harus diuji apakah hasil tersebut benar-benar hasil yang dicari.

4. **Melihat kembali**

Tahap melihat kembali hasil pemecahan masalah yang diperoleh mungkin merupakan bagian terpenting dari proses pemecahan masalah. Setelah hasil penyelesaian diperoleh, perlu dilihat dan dicek kembali untuk memastikan semua alternatif tidak diabaikan misalnya dengan cara:

a. melihat kembali hasil
b. melihat kembali alasan-alasan yang digunakan
c. menemukan hasil lain
d. menggunakan hasil atau metode yang digunakan untuk masalah lain
e. menginterpretasikan masalah kembali
f. menginterpretasikan hasil
g. memecahkan masalah baru
h. dan lain sebagainya.

E. Strategi Pemecahan Masalah

Ada beberapa strategi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah. Pada bagian berikut akan disajikan beberapa contoh soal pemecahan masalah sekaligus strategi yang digunakan dan langkah-langkah penyelesaiannya.

1. Bekerja Mundur

Dalam strategi ini proses penyelesaian masalah dimulai dari apa yang ditanyakan, bergerak menuju apa yang diketahui. Melalui proses tersebut dianalisis untuk dicapai pemecahan masalahnya.

Strategi ini cocok untuk menjawab permasalahan yang menyajikan kondisi (hasil) akhir dan menanyakan sesuatu yang terjadi sebelumnya. Perhatikan contoh permasalahan berikut:

Contoh 1.6:
Pada awal bulan Pak Dibyo menerima gaji. Setengah dari gajinya diberikan istrinya untuk belanja sehari-hari. 1/3 sisanya, diberikan anaknya untuk biaya sekolah. Setengah dari sisanya untuk bayar telepon, listrik dan PAM. Jika sekarang uang Pak Dibyo tinggal Rp. 300.000, berapa gaji Pak Dibyo semula?

Penyelesaian:

(1) Memahami masalah
Pertanyaan apa yang harus dijawab adalah besar gaji pak Dibyo semula, sebelum digunakan.

(2) Direncanakan soal dapat diselesaikan dengan cara mundur, dengan membuat bagan. (Bagian ini tidak harus dinyatakan secara tertulis).

(3) Menyelesaikan masalah
Masalah ini dapat diselesaikan dengan cara bekerja mundur, dengan membuat bagan berikut:

<table>
<tr><td colspan="2">Gaji Pak Dibyo semula</td></tr>
<tr><td>Istri (1/2)</td><td>Anak (1/3 dari sisa)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Istri</td><td>Anak</td></tr>
<tr><td>Telepon, Listrik, PAM</td></tr>
<tr><td>Sisanya = 300.000</td></tr>
</table>

Dengan bekerja mundur bagan tersebut dapat diisi

<table>
<tr><td rowspan="3">900.000</td><td>Anak</td></tr>
<tr><td>Telepon, Listrik, PAM</td></tr>
<tr><td>Sisanya = 300.000</td></tr>
</table>

Jadi gaji Pak Dibyo semula adalah Rp. 1.800.000.

(4) Memeriksa kembali

Periksa kembali jawaban yang diperoleh, yaitu:

Istri mendapat Rp. 900.000 (setengah dari gaji), dan gaji yang tersisa Rp. 900.000.

Anaknya mendapat 1/3 dari sisa, yaitu 1/3 dari Rp.900.000, yaitu Rp. 300.000, dan gaji yang tersisa Rp.600.000.

Untuk bayar listrik, telepon, dan PAM ½ dari sisanya, yaitu ½ dari Rp.600.000, yaitu Rp.300.000, dan sisanya Rp.300.000.

Sesuai dengan masalah yang dihadapi.

Contoh 1.7:
Michelle membuat beberapa kue. Jika bagian kue disimpan untuk dimakan pada hari berikutnya. Sisa kue yang ada diberikan kepada tiga saudaranya sehingga setiap anak memperoleh 4 kue. Berapa banyak kue yang dibuat Michelle?

Berdasarkan informasi dalam soal diketahui bahwa ketiga saudara Michelle masing-masing mendapatkan 4 kue (ini menjadi kondisi akhir), yang ditanyakan adalah kondisi sebelumnya yaitu banyak kue yang dibuat Michelle. Untuk menyelesaikan permasalahan ini, kita menggunakan strategi bekerja mundur dengan terlebih dahulu menghitung jumlah kue yang diterima semua saudara Michelle dan kemudian mengalikan hasilnya dengan 2 karena kue yang dibagikan adalah dari total kue yang dibuat Michelle. Sehingga total kue yang dibuat adalah 3 x 4 x 2 = 24 kue.

2. Beraksi *(Act It Out)*

Strategi ini lebih banyak terkait dengan manipulasi objek atau aktivitas fisik untuk memberikan gambaran nyata dari masalah yang diberikan. Kita dituntut melihat apa yang ada dalam masalah dan membuat hubungan antar komponen dalam masalah menjadi jelas melalui serangkaian aksi fisik atau manipulasi objek. Untuk mempermudah pemahaman kita maka berikut contoh dan penyelesaian dari strategi ini.

Contoh 1.8:
Satu kotak botol berisi 24 botol, Udin dan Yuni akan mengisi kotak the botol tersebut dengan 12 botol kosong. Kotak itu terdiri dari 6 baris dan 4 kolom. Udin menantang Yuni: "dapatkah kamu menemukan 2 cara yang berbeda untuk menempatkan 12 botol ini ke kotak, dengan syarat tiap baris dan tiap kolom berisi botol dengan jumlah ganjil?"

Masalah ini akan lebih mudah diselesaikan jika benar-benar tersedia kotak teh botol dan 12 botol kosong. Akan tetapi jika tidak ada, kedua macam benda tersebut dapat diganti dengan tabel-tabel berikut dan 12 buah kancing baju.

Perhatikan kotak-kotak berikut!

Misalnya dicoba

○	○	○			
		○	○	○	
	○	○	○		
			○	○	○

Ternyata baris- 1, 2, 3, 4, sudah benar, begitu juga kolom- 1, 3, 4

6. Akan tetapi kolom- 2 dan kolom- 4 belum terisi ganjil.

Setelah mencoba beberapa kali, mungkin akan didapat hasil

○	○	○			
		○	○	○	
		○	○	○	
			○	○	○

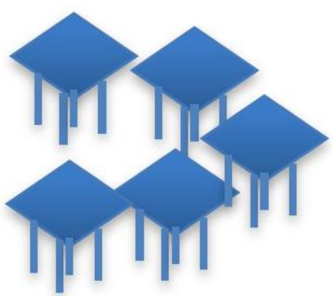
Atau

○	○	○			
○		○		○	
	○				
○	○	○	○		○

Silahkan dicek, apakah jawaban yang diperoleh sudah sesuai dengan yang diinginkan. Masih banyak jawaban yang lain.

Contoh 1.9:
Di dalam sebuah ruangan terdapat 2 jenis meja. Meja jenis 1 memiliki 4 kaki dan meja jenis 2 mempunyai 3 kaki. Jika jumlah kaki dari semua meja adalah 32 kaki, tentukan jumlah dari masing-masing jenis meja!

permasalahan di atas, aksi fisik tentu saja tidaklah mudah. Oleh karena itu, kita dapat menggunakan manipulasi objek agar hubungan antar komponen dalam permasalahan menjadi jelas. Cara yang bisa dilakukan adalah dengan membuat manipulasi objek dengan sebuah miniatur gambar meja sesuai jenisnya.



Dengan melakukan manipulasi objek miniatur meja sesuai jenisnya (sesuai jumlah kaki), maka kita dengan mudah menentukan berapa jumlah meja menurut jenisnya. Dari manipulasi objek didapatkan bahwa meja berkaki 4 ada 5 buah dan yang berkaki 3 ada 4 buah.

3. Membuat tabel/daftar

Strategi ini digunakan untuk membantu menganalisis permasalahan atau jalan pikiran, sehingga segala sesuatunya tidak hanya dibayangkan saja. Strategi ini dilakukan dengan mengubah informasi yang ada dalam soal disajikan dalam bentuk tabel. Tujuanya adalah membantu mempermudah peserta didik untuk melihat pola dan memperjelas informasi yang hilang. Dengan kata lain, strategi ini sangat membantu dalam mengklasifikasi dan menyusun informasi atau data dalam jumlah besar. Untuk memberi gambaran bagaimana strategi ini digunakan dalam pemecahan masalah matematika berikut contoh soal dan penyelesaiannya.

Contoh 1.10:
Adik minta uang Rp.25.000 pada ibu. Jika uang yang dimiliki ibu berupa pecahan ribuan, lima ribuan, dan sepuluh ribuan, ada berapa variasi uang yang dapat diberikan ibu kepada adik?

Masalah ini dapat diselesaikan dengan membuat tabel berikut:

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2
L	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	1	0
R	25	20	15	10	5	0	15	10	5	0	0	5

P = sepuluh ribuan
L = lima ribuan
R = ribuan

Untuk tahap awal siswa perlu diberikan contoh dulu, jika perlu gunakan uang mainan dari kertas. Ajarkan siswa mengisikan tabelnya. Jika siswa belum berhasil menuliskan semua kemungkinan yang ada, tetap berikan penghargaan pada siswa, dan lain waktu soal semacam ini dapat diulang lagi.

Contoh 1.11:
Di dalam suatu pembelajaran matematika yang menggunakan metode diskusi, kelas dibagi ke dalam lima kelompok yaitu kelompok I sampai dengan kelompok V. Setiap wakil kelompok diminta untuk menyajikan hasil diskusi kelompoknya di depan kelas. Budi menyajikan pertama kali dan Tia menyajikan laporannya yang terakhir. Sedangkan Rudi menyajikan laporannya lebih dahulu dari Tia, Ani melaporkan setelah Budi tetapi sebelum Rudi dan Andi mendapat kesempatan pada urutan ketiga. Berada di kelompok berapakah Rudi?

Jika kita hanya membaca kalimat soal di atas, maka kita akan kesulitan jika harus mengingat dan mengidentifikasi informasi. Untuk itu kita perlu sarana untuk memetakan kondisi yang ada sehingga mudah ditempatkan dan tidak akan terulang atau bahkan saling tukar tempat. Tabel menjadi salah satu cara untuk menyajikan data dalam soal secara rinci dan jelas.

Kel. 1	Kel. 2	Kel. 3	**Kel. 4**	Kel. 5
Budi	Ani	Andi	**Rudi**	Tia

Setelah dipetakan dalam table, kolom yang masih kosong adalah kelompok 4. Sehingga bisa dengan mudah kita mengisikan ke dalam kolom bahwa Rudi ada di kelompok 4.

4. Membuat gambar atau diagram

Strategi ini berkait dengan pembuatan sket atau gambar untuk mempermudah memahami masalah dan mempermudah mendapatkan gambaran umum penyelesaiannya. Dengan strategi ini, hal-hal yang diketahui tidak sekedar dibayangkan namun dapat dituangkan ke atas kertas.

Strategi ini dilakukan dengan cara menyederhanakan masalah dan memperjelas hubungan yang ada dengan menggunakan gambar atau diagram. Pembuatan gambar atau diagram tidak perlu membuatnya secara detail tetapi cukup yang berhubungan dengan permasalahan yang ada. Untuk memberikan gambaran bagaimana strategi ini dilakukan, berikut contoh soal dan penyelesaiannya:

Contoh 1.12:
Pak Julio seorang pesulap. Sebagai kostumnya, dia memiliki jas dan mantel bulu. Untuk bagian kepala, dia memiliki topi atau rambut palsu berwarna merah. Untuk sepatunya dia memiliki sepatu bot merah dan sepatu Aladin berwarna hitam. Ada berapa macam variasi kostum yang dapat digunakan pak Julio?

Pahami masalahnya, macam kostum apa saja yang dimiliki?
Untuk badan: jas dan mantel
Untuk kepala: topi dan rambut palsu
Untuk kaki: sepatu bot dan sepatu Aladin
Jika pak Julio pakai jas, maka pilihan untuk kepala bisa topi atau rambut palsu. Jika memiliki rambut palsu, maka sepatunya bisa memilih sepatu bot atau sepatu Aladin. Begitu juga jika dia memilih topi.
Keadaan tersebut dapat digambarkan dengan diagram berikut:

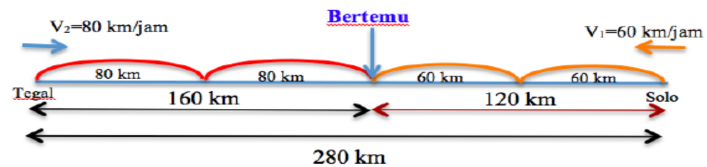
Jas → Topi → Sepatu bot (1)
Topi → Sepatu Aladin (2)
Jas → Rambut palsu → Sepatu bot (3)
Rambut palsu → Sepatu Aladin (4)

Mantel → Topi → Sepatu bot (5)
Topi → Sepatu Aladin (6)
Mantel → Rambut palsu → Sepatu bot (7)
Rambut palsu → Sepatu Aladin (8)

Dari diagram tersebut dapat diketahui bahwa pak Julio memiliki 8 variasi kostum untuk penampilannya.

Contoh 1.13:
Michael dan Michelle melakukan perjalanan melalui jalan yang sama dan waktu berangkat yang sama dari dua kota yang berbeda yaitu Tegal dan Solo. Michelle dari Solo pukul 06.00 WIB menuju Tegal dengan kecepatan 60 km/jam dan Michael dengan kecepatan 80 km/jam dari Tegal ke Solo. Jika jarak Solo ke Tegal 280 km, kapan dan dimana mereka akan bertemu di jalan?

Kondisi soal ini dapat dibuat gambar berikut ini sehingga memudahkan untuk mengerjakan.



Dengan gambar yang ada dapat dilihat jarak yang ditempuh setiap jamnya untuk kedua anak. Setiap Jam Michelle menempuh jarak 60 km dan Michael 80 km. Sehingga dua jam berikutnya masing-masing menempuh jarak 120 km dan 160 km sehingga jika ditotalkan 280 km yang merupakan jarak Solo – Tegal. Sehingga mereka bertemu setelah melakukan perjalanan 2 jam dan bertemu di 120 km dari kota Solo, 160 km dari kota Tegal.

Sehigga hasil ini menunjukkan bahwa 3 langkah Polya di awal sudah dilakukan secara baik dengan hasil yang benar.

5. Tebak dan Periksa (Uji) (*Guess and Check*)

Strategi ini biasanya digunakan untuk mendapatkan gambaran umum pemecahan masalah (*trial and error*). Proses mencoba-coba ini tidak akan selalu berhasil, adakalanya gagal. Proses mencoba-coba dengan menggunakan suatu analisis yang tajam sangat dibutuhkan pada penggunaan strategi ini.

Strategi menebak dan menguji ini didasarkan pada aspek-aspek yang relevan dengan permasalahan yang ada, ditambah pengetahuan dari pengalaman sebelumnya. Hasil tebakan tentu saja harus diuji kebenarannya serta diikuti oleh sejumlah alasan yang logis.

Contoh 1.14:
Ana memiliki 49 koleksi jepit rambut merah dan hitam. Dia memiliki lebih sedikit 13 jepit rambut merah daripada jepit rambut hitam. Berapa banyak masing-masing jepit rambut yang dimiliki Ana?

Pahami masalahnya:
- Jumlah jepit rambutnya = 49
- Jepit rambut yang berwarna merah lebih sedikit daripada jepit rambut yang berwarna hitam, dan selisihnya 13.

Biarkan sisa mulai menebak. Jika ada 25 jepit rambut hitam, berarti jepit rambut merah ada 12. Dan jumlahnya menjadi 25 + 12 = 37. Masih kurang, sehingga mestilah jepit hitamnya lebih banyak dari 25. Setelah beberapa kali menebak, mungkin akan didapat hasil:

$25 + 12 = 37$
$30 + 17 = 47$
$31 + 18 = 49$

Jadi jepit rambut yang dimiliki Ana 31 buah berwarna hitam dan 18 buah berwarna merah, dan selisihnya 13. Sesuai dengan masalah yang dihadapi.

Contoh 1.15:
Michelle mengambil tiga bilangan dari kumpulan bilangan 1 sampai 20. Jumlah tiga bilangan tersebut 1/3 dari hasil kali ketiganya. Bilangan berapa sajakah yang diambil oleh Michelle?

Untuk dapat mengerjakan persoalan tersebut maka kita bisa menentukan kemungkinan ketiga bilangan tersebut lalu menguji kebenarannya. Saat menebak ketiga bilangan yang mungkin, tidak hanya asal menentukan bilangan tersebut tetapi harus dipikirkan secara logis. Harapannya tebakan yang kita lakukan merupakan jawaban yang benar.

Berdasarkan persyaratan yang diberikan, maka hasil kali ketiga bilangan harus habis dibagi 3 karena kumpulan bilangan yang diberikan adalah bilangan asli 1 sampai dengan 20. Sehingga hasil kali ketiga bilangan itu 12, 15, 18, 21, 24, …. yang dapat dibagi 3. Misal kita ambil hasil kali ketiga bilangan adalah 12. Maka proses penyelesaian yang bisa dilakukan adalah:

Misal bilangan itu a, b, dan c, maka berlaku:

$a + b + c = \frac{1}{3}abc$ (jika abc =12)

$a + b + c = \frac{1}{3}12$

$a + b + c = 4$ maka didapatkan $a = 1$, $b = 1$, dan $c = 2$ atau $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$ atau $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$

Silahkan mencoba dengan 15, 18, 21, 24, dst.

6. Menemukan Pola

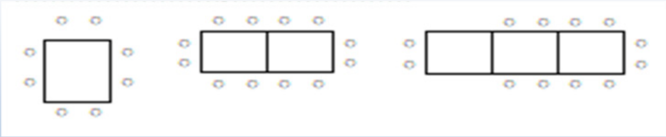
Strategi ini berkait dengan pencarian keteraturan-keteraturan. Keteraturan yang sudah diperoleh akan lebih memudahkan untuk menemukan penyelesaian masalahnya.

Strategi ini digunakan untuk menyelesaikan soal-soal terkait dengan bilangan atau kejadian yang menunjukkan pola tertentu. Sehingga dengan menentukan pola yang dihasilkan maka dapat dilakukan diperkirakan kondisi tertentu dari sebuah kejadian meskipun dalam jumlah yang besar.

Untuk memberikan gambaran yang jelas terkait strategi ini, berikut contoh soal dan penyelesaiannya.

Contoh 1.17:

Perhatikan susunan meja dan kursi berikut



Jika ada susunan 10 meja, ada berapa kursi yang mengelilinginya?

Pahami masalahnya: meja diatur memanjang dan dikelilingi kursi. Jika meja yang dideretkan ada 10, ada berapa kursi yang mengelilingi?

Ajaklah siswa untuk melihat pola yang ada

1 meja $\longleftrightarrow$ 8 kursi
2 meja $\longleftrightarrow$ 12 kursi
3 meja $\longleftrightarrow$ 16 kursi

Dapat dilihat bahwa untuk tiap kali tambah satu meja, maka kursinya akan bertambah 4. Untuk tahap awal, sudah cukup bagus jika siswa dapat membuat deret 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44. Jadi, jika mejanya ada 10, maka kursi yang mengelilinginya ada 44 buah.

Contoh 1.17:

Terdapat barisan bilangan asli ganjil berikut: 1, 3, 5, 7, …
Tentukan bilangan asli ganjil yang ke-100!

Berdasarkan urutan bilangan yang disajikan terlihat bahwa antar bilangan yang berurutan selisihnya beda) = 2. Kita misalkan 1 adalah suku ke-1 (U_1), 3 adalah suku ke-2, 5 adalah suku ke-3 dst. Sehingga dapat ditentukan pola dari bilangan asli ganjil ini berikut ini:

$U_1 = a$
$U_2 = U_1 + b = a + b$
$U_3 = U_2 + b = a + b + b$
$U_3 = a + 2b$
$U_4 = U_3 + b = a + 2b + b$
$U_4 = a + 3b$
Maka $U_5 = a + 4b$
$U_6 = a + 5b$ dan $U_{100} = a + 99b$
$= 1 + 99 \times 2 = 199$

Contoh 1.18:
Berapa lama waktu yang dibutuhkan untuk menyebarkan berita disebuah kota yang berpenduduk 3.000 orang, jika setiap orang yang mendengar berita itu menyebarkan ke 3 orang setiap 15 menit?

Untuk memperjelas permasalahan di atas, kita dapat membuat pola dengan didahului membuat tabel seperti contoh dibawah ini. Hubungan banyak orang yang menerima berita dan berita yang diterima.

Menit Ke- 15 30 45 … n
Orang 3 6 9 … 3.000

Berdasarkan data yang disajikan tersebut didapatkan pola hubungan antara jumlah orang dengan waktu yang dibutuhkan untuk

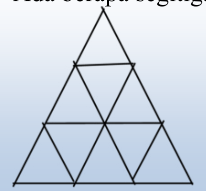
menyebarkan berita. Besar waktu yang dibutuhkan nilainya selalu 5 kali dari jumlah orang. Sehingga jika 3.000 orang maka waktu yang dibutuhkan adalah 3.000 x 5 = 15.000 menit = 250 jam.

7. Mengubah sudut pandang

Strategi ini berkait dengan penggunaan aturan- aturan yang dibuat sendiri oleh para pelaku selama proses pemecahan masalah berlangsung sehingga dapat dipastikan tidak akan ada satu alternatif yang terabaikan.

Strategi ini muncul setelah tidak dimungkinkan menggunakan strategi yang ada. Kita harus mengubah pandangan kita agar masalah matematika yang diberikan dapat diselesaikan. Masalah yang dihadapi perlu didefinisikan dengan cara yang sama sekali berbeda sehingga akan memuncul strategi yang tidak biasa tetapi dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut.

Contoh 1.19:
Ada berapa segitiga pada gambar berikut?



Lihat dengan teliti, ajaklah siswa untuk melihat bahwa sebenarnya segitiga yang ada bukan hanya 9 buah segitiga kecil-kecil, tapi masih ada segitiga lain yang mungkin berukuran lebih besar yang tersembunyi pada gambar tersebut.

Contoh 1.20:
Tentukan hasil dari 1 + 2 + 3 + . . . + 49

Untuk menyelesaikan permasalahan di atas, cara yang biasa yang digunakan adalah dengan menjumlahkan semua bilangan satu persatu. Pandangan ini harus diubah dengan menggunakan cara yang lebih sederhana yaitu dengan menjumlahkan 1 dan 49, 2 dan 48, dan seterusnya seperti yang terlihat berikut ini.

1 + 49 = 50 13 + 37 = 50
2 + 48 = 50 14 + 36 = 50
3 + 47 = 50 15 + 35 = 50
4 + 46 = 50 16 + 34 = 50
5 + 45 = 50 17 + 33 = 50
6 + 44 = 50 18 + 32 = 50
7 + 43 = 50 19 + 31 = 50

8 + 42 = 50 20 + 30 = 50
9 + 41 = 50 21 + 29 = 50
10 + 40 = 50 22 + 28 = 50
11 + 39 = 50 23 + 27 = 50
12 + 38 = 50 24 + 26 = 50

Karena jumlah setiap pasangan bilangan ini 50, terdapat 24 pasang yang bernilai 50, hasil dari 1 + 2 + 3 + . . . + 49 adalah 1200.

8. Menghitung Semua Kemungkinan secara Sistematis

Strategi ini sering digunakan bersamaan dengan strategi mencari pola dan membuat tabel, karena kadangkala tidak mungkin bagi kita untuk mengidentifikasi seluruh kemungkinan himpunan penyelesaian.

Dalam kondisi demikian, kita dapat menyederhanakan pekerjaan kita dengan mengkategorikan semua kemungkinan tersebut ke dalam beberapa bagian. Namun, jika memungkinkan kadang-kadang kita juga perlu mengecek atau menghitung semua kemungkinan jawaban tersebut.

Perhatikan dua buah contoh permasalahan berikut!

Contoh 1.21:
Dalam berapa cara orang dapat menjumlahkan 8 bilangan ganjil untuk mendapat jumlah 20? (Sebuah bilangan dapat digunakan lebih dari satu kali).

Berdasarkan contoh maka beberapa alternative jawaban yang dapat digunakan adalah berikut ini.

Bilangan ke-								Jumlah
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	
1	3	3	1	5	3	1	3	20
3	1	3	3	1	3	1	5	20
1	3	3	1	5	3	1	3	20
3	1	3	1	3	1	1	7	20
5	1	3	3	1	3	3	1	20
3	1	5	1	3	3	1	3	20
3	1	3	3	1	5	1	3	20
1	3	1	3	3	3	1	5	20
Masih banyak yang lain								

Silahkan Anda menentukan jawaban yang lain sehingga memenuhi persyaratan pada soal tersebut.

9. Mengidentifikasi Informasi yang Diinginkan, Diberikan, dan Butuhkan

Strategi ini memberi peluang kepada siswa/mahasisma untuk mengidentifikasi semua informasi yang diberikan dalam soal. Informasi yang diberikan akan memberi arahan, apa yang diinginkan dalam soal, dan informasi apa saja yang sudah diberikan dan informasi apa saja yang dibutuhkan. Untuk memberi gambaran yang jelas dari strategi ini maka perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.22:
Merek sepatu apa yang paling banyak diminati oleh anak Sekolah Dasar di tempatmu!

Untuk menjawab permasalahan di atas, terlebih dahulu kita harus menentukan permasalahan yang akan dijawab yaitu merek sepatu yang paling banyak diminati.

Selanjutnya kita harus memilah-milah informasiyang ada di sekitar kita untuk menjawab permasalahan. Informasi yang kita butuhkan adalah informasi tentang merek-merek sepatu yang ada dipasarkan. Lalu kita harus melihat merek apa saja yang sering digunakan oleh anak Sekolah Dasar, dan menentukan mana yang paling banyak digunakan. Dengan cara ini maka kita dapat menentukan satu merek sepatu yang paling favorit.

10. Menulis Kalimat Terbuka

Strategi ini merupakan strategiyang sering digunakan dalam menyelesaikan masalah matematika di kalangan mahasiswa. Walaupun strategi ini termasuk sering digunakan, akan tetapi pada langkah awal anak seringkali mendapat kesulitan untuk menentukan kalimat terbuka yang sesuai. Untuk sampai pada kalimat terbukan yang diinginkan, mahasiswa harus cermat dalam membaca soal dan mencari hubungan antar unsur yang terkandung di dalam soal. Setelah itu baru menentukan kalimat terbuka yang sesuai. Untuk memberi gambaran yang jelas dari strategi ini, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.23:
Sebuah persegi panjang memiliki panjang 2 kali dari lebarnya. Jika keliling dari persegi panjang ini 36 cm, tentukan luasnya!

Berdasarkan soal ini, langkah pertama yang harus dilihat adalah menentukan hubungan antara panjang dan lebar serta hubungan panjang, lebar dan keliling. Didapatkan bahwa panjang = 2 kali lebar dan keliling = 2 kali panjang + 2 kali lebar, sehingga dari hubungan ini kita bisa membuat kalimat terbukanya.

p = 2I
k = 2p + 2I, jika p = 2I maka: k = 2 (2I) + 2I
k = 4I + 2I, jika k = 36 cm maka: 36 cm = 6I

$l = (\frac{36}{6})$ cm= 6 cm

Jika l = 6 cm maka p = 2l = 12 cm

Maka luas persegi panjang dapat ditentukan dari persamaann luas yaitu:

$L = p \times l$

$= 12 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \quad = 72 \text{ cm}^2$

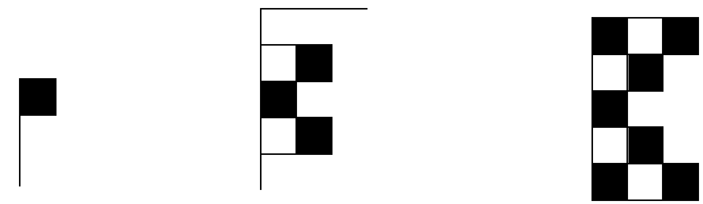
11. Menyelesaikan Masalah yang Lebih Sederhana atau Serupa

Sebuah soal adakalanya sangat sulit untuk diselesaikan karena di dalamnya terkandung permasalahan yang cukup kompleks misalnya menyangkut bilangan yang sangat besar, bilangan sangat kecil, atau berkaitan dengan pola yang cukup kompleks. Untuk menyelesaikan masalah seperti ini, dapat dilakukan dengan menggunakan analogi melalui penyelesaian masalah yang mirip atau masalah yang lebih mudah.

Sebagai contoh kita akan mengukur tebal 1 kertas dari buku tulis kita. Maka kita akan mengalami kesulitan menggunakan alat ukur yang biasa kita gunakan, misalkan mistar. Untuk mengatasi masalah tersebut maka kita bisa membuat analogi kegiatan yaitu mengukur tebal kertas, tetapi bukan untuk 1 kertas tetapi untuk 100 kertas. Dengan cara ini maka kita dapat menggunakan alat ukur kita yaitu mistar untuk melakukan pengukuran untuk tebal 100 kertas. Untuk mendapatkan tebal 1 kertas maka hasil pengukuran 100 kertas dibagi 100.

LATIHAN SOAL

1. Apa yang dimaksud dengan Pemecahan Masalah Matematika?
2. Jelaskan dan sebutkan klasifikasi masalah!
3. Tiga suku pertama ditampilkan pada gambar. Jika berisan berlanjut dalam pola di bawah ini, berapa banyak persegi yang akan terbentuk pada suku kesepuluh dan berapa banyak persegi yang akan diarsir pada suku yang ketujuh? (https://m.youtube.com/watch?v=1mt90KL9zAM)



4. Seorang ahli perhisana membuat anting perak dari lempeng-lempeng perak. Setiap lempengan dapat dibuat 1 anting. Hasil sisa dari 6 lempengan perka kemudian dapat dilelehkan dan disatukan kembali membentuk 1 lempengan perak. Ahli perhiasan tersebut memesan 36 lempengan perak untuk memenuhi permintaan pelanggannya. Berapa banyak anting yang dapat dibuat dari 36 lempengan perak?
5. Tentukan digit terakhir dari hasil berikut $13^{25} + 4^{81} + 5^{411}$!

BAB II
METODE DAN TEKNIK PEMBELAJARAN PEMECAHAN MASALAH

A. Pengertian Metode Pemecahan Masalah (*Problem Solving)*

Metode pemecahan masalah adalah suatu cara menyajikan pelajaran dengan mendorong peserta didik untuk mencari dan memecahkan suatu masalah/persoalan dalam rangka pencapaian tujuan pengajaran. Metode ini diciptakan seorang ahli didik berkebangsaan Amerika yang bernama Jhon Dewey. Metode ini dinamakan *Problem Method*. Sedangkan Crow&Crow dalam bukunya *Human Development and Learning*, mengemukakan nama metode ini dengan *Problem Solving Method.*

Sebagai prinsip dasar dalam metode ini adalah perlunya aktifitas dalam mempelajari sesuatu. Timbulnya aktifitas peserta didik kalau sekiranya guru menjelaskan manfaat bahan pelajaran bagi peserta didik dan masyarakat.

Dalam bukunya "*school and society*" John Dewey mengemukakan bahwa keaktifan peserta didik di sekolah harus bermakna artinya keaktifan yang disesuaikan dengan pekerjaan yang biasa dilakukan dalam masyarakat. Alasan penggunaan metode problem solving bagi peneliti adalah dengan penggunaan metode problem solving siswa dapat bekerja dan berpikir sendiri dengan demikian siswa akan dapat mengingat pelajarannya dari pada hanya mendengarkan saja.

Untuk memecahkan suatu masalah John Dewey mengemukakan sebagai berikut:

1. Mengemukakan persoalan/masalah. Guru menghadapkan masalah yang akan dipecahkan kepada peserta didik.
2. Memperjelas persoalan/masalah. Masalah tersebut dirumuskan oleh guru bersama peserta didiknya.
3. Melihat kemungkinan jawaban peserra didik bersama guru mencari kemungkinan-kemungkinan yang akan dilaksanakan dalam memecahkan persoalan.
4. Mencobakan kemungkinan yang dianggap menguntungkan. Guru menetapkan cara pemecahan masalah yang dianggap paling tepat.
5. Penilaian cara yang ditempuh dinilai, apakah dapat mendatangkan hasil yang diharapkan atau tidak.

B. Langkah-langkah Pelaksanaan Metode Pemecahan Masalah

1. Persiapan
   a. Bahan-bahan yang akan dibahas terlebih dahulu disiapkan oleh guru.
   b. Guru menyiapkan alat-alat yang dibutuhkan sebagai bahan pembantu dalam memecahkan persoalan.
   c. Guru memberikan gambaran secara umum tentang cara-cara pelaksanaannya.
   d. Problem yang disajikan hendaknya jelas dapat merangsang peserta didik untuk berpikir.
   e. Problem harus bersifat praktis dan sesuai dengan kemampuan peserta didik.
2. Pelaksanaan
   a. Guru menjelaskan secara umum tentang masalah yang dipecahkan.
   b. Guru meminta kepada peserta didik untuk mengajukan pertanyaan tentang tugas yang akan dilaksanakan.
   c. Peserta didik dapat bekerja secara individual atau berkelompok.
   d. Mungkin peserta didik dapat menemukan pemecahannya dan mungkin pula tidak.
   e. Kalau pemecahannya tidak ditemukan oleh peserta didik kemudian didiskusikan mengapa pemecahannya tak ditemui.
   f. Pemecahan masalah dapat dilaksanakan dengan pikiran.
   g. Data diusahakan mengumpulkan sebanyak-banyaknya untuk analisa sehingga dijadikan fakta.
   h. Membuat kesimpulan.
3. Kelebihan Metode Pemecahan Masalah *(Problem Solving)*
   a. Melatih peserta didik untuk menghadapi problema-problema atau situasi yang timbul secara spontan.
   b. Peserta didik menjadi aktif dan berinisiatif sendiri serta bertanggung jawab sendiri.
   c. Pendidikan disekolah relevan dengan kehidupan.
4. Kelemahan Metode Pemecahan Masalah *(Problem Solving)*
   a. Memerlukan waktu yang lama
   b. Murid yang pasif dan malas akan tertinggal
   c. Sukar sekali untuk mengorganisasikan bahan pelajaran.
   d. Sukar sekali menentukan masalah yang benar-benar cocok dengan tingkat kemampuan peserta didik.

C. Teknik Pembelajaran Pemecahan Masalah

Salah satu tugas guru dalam proses pembelajaran adalah memilih metode dan teknik pembelajaran, di samping menentukan tujuan, mendalami materi, memilih alat/media, dan menentukan alat evaluasi. Teknik yang dapat di pilih untuk proses pembelajaran pemecahan masalah matematika, yaitu: Teknik Keterlibatan Siswa, Teknik Analogi, Teknik Menggunakan Model, Teknik Permainan/Teka-teki dan Teknik Simulasi. Teknik-teknik tersebut dijelaskan sebagai berikut:

1. Teknik Keterlibatan Siswa

Teknik keterlibatan siswa merupakan teknik mengajar yang mengikutsertakan siswa secara fisik dan mental. Secara fisik seperti ikut aktif dalam suatu kegiatan yang melibatkan anggota tubuh maupun panca indra, sedangkan secara mental siswa mengikuti jalannya suatu pembelajaran dengan antusias dan konsentrasi penuh. Suatu pembelajaran sudah seharusnya selalu melibatkan siswa, karena jika siswa aktif dalam suatu proses pembelajaran adalah suatu pertanda adanya keinginan siswa untuk belajar, dan jangan sampai guru saja yang aktif. Dalam belajar matematika keterlibatan mental siswa sangat diperlukan, sebab penjelasan guru sering kali sulit dimengerti. Untuk penjelesan yang tidak/belum dimengerti siswa, dapat langsung ditanyakan atau minta penjelasan ulang. Sering kali terjadi, guru memberikan kesempatan bertanya, tetapi siswa tidak ada yang bertanya dan bila disuruh mencoba sering kali tidak bisa atau jika diberikan soal yang berbeda tidak dapat menyelesaikannya. Hal tersebut merupakan gejala yang umum pada pembelajaran matematika, hal tersebut dimungkinkan beberapa sebab, diantaranya yaitu: penjelsan guru tidak komunikatif (tidak dipahami, di luar jangkauan daya pikir siswa, terlalu cepat, dll).

Keunggulan dari keterlibatan siswa diantaranya adalah:

a. Dapat menimbulkan minat belajar yang tinggi, sehingga hasil belajar akan bertahan lama.
b. Guru mudah mengendalikan kelas, jika kegiatan siswa sudah terarah dan siswa mengerti akan tugas yang harus dilakukan.
c. Dapat dijadikan guru untuk mendiagnosa kesulitan-kesulitan dalam belajar siswa.

2. Teknik Analogi

Teknik analogi adalah suatu teknik yang berusaha menciptakan suatu cerita untuk mengilustrasikan suatu konsep. Teknik analogi diterapkan dalam pembelajaran pemecahan masalah merupakan alternatif

yang dapat dipilh guru, agar siswa mengenal penerapan konsep matematika dalam kehidupan sehari-hari.

Karakteristik teknik analogi adalah:

a. Menimbulkan minat tinggi, karena aspek cerita dari teknik ini akan menimbulkan minat belajar.
b. Ketepatan bahasa akan berkurang jika menggunakan teknik ini.
c. Suatu konsep mungkin harus diajarkan kembali untuk mengembangkan pemahaman matematika secara tepat untuk menghindari kesalahan konsep jika konsep tersebut disajikan dengan teknik analogi.
d. Teknik analogi sering digunakan untuk keterampilan “bagaimana” daripada keterampilan “mengapa” tentang suatu konsep.
e. Teknik analogi yang dirancang secara baik akan mengurangi tingkat abstraksi sajian dan kebanyakan akan berhasil dalam menyajikan suatu konsep, jika teknik yang lebih abstrak tidak berhasil.

Kelebihan teknik analogi antara lain:

a. Dapat meningkatkan minat siswa karena aspek cerita yang disajikan.
b. Dapat meningkatkan pemahaman siswa.
c. Dapat mengurangi tingkat abstraksi sajian atau konsep

Kelemahannya antara lain:

a. Ketepatan bahasa akan berkurang.
b. Mungkin suatu konsep harus diajarkan kembali untuk mengembangkan pemahaman matematika secara tepat untuk menghindari kesalahan konsep.

3. Teknik Menggunakan Model

Teknik ini menggunakan model dalam proses belajar mengajar, model-model yang digunakan biasanya berupa gambar atau benda yang digunakan untuk memperagakan referensi dari konsep yang akan dikembangkan. Teknik ini secara luas untuk mengurangi tingkat abstraksi suatu konsep.

Karakteristik teknik ini adalah:

a. Sangat menarik minat siswa, karena semua siswa melihat dan mengamati model
b. Model mengurangi kerumitan konsep
c. Teknik ini dapat digunakan secara luas, apabila mengenalkan konsep bilangan, operasi hitung, penyelesaian masalah, geometri dan pengukuran.
d. Dalam menggunakan model, harus hati-hati sehingga suatu atribut suatu model yang tidak berhubungan dengan konsep yang dikembangkan tidak akan membawa siswa kearah kesalahan konsep terhadap konsep yang dikembangkan. Misal dalam menjelaskan konsep bilangan kita selalu menggunakan satu jenis benda saja atau selalu menggunakan satu

warna saja, hal tersebut akan menimbukan kesan pada siswa bilangan tertentu akan menunjuk pada benda tertentu atau warna tertentu.

4. Teknik Permainan/Teka-teki

Keuntungan pembelajaran matematika dengan menggunakan teknik permainan dan teka-teki adalah:

a. Sudah termuat sifat-sifat cara berfikir matematika, sehingga secara langsung atau tidak langsung kita telah menanamkan dasar matematika.
b. Memperluas belajar matematika
c. Pada dasarnya siswa sekolah dasar senang melakukan permainan
d. Dalam waktu luang (jam bebas) dapat diisi dengan jenis permainan yang terarah

5. Teknik Simulasi

Simulasi adalah sembarang alat atau aktivitas yang menggunakan aspek terpilih tentang situasi kehidupan nyata. Dalam simulasi biasanya dituntut kemampuan prasyarat, oleh karenanya simulasi biasanya diterapkan dalam pembelajaran pada akhir kegiatan. Kegiatan simulasi dapat meningkatkan minat belajar, tetapi akan menimbulkan kegaduhan dan memakan waktu yang relatif lama. Untuk meminimalkan kegaduhan dan waktu yang lama, guru membuat perencanaan dan peraturan yang baik.

LATIHAN SOAL

1. Jelaskan yang dimaksud dengan metode pembelajaran pemecahan masalah!
2. Apa yang dimaksud dengan teknik pembelajaran pemecahan masalah?
3. Sebutkan langkah-langkah pelaksanaan metode pemecahan masalah!
4. Jelaskan dengan bahasamu sendiri tentang kelebihan dan kegunaan metode pemecahan masalah!
5. Sebutkan dan jelaskan macam-macam teknik pembelajaran pemecahan masalah!

BAB III
PEMECAHAN MASALAH PADA HIMPUNAN

Menurut Kunen (Kunen, 1980), teori himpunan merupakan dasar dari matematika dan semua konsep matematika didefinisikan kedalam bentuk himpunan. Oleh karena itu teori himpunan sangat penting sekali untuk dipelajari. Sebagai gambaran, materi himpunan akan muncul pada mata kuliah lainnya seperti Kalkulus, Teori Peluang, sampai dengan Aljabar Abstrak.

Selain adanya keterkaitan dengan materi lainnya, teori himpunan sendiri ada keterkaitan dengan logika matematika. Oleh karena itu diharapkan dapat memperkaya pengetahuan pembaca terkait dengan teori himpunan dan aplikasinya dalam kehidupan sehari – hari.

A. Sejarah Teori Himpunan

Gambar 4.1 Balzano

Pada tahun 1851, Bolzano, seorang matematikawan Italia menulis suatu karya yang berjudul *Paradoxes of the Infinite*, dimana ia memulai suatu pengembangan dari teori himpunan. Ia mengambil langkah pertama untuk menjawab pertanyaan – pertanyaan yang memusingkan mengenai ketakterhinggaan yang telah menyusahkan matematikawan dan ahli filsafat selama lebih dari 2000 tahun.
Sepanjang akhir abad kesembilan belas, karya Bolzano telah dikembangkan oleh matematikawan Jerman bernama Georg Cantor, yang sekarang dianggap sebagai bapak dari teori himpunan.

Gambar 4.2 Georg Cantor

Georg Cantor (1845 – 1918) dianggap sebagai bapak teori himpunan, karena beliaulah yang pertama kali mengembangkan cabang matematika ini. Ide – idenya tentang teori himpunan dapat memuaskan keinginan publik terutama idenya tentang himpunan tak berhingga.

Beliau mengembangkan hirarki himpunan infinit ini yang ternyata dapat digunakan di berbagai himpunan infinit yang berbeda.
Penemuan ini dianggap sebagai penemuan yang revolusioner oleh para matematikawan pada zaman itu.

Cantor meninggal di institusi mental di Jerman pada usia 73 tahun. Banyak yang menganggap bahwa mentalnya jatuh karena serangan – serangan terhadap ide – ide dan hasil karyanya yang dilakukan oleh para matematikawan lain.

Pada tahun-tahun terakhir ini, teori himpunan mendapatkan perhatian khusus dalam pengajaran matematika, karena setiap cabang matematika berkaitan erat dan termasuk di dalam teori himpunan. Cabang matematika yang berbeda – beda berkembang menjadi satu kesatuan dalam teori himpunan.

B. Pengertian Himpunan

Himpunan dalam pengertian matematika sering juga disebut kumpulan, atau kelompok. Himpunan dapat dibayangkan sebagai suatu kumpulan benda-benda baik yang "jelas" maupun yang "tidak jelas". Kumpulan benda-benda yang jelas, artinya kumpulan objek yang anggota-anggotanya dapat ditetapkan secara jelas. Sedangkan kumpulan benda-benda yang tidak jelas, artinya kumpulan objek yang anggota-anggotanya tidak dapat ditetapkan dengan jelas.

Perhatikan beberapa contoh kalimat berikut.

Contoh 3.1: Kumpulan nama-nama bulan dalam satu tahun.
Apakah Anda dapat menyebutkan nama-nama bulan dalam satu tahun? Tentu saja kita semua mengetahui bahwa nama-nama bulan dalam satu tahun adalah: Januari, Februari, Maret, April, Mei, Juni, Juli, Agustus, September, Oktober, November, dan Desember. Tepatnya ada 12 bulan dalam satu tahun. Hal ini berarti bahwa kumpulan nama-nama bulan dalam satu tahun memiliki anggota yang dapat dikelompokkan atau ditetapkan secara jelas.

Contoh 3.2: Kumpulan orang kaya di kota Sumedang.
Apakah Anda mengetahui siapa saja orang kaya di kota Sumedang? Berapa banyak uang tabungannya di bank agar dapat disebut sebagai orang kaya? Berapa banyak mobil yang harus dia miliki agar tersohor sebagai orang kaya? Anggota dari kumpulan orang kaya di kota Sumedang tidak dapat kita tetapkan atau kelompokkan secara jelas, karena pengertian 'kaya' itu sendiri sangat relatif atau tidak jelas.

Dari kedua contoh di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa pada contoh (1) kita dapat mengetahui bahwa kumpulan tersebut merupakan sebuah himpunan. Mengapa demikian? Karena kita dapat mengelompokkan anggota-anggotanya dengan jelas. Sedangkan pada contoh (2), karena kita tidak dapat menetapkan anggota kelompoknya dengan jelas, maka kumpulan tersebut bukan merupakan suatu himpunan.

Dengan demikian, kita dapat menyusun suatu pengertian himpunan, yaitu:

Himpunan adalah kumpulan benda-benda atau objek yang anggota-anggotanya dapat dikelompokkan atau ditetapkan secara jelas.

Suatu himpunan biasanya dinyatakan dengan menggunakan tanda kurung kurawal dan diberi nama dengan menggunakan huruf kapital, misalnya A, B, C, dan seterusnya.

Contoh 3.3:

1. Himpunan bilangan asli kurang dari 25!
   Misalnya himpunan itu diberi nama A, maka A adalah himpunan bilangan asli kurang dari 25 yang dapat kita tulis, A = {bilangan asli kurang dari 25}.
2. Himpunan nama bulan dalam satu tahun yang diawali dengan huruf J.
   Misalnya himpunan itu diberi nama B, maka B adalah himpunan nama bulan dalam satu tahun yang diawali dengan huruf J yang dapat kita tulis, B = {nama bulan dalam satu tahun yang diawali dengan huruf M}.
   Untuk menyatakan keanggotaan suatu himpunan digunakan lambang $\in$ dan untuk menyatakan bahwa suatu objek atau benda yang bukan anggota suatu himpunan digunakan lambang $\notin$.
3. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, maka:
   1 merupakan anggota A, ditulis $1 \in A$,
   5 merupakan anggota A, ditulis $5 \in A$,

C. Penulisan Himpunan

Ada tiga cara untuk menyatakan suatu himpunan, antara lain:

1. dengan mendaftar anggota himpunan;
2. dengan menjelaskan sifat anggota himpunan;
3. dengan menggunakan notasi pembentuk himpunan.

Contoh 3.4:

Misalkan kita akan menyatakan himpunan nama bulan dalam satu tahun yang diawali dengan huruf J.

1. Dengan mendaftar anggota himpunan, misalnya B = {*Januari, Juni, Juli*}
2. Dengan menjelaskan sifat anggota himpunan, misalnya *Himpunan nama bulan dalam satu tahun yang diawali dengan huruf J.*
3. Dengan menggunakan notasi pembentuk himpunan, misalnya B = $\{ x \mid x$ nama bulan dalam satu tahun yang diawali dengan huruf J}. Kalimat ini dapat dibaca, B adalah himpunan dari semua x dan x adalah nama bulan dalam satu tahun yang diawali dengan huruf J.

Penggunaan x pada notasi penulisan himpunan dapat diganti dengan huruf kecil lainnya. Misalnya:

A = $\{ b \mid b$ nama bulan dalam satu tahun yang diawali dengan huruf J}

atau,

A = $\{ y \mid y$ nama bulan dalam satu tahun yang diawali dengan huruf J}

Contoh 3.5:

Suatu Himpunan A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} mempunyai anggota sebanyak 7 buah dan ditulis n(A) = 7. Sedangkan suatu himpunan Z = $\{ x \mid x$ huruf yang menyusun kata "harry potter"}. Kata harry potter terdiri atas 11 huruf, yaitu h, a, r, r, y, p, o, t, t, e, r. Huruf r ada 3 buah dan huruf t ada 2 buah, tetapi karena **anggota yang sama** dalam satu himpunan hanya ditulis **satu kali, sehingga salah** jika kita menuliskannya sebagai Z = {h, a, r, r, y, p, o, t, t, e, r}. Yang benar Z = {h, a, r, y, p, o, t, e}. Dengan demikian, kita dapat mengetahui bahwa banyaknya anggota himpunan K adalah 8 buah dan dapat ditulis n(Z) = 8.

D. Macam-Macam Himpunan

1. Himpunan Kosong

Apakah setiap himpunan mempunyai anggota? Perhatikan beberapa contoh kalimat berikut.

Contoh 3.6:

1. A = {bilangan cacah yang kurang dari 8}, maka A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8}. Sehingga kita dapat mengetahui bahwa banyak anggota himpunan A adalah 8 dan ditulis n(A) = 8.
2. B = $\{ x \mid x$ adalah bilangan asli yang kurang dari 1$\}$. Menurut Anda, adakah bilangan asli yang kurang dari 1? Karena tidak ada suatu bilangan yang termasuk kelompok bilangan asli yang kurang dari 1, maka kita dapat menyimpulkan bahwa himpunan B tidak memiliki anggota. Sehingga kita dapat menulisnya B = { } dan n(B) = 0.
3. P = {himpunan bilangan prima antara 14 dan 16}. Hanya ada satu bilangan antara 14 dan 15, yaitu bilangan 15. Tetapi, apakah bilangan 15 merupakan bilangan prima? Ternyata bilangan 15 bukan merupakan bilangan prima, karena memiliki faktor-faktor {1, 3, 5, 15}. Oleh karena itu, kita dapat menyatakan bahwa himpunan P tidak memiliki anggota dan ditulis P = ϕ dan n(P) = 0.

Dari himpunan-himpunan pada Contoh 3.6, Contoh 3.7, dan Contoh 3.8, ternyata terdapat himpunan yang tidak mempunyai anggota, yaitu himpunan pada Contoh 3.7 dan Contoh 3.8. Himpunan yang tidak mempunyai anggota tersebut kita namakan sebagai ***himpunan kosong***.

Ingat, suatu himpunan kosong yang ditulis P = { }, berarti himpunan tersebut tidak memiliki anggota, atau n(P) = 0. Akan tetapi suatu himpunan dengan anggotanya nol, misal Q = {0}, bukan merupakan himpunan kosong, karena jumlah anggotanya adalah 1, ditulis n(Q) = 1. Anda harus hati-hati, jangan sampai keliru membedakannya.

2. Himpunan Semesta

Untuk dapat memahami pengertian himpunan semesta, perhatikanlah beberapa contoh himpunan di bawah ini.

Contoh 3.7:

1. H = {bebek, ayam, kucing, sapi, macan}
   Himpunan H terdiri dari nama-nama hewan. Oleh karena itu, himpunan semesta ini dapat dinyatakan sebagai himpunan semua hewan yang ada di dunia.
2. K = {5, 7, 11}
   Himpunan-himpunan yang dapat memuat semua anggota K di antaranya adalah {bilangan ganjil}, {bilangan asli}, atau {bilangan prima}. Oleh karena itu, himpunan semesta dari himpunan B adalah {bilangan ganjil}, {bilangan asli}, {bilangan prima}.

3. Himpunan Bagian

Diketahui dua himpunan A = {a, b, c} dan B = {a, b, c, d, e, f, g}. Dari kedua himpunan tersebut dapat dilihat bahwa semua anggota A merupakan anggota B juga. Ini berarti bahwa himpunan A merupakan ***himpunan bagian*** dari himpunan B dan dapat ditulis A $\subset$ B.

Himpunan A merupakan himpunan bagian dari himpunan B jika setiap anggota A menjadi anggota B dan dapat ditulis A $\subset$ B. Atau dapat juga dikatakan bahwa himpunan B memuat A yang dapat ditulis B $\supset$ A.

Contoh 3.8:

Diketahui M = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} dan N = {2, 4, 6, 8, 10}. Tentukan hubungan antara himpunan M dan himpunan N!

Jawaban: Karena setiap anggota N merupakan anggota M, maka hubungan antara himpunan M dan himpunan N adalah M $\supset$ N, atau N $\subset$ M.

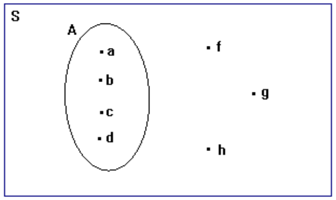
Untuk menentukan banyaknya himpunan bagian dari suatu himpunan digunakan rumus 2^n, dengan n menyatakan jumlah anggota suatu himpunan. Misal, himpunan A = {1, 2, 3}. Karena n(A) = 3, maka banyaknya himpunan bagian dari himpunan A adalah 2^3, yaitu 8.

E. Diagram Venn

Masih terdapat cara selain untuk menyatakan keanggotaan suatu himpunan (lihat kembali 3 cara pada bagian sebelumnya, yakni dengan Diagram Venn. Diagram Venn ini diperkenalkan oleh John Venn (1834-1923) dapat digunakan untuk menyatakan sebuah himpunan. Diagram Venn dapat digambarkan dalam bentuk elips atau lingkaran yang di dalamnya terdapat anggota suatu himpunan yang ditunjukkan dengan sebuah noktah atau titik.

Contoh 3.9:

Diketahui himpunan A = {a, b, c, d} sedangkan himpunan semestanya adalah S = {a, b, c, d, e, f, g, h}. Gambar diagram Venn untuk himpunan A tersebut adalah sebagai berikut:



Gambar 3.3 Diagram Venn himpunan A

Unsur yang tidak termasuk dalam anggota himpunan harus diletakkan di luar diagram Venn. Dalam diagram Venn, semesta pembicaraan digambarkan dalam bentuk persegi. Himpunan bagiannya digambarkan dengan kurva tertutup sederhana. Anggota himpunannya digambarkan dengan noktah (titik).

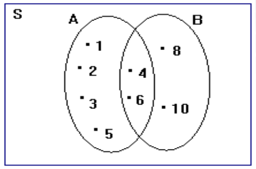
F. Operasi Himpunan

1. Irisan (*Intersection*) Himpunan

Untuk mempermudah pemahaman mengenai operasi irisan pada himpunan, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 3.10:

Himpunan A dan himpunan B berikut ini. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dan B = {4, 6, 8, 10}. Bilangan berapakah yang termasuk anggota himpunan A sekaligus menjadi anggota himpunan B? Ternyata, bilangan 4 dan 6 merupakan bilangan yang merupakan anggota himpunan A ***dan*** anggota himpunan B. Oleh karena itu, {4, 6} merupakan anggota persekutuan antara himpunan A dan himpunan B yang dapat disebut sebagai ***irisan himpunan*** A dan B, ditulis: $A \cap B = \{4, 6\}$. Irisan himpunan A dan himpunan B tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk diagram Venn sebagai berikut.



Irisan himpunan A dan B dapat ditulis sebagai:

$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{ x \mid x \in A \ \textbf{dan} \ x \in B \}$

Artinya, irisan himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota himpunan A dan sekaligus merupakan anggota himpunan B juga.

2. Gabungan (*Union*) Himpunan

Untuk mempermudah pemahaman mengenai operasi irisan pada himpunan, perhatikan contoh berikut ini.

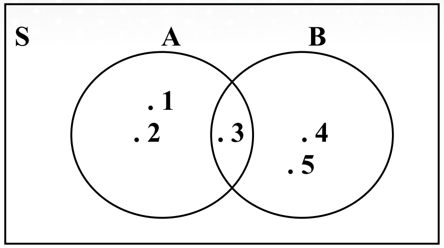
Contoh 3.11:

Perhatikan himpunan A dan himpunan B berikut ini. A = {1, 2, 3} dan B = {3, 4, 5}. Dari kedua himpunan tersebut kita dapat membentuk sebuah himpunan baru, yaitu {1, 2, 3, 4, 5}. Himpunan tersebut merupakan anggota himpunan A saja, anggota himpunan B saja, dan anggota persekutuan A dan B. Pada himpunan tersebut telah berlaku operasi gabungan antara himpunan A dan himpunan B. Gabungan antara himpunan a dan b tersebut dapat ditulis: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Gabungan himpunan A dan B dapat ditulis sebagai:

$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{ x \mid x \in A \ \textbf{atau} \ x \in B \}$

Artinya, gabungan himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota himpunan A saja, anggota himpunan B saja, dan anggota persekutuan A dan B.

Banyaknya anggota himpunan dari gabungan dua himpunan dan tiga himpunan dapat dilihat dari diagram Venn berikut.



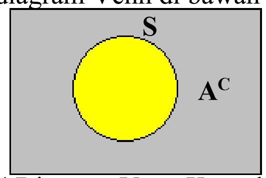
Karena: n(A) = $a+b$, n(B) = $b+c$, n(A $\cap$ B) = b,

Maka: **n(A $\cup$ B) = n(A) + n(B) – n(A $\cap$ B)**

3. Komplemen Suatu Himpunan

Misalkan suatu himpunan semesta S = {1, 2, 3, 4, 5} dan himpunan A = {1, 3, 5}. Himpunan lain yang beranggotakan {2, 4} adalah anggota dari S tetapi bukan anggota A. Himpunan demikian dinamakan sebagai ***Komplemen dari A***, biasa ditulis **A^C** atau **A′**. Dengan demikian $A^C = \{ x \mid x \notin A$ dan $x \in S \}$.

Perhatikan diagram Venn di bawah ini:



Gambar 3.4 Diagram Venn Komplemen Suatu Hubungan

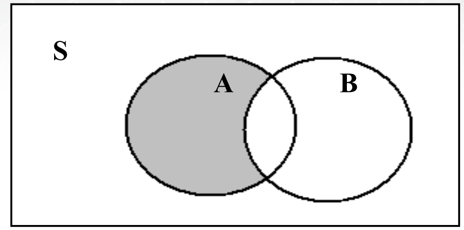
4. Selisih Dua Himpunan

Misalkan A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = {2, 4, 6, 8, 10}, berarti $A \cap B$ = {2, 4, 6}. Selisih himpunan yang ditulis sebagai A – B adalah seluruh anggota A tetapi bukan anggota B.

Selisih himpunan tersebut dinyatakan dengan:

$A - B = \{ x \mid x \in A$ dan $x \notin B \}$ atau, $A - B = A \cap B^C$

Perhatikan diagram Venn berikut ini, bagian yang diarsir menyatakan A – B



Gambar 3.5 Diagram Venn Selisih Dua Himpunan

G. Sifat-Sifat Operasi Himpunan

Untuk lebih memudahkan Anda dalam memahami konsep himpunan, perhatikan beberapa sifat operasi himpunan berikut ini.

1. Sifat komutatif irisan: $A \cap B = B \cap A$
2. Sifat asosiatif irisan: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Sifat komutatif gabungan: $A \cup B = B \cup A$
4. Sifat asosiatif gabungan: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
5. Sifat distributif irisan terhadap gabungan: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. Sifat distributif gabungan terhadap irisan: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

H. Pemecahan Masalah Dalam Topik Himpunan

‘Bekerja cerdas’ dan ‘bekerja keras’ dalam menerima tantangan merupakan syarat mutlak yang harus dimiliki oleh kita ketika memecahkan masalah. Seseorang harus bekerja cerdas untuk mencari langkah-langkah yang mungkin dilakukan, dan bekerja keras ketika melaksanakan langkah-langkah tersebut. Memang banyak rumus, teorema, aturan, maupun hukum yang kita miliki, akan tetapi belum dapat segera digunakan langsung untuk menyelesaikan masalah tersebut. Oleh karena itu, kita perlu perencanaan yang berupa langkah-langkah sistematik untuk memecahkan masalah tersebut.

Seperti yang telah Anda pelajari pada modul sebelumnya, terdapat langkah-langkah sistematik pemecahan masalah, seperti yang dianjurkan Polya sebagai berikut ini:

1. *Memahami masalah*, bisa dengan cara menuliskan kembali masalah dengan kata-kata sendiri, menuliskan masalah dalam bentuk lain yang lebih operasional, dalam bentuk rumus, dalam bentuk gambar, dan sebagainya.
2. *Membuat rencana* atau *cara untuk memecahkan masalah*. Dalam pembuatan rencana ini juga memungkinkan kita untuk membuat *hipotesis-hipotesis* sebagai jawaban sementara.

3. *Menjalankan rencana* yang telah dibuat pada langkah kedua. Dengan kata lain, kita menyelesaikan permasalahan yang ada dengan cara yang telah kita susun pada langkah kedua.
4. *Melihat kembali* apa yang telah dilakukan, yaitu memeriksa benar atau tidaknya pemecahan masalah yang telah dilakukan, atau juga untuk melihat alternatif penyelesaian yang lebih baik (lebih praktis dan efisien).

Dalam topik himpunan, beberapa permasalahan non-rutin yang mungkin Anda hadapi untuk dicari pemecahannya misalnya sebagai berikut ini.

Contoh 3.12:

Suatu kelompok siswa yang terdiri dari 15 anak. 8 anak suka tennis, 9 anak suka catur, serta 5 anak menyukai tennis dan catur. Berapa anak yang tidak menyukai kedua-duanya (tennis maupun catur)?

Penyelesaian:

Untuk menjawab permasalahan ini, ada baiknya kita laksanakan langkah-langkah berikut:

1. *Memahami masalah*, bisa dengan cara menuliskan kembali masalah dengan kata-kata sendiri, atau menuliskan masalah dalam bentuk gambar. Dalam hal ini kita mengetahui bahwa jumlah seluruh siswa adalah 15 orang. Akan tetapi jika kita melakukan penjumlahan untuk setiap jumlah siswa berdasarkan kesukaannya, pasti akan melebihi 15 anak, karena $8 + 9 + 5 = 27$. Jika Anda menganggap bahwa jumlah siswa keseluruhannya adalah 27, itu keliru. Oleh karena itu, perlu cara lain untuk memecahkan permasalahan ini.
2. *Membuat rencana* atau *cara untuk memecahkan masalah*. Agar lebih mudah, ada baiknya jika masalah ini dipecahkan dengan membuat suatu diagram venn. Kita misalkan T sebagai kelompok yang menyukai tennis, dan C sebagai kelompok yang menyukai catur. Berarti akan terdapat irisan antar himpunan T dan C yang menyatakan kelompok yang menyukai keduanya, yaitu $T \cap C$. Banyaknya siswa yang tidak menyukai tennis maupun catur adalah dengan mengurangkan jumlah anggota himpunan semesta dengan gabungan T dan C, yakni $n(S) - n(T \cup C)$.
3. *Menjalankan rencana* yang telah dibuat pada langkah kedua. Dengan kata lain, kita menyelesaikan permasalahan yang ada dengan cara yang telah kita susun pada langkah kedua, yaitu:

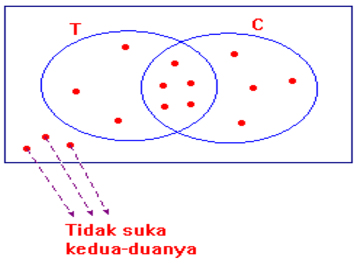
   Jumlah siswa yang tidak menyukai tennis maupun catur adalah:

   $n(S) - n(T \cup C) = n(S) - [n(T) + n(C) - n(T \cap C)]$

   $= 15 - (8 + 9 - 5) = 15 - 12 = 3$
4. *Melihat kembali* apa yang telah dilakukan, yaitu memeriksa benar atau tidaknya pemecahan masalah yang telah dilakukan, atau juga untuk melihat alternatif penyelesaian yang lebih baik (lebih praktis dan efisien). Dalam kasus ini, kita juga dapat melakukan pemecahan masalah dengan menggunakan gambar suatu diagram venn. Perhatikan gambar berikut:

   T: kelompok yang suka tennis, berjumlah 8 siswa.

   C: kelompok yang suka catur, berjumlah 9 siswa.



Jadi, memang benar bahwa ada 3 anak yang tidak suka tennis maupun catur. Coba Anda bandingkan, cara manakah yang menurut Anda lebih efisien?

LATIHAN SOAL

1. Jelaskan yang dimaksud dengan himpunan serta berikan contohnya!
2. Diketahui himpunan A = {a, b, c}. Tentukan semua himpunan bagian yang mungkin dari himpunan A. Hitunglah banyak himpunan bagian dari A!
3. Jika untuk dua buah himpunan A dan B berlaku rumus umum:
   $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
   maka untuk tiga buah himpunan A, B, dan C, tentukan rumus umum untuk **$n(A \cup B \cup C)$**!
4. Dalam sebuah kelas terdapat 45 siswa yang terdiri dari 32 siswa yang gemar makan soto, 35 siswa yang gemar makan sate, dan 27 siswa gemar makan soto dan sate. Berapa banyak siswa yang tidak gemar makan soto dan sate?

BAB IV
PEMECAHAN MASALAH PADA FUNGSI

A. Definisi Fungsi

Suatu fungsi adalah himpunan pasangan terurut yang bersifat tak ada dua pasangan yang mempunyai unsur pertama yang sama. Himpunan unsur pertama disebut domain dan himpunan unsur kedua disebut himpunan bayangan. Himpunan yang memuat himpunan bayangan disebut kodomain.

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B. Fungsi f dari himpunan A ke dalam himpunan B biasa ditulis dengan notasi:

$f : A \rightarrow B$ dibaca " fungsi f memetakan A ke dalam B.

Notasi yang biasa digunakan untuk menyatakan suatu fungsi f yang memetakan setiap anggota x dari himpunan A ke anggota y dari himpunan B adalah

$f : x \rightarrow y$, dibaca "f memetakan x ke y", sehingga notasi fungsi dapat ditulis $f(x) = y$.

Elemen tunggal di dalam B yang dihubungkan dengan $a \in A$ oleh f

dinyatakan dengan $f(a)$ dan disebut bayangan atau peta a oleh f, atau disebut juga nilai pada a. Dalam hal ini a disebut prapeta dari $f(a)$

Contoh 4.1:

Perhatikan himpunan pasangan terurut (x, y) dengan x unsur dari domin {2,3,4} dan y unsur dari kodomain {3,4,5,6}.
(a) F = {(2,3), (3,4), (4,5)}
(b) F = {(3,3), (3,4)}
(c) F = {(2,3), (3,4), (4,5), (2,6)}
(d) F = {(2,5), (3,5), (4,5)}
Manakah dari himpunan pasangan terurut di atas yang merupakan fungsi?

Penyelesaian:

Kini kita dapat menggunakan definisi yang sudah dituliskan di atas. Dengan mudah dapat kita kenali bahwa (a) dan (d) adalah fungsi, karena setiap anggota domain mempunyai tepat satu pasangan anggota kodomain. Himpunan pada (b) bukan fungsi karena ada anggota domain yang tidak punya pasangan. dan (c) bukan fungsi karena 2 berpasangan dengan 3 dan 6. Himpunan pasangan terurut sering juga disajikan dalam bentuk tabel, dengan domain x dan kodomain y, seperti yang tampak pada Tabel dibawah ini.

x	–3 –2 –1 0 1 2 3
y	$4\frac{1}{2}$ 2 $\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$ 2 $4\frac{1}{2}$

Tabel tersebut menggunakan fungsi $y = \frac{x^2}{2}$

B. Fungsi –fungsi Khusus

1. Fungsi Konstan

Misalkan f suatu fungsi dari A ke B. Fungsi f dinamakan fungsi konstan jika untuk semua elemen di A berkawan dengan satu elemen di B.

Sebagai contoh : $f(x) = 5$ adalah fungsi konstan.

2. Fungsi Identitas

Suatu fungsi $f : A \rightarrow A$ yang didefinisikan oleh rumus $f(x) \rightarrow x$, dinamakan fungsi identitas (fungsi satuan). Fungsi tersebut memetakan setiap elemen di A dengan elemen itu sendiri. Fungsi identitas dinotasikan dengan I.

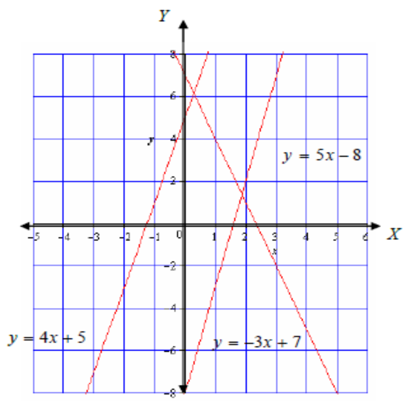
3. Fungsi Linear

Fungsi linear f adalah fungsi pada himpunan bilangan real R yang ditentukan oleh $f(x) = ax + b$, dengan a, b bilangan real dan $a \neq 0$.

Grafik dari fungsi linear berupa garis lurus.

1) $f(x) = 4x + 5$
2) $f(x) = -3x + 7$
3) $f(x) = 5x - 8$

Grafik dari contoh-contoh tersebut adalah sebagai berikut.



Gambar 4.1 Grafik fungsi linier

4. Fungsi Kuadrat

Di dalam Standar Isi, fungsi kuadrat belum diajarkan kepada siswa SMP, tetapi materi ini dapat digunakan untuk pengayaan siswa yang kemampuannya di atas rata-rata.

Fungsi kuadrat f adalah fungsi pada himpunan bilangan real R yang ditentukan oleh $f(x)= ax^2 + bx + c$ dengan a, b, dan c bilangan real dan $a \neq 0$.

Perhatikan fungsi $f(x)= ax^2 + bx + c.$

a. Jika $a > 0$ maka grafiknya berupa parabola terbuka ke atas sehingga mempunyai nilai minimum.
b. Jika $a < 0$ maka grafiknya berupa parabola terbuka ke bawah sehingga mempunyai nilai maksimum.

Nilai minimum atau maksimum dari $f(x)= ax^2 + bx + c$ terjadi pada titik puncak parabola, yaitu pada $P\left(\frac{-b}{2a}, \frac{D}{-4a}\right)$, dengan $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$ yang disebut diskriminan dari $f(x)= ax^2 + bx + c.$

C. Grafik Suatu Fungsi

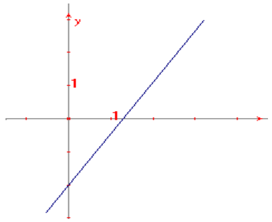
Merepresentasikan suatu fungsi ke dalam bentuk grafik seringkali banyak gunanya. Selain bisa lebih jelas mengungkapkan permasalahan, aplikasinya pun menjadi semakin luas. Dalam menggambar grafik suatu fungsi, biasanya sumbu horizontal (sumbu-x) menyatakan domain dan sumbu vertikal (sumbu-y) menyatakan kodomain.

Sebuah Trik untuk Anda!

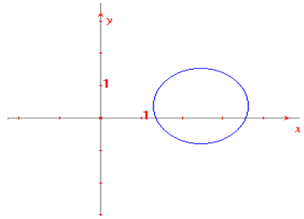
Untuk melihat persyaratan apakah setiap anggota domain berpasangan dengan tepat satu anggota kodomain, dapat dilihat dengan cara mememriksa: “jika garis vertikal *memotong* grafik, maka ia memotong di tepat satu titik”. Namun jika ternyata ada garis vertikal yang memotong grafik di dua titik atau lebih, maka jelaslah bahwa grafik itu bukan grafik suatu fungsi.

Contoh 4.2:

Mana dari grafik berikut yang menyatakan suatu fungsi?



Gambar a



Gambar b

Garis lurus pada Gambar a menyatakan grafik suatu fungsi sedangkan lingkaran pada Gambar b tidak menyatakan grafik suatu fungsi. Mengapa?

Menyatakan Fungsi dengan $y = f(x)$

Fungsi dapat dinyatakan dengan $y = f(x)$ (dibaca y fungsi dari x atau y nilai fungsi x). Misalkan kita mempunyai suatu fungsi $y = f(x) = x + 5$y. Jika $x = 1$, maka kita ganti x dengan 1 sehingga kita peroleh $y = f(1) = 1 + 5 = 6$. Jika $x = 2$, maka kita ganti x dengan 2 sehingga kita peroleh $f(2) = 2 + 5 = 7$. Atau contoh lainnya, jika $y = f(x) = x^2 + 2x + 5$, maka nilai $y = f(x)$

untuk $x = 0$, diperoleh $f(0) = 0^2 + 2(0) + 5 = 5$

untuk $x = 4$, diperoleh $f(4) = 4^2 + 2(4) + 5 = 29$

untuk $x = -5$, diperoleh $f(-5) = (-5)^2 + 2(-5) + 5 = 25 - 10 + 5 = 20$.

D. Menggambar Grafik Fungsi Linear

Dalam program linear misalnya, keberadaan sebuah grafik dapat menjadi kunci pemecahan masalah. Kapan sebuah perusahaan akan mengalami keuntungan, jumlah produksi harus seberapa besar agar untung dapat diraup maksimal, keputusan apa yang harus dipilih jika sumber daya terbatas, dan masalah lainnya yang terdapat dalam program linear, akan menjadi lebih mudah untuk dijawab dengan adanya sebuah grafik.

Untuk menggambar grafik suatu fungsi kita cari lebih dahulu pasangan-pasangan terurut dari fungsi tersebut, kemudian kita gambar

pasangan itu sebagai titik pada suatu sistem koordinat. Langkah selanjutnya adalah menghubungkan titik-titik dengan ekstra hati-hati. Makin banyak pasangan yang kita gambar makin baik grafik yang dihasilkan.

Contoh 4.3:

Gambarlah grafik $x + y = 4$.

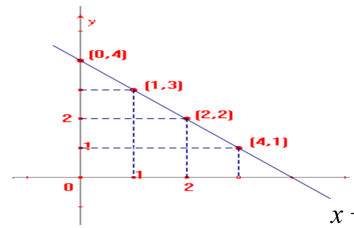
Jawaban:

Cukup kita tentukan dua buah titik yang memenuhi persaman $x + y = 4$ di atas.

Misalnya, jika $x = 1$, maka $y = 4 - x = 4 - 1 = 3$, sehinggaa kita peroleh titik (1, 3). Kemudian jika $x = 0$, maka $y = 4$, sehingga diperoleh titik (0, 4). Beberapa pasangan terurut (titik) lainnya terlihat pada tabel berikut.

x	y
0	4
1	3
2	2
3	1

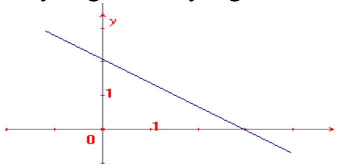
Lalu gambar grafik $x + y = 4 \Leftrightarrow y = 4 - x$ yang dimaksud adalah:



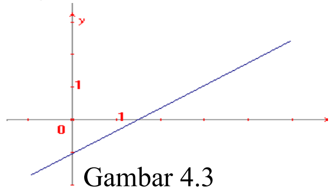
$x + y = 4$

E. Gradien (Kemiringan) Grafik Fungsi Linear

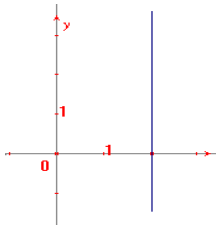
Perhatikan Gambar 4.2 – 4.5 di bawah ini. Apakah yang bisa Anda simpulkan mengenai kemiringan grafik fungsi linear? Berapa banyak gariskah yang memiliki kemiringan berbeda?



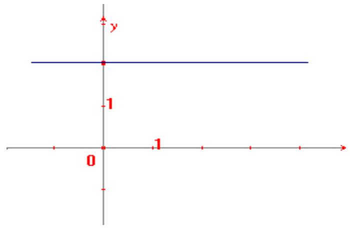
Gambar 4.2



Gambar 4.3



Gambar 4.4



Gambar 4.5

Gambar 4.2-4.5 Grafik fungsi linear

Jika kita memperhatikan grafik beberapa fungsi linear yang masing-masing merupakan garis lurus, tampak bawa gradien atau kemiringannya tidak sama. Lalu, "Bagaimana caranya agar kita dapat mengetahui gradien grafik suatu fungsi linear, jika kita mengetahui persamaan fungsi linear tersebut?"

Definisi Gradien Suatu Garis

Andaikan kita mempunyai suatu garis lurus yang melalui titik A(x_1,y_1) dan B(x_2,y_2). Maka gradien garis itu adalah m dan $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ dengan $x_1 \neq x_2$.

Dari definisi gradien tersebut, dapat kita lihat bahwa gradien m memiliki tiga kemungkinan, yaitu mungkin bernilai *positif*, *nol*, atau bahkan *negatif*.

Pertama, nilai m positif apabila $x_1 - x_2$ positif dan $y_1 - y_2$ juga positif. Ini berarti bahwa titik di sebelah kanan suatu titik A akan berada lebih atas dari A. Jadi, jika m positif, maka garis akan naik dari kiri ke kanan. *Kedua*, nilai $m = 0$ apabila $x_1 - x_2 = 0$, sedangkan nilai y adalah tetap. Ini berarti bahwa garis itu sejajar dengan sumbu-x. Dan *ketiga*, nilai m negatif apabila $x_1 - x_2$ positif, sedangkan $y_1 - y_2$ negatif. Ini berarti bahwa titik di sebelah kanan suatu titik A akan berada lebih bawah dari A, sehingga garis turun dari kiri ke kanan.

Bagaimana jika nilai x adalah tetap (nilai x sama di setiap titik pada garis)? Jika nilai x tetap, berarti $x_1 = x_2$, atau $x_1 - x_2 = x_2 - x_1 = 0$. Dengan demikian, nilai $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_2-y_1}{0}$ adalah **tidak terdefinisi**. Secara geometris, garis yang dimaksud adalah *sejajar dengan sumbu-y*.

Contoh 4.4:

Tentukan gradien garis yang melalui titik-titik P(4,7) dan Q(3,1).

Jawaban:

Diketahui bahwa koordinat titik-titik tersebut adalah: P(4,7) dan Q(3,1). Misalkan P(x_1,y_1) dan Q(x_2,y_2), berarti $x_1 = 4$, $y_1 = 7$, $x_2 = 3$, dan $y_2 = 1$. Sehingga diperoleh nilai m sebagai berikut:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-7}{3-4} = \frac{-6}{-1} = 6.$$

Jadi, gradien garis yang melalui titik-titik P(4,7) dan Q(3,1) adalah $m = 6$.

Contoh 4.5:

Sekarang, kita perhatikan suatu persamaan umum garis lurus:

$y = ax + b$

Bagaimana cara kita menentukan gradiennya?

Ada baiknya jika Anda memecahkan masalah ini dengan menggunakan langkah-langkah pemecahan masalah. Mulai dari *memahami masalah*, *membuat rencana penyelesaian*, *menjalankan rencana yang telah disusun*, serta *melihat kembali kinerja yang telah dilakukan*.

Pertama, masalah yang dihadapi adalah bagaimana menentukan gradien dari persamaan umum garis. *Kedua*, rencanakan suatu penyelesaian dengan mengambil dua buah titik A dan B sebarang pada garis y tersebut, garis yang dilalui titik A adalah y_1 dan garis yang dilalui B adalah y_2. *Ketiga*, langkah-langkah selengkapnya dalam upaya memecahkan masalah tersebut adalah sebagai berikut.

Untuk menentukan gradiennya (m), kita ambil 2 titik pada garis tersebut, misalnya titik A(x_1,y_1) dan B(x_2,y_2). Maka kita akan peroleh persamaan:

$y_1 = ax_1 + b$ dan $y_2 = ax_2 + b$

Sehingga,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$
$$m = a$$

Jadi, gradien garis $y = ax + b$ adalah *a*.

Silakan Anda cek dalam berbagai kasus.

F. PERSAMAAN GARIS MELALUI SUATU TITIK DENGAN GRADIEN TERTENTU

Contoh 4.6:

Misalkan kita mempunyai sebuah garis dengan gradien sama dengan 2, dan melalui titik (4,2). Tentukan persaman garis tersebut!

Jawaban:

Secara tersirat, keempat langkah pemecahan masalah (seperti yang dianjurkan Polya) adalah tersirat sebagai berikut ini.

Karena garis itu mempunyai kemiringan 2 maka persamaan garis itu berbentuk:

$$y = 2x + b$$

Karena garis tersebut melalui titik (4,2), maka nilai $x = 4$ dan $y = 2$ dapat disubstitusikan, sehingga diperoleh:

$$y = 2x + b$$
$$2 = 2(4) + b$$
$$2 = 8 + b$$
$$b = 2 - 8$$
$$b = -6$$

Jadi, nilai $b = -6$, sehingga persaman garis yang dimaksud adalah $y = 2x - 6$

Agar berlaku umum, sekarang kita akan mencari persaman suatu garis dengan gradien *m* dan melalui sebarang titik (x_1, y_1). Karena gradiennya *m*, maka persaman garis tersebut adalah:

$$y = mx + b$$

Karena garis tersebut melalui sebarang titik (x_1, y_1), maka persamaannya menjadi $y_1 = mx_1 + b$, atau $b = y_1 - mx_1$. Nilai *b* tersebut kita substitusikan ke dalam persamaan $y = mx + b$, sehingga diperoleh:

$$y = mx + b$$
$$y = mx + (y_1 - mx_1)$$
$$y = mx + y_1 - mx_1$$
$$y - y_1 = mx - mx_1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Jadi, persamaan garis dengan gradien *m* dan melalui titik (x_1, y_1) adalah:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Contoh 4.7:

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (7, –1), jika diketahui gradiennya sama dengan 3.

Jawaban:

Kita gunakan persamaan garis yang melalui satu titik dan memiliki gradien *m* sebagai berikut untuk menjawab soal di atas.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Dengan $x_1 = 7$, $y_1 = -1$, dan $m = 3$, maka diperoleh

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$\Leftrightarrow y - (-1) = 3(x - 7)$$
$$\Leftrightarrow y + 1 = 3x - 3(7)$$
$$\Leftrightarrow y + 1 = 3x - 21$$
$$\Leftrightarrow y = 3x - 21 - 1$$
$$\Leftrightarrow y = 3x - 22$$

Jadi, persamaan garis yang dimaksud adalah $y = 3x - 22$.

Persamaan Garis Melalui Dua Titik

Bagaimana menentukan persamaan suatu garis jika diketahui melalui dua titik tertentu, akan tetapi gradiennya belum diketahui? Berikut ini akan disajikan sebuah contoh, sebagai langkah awal sebelum menentukan solusi secara umum.

Contoh 4.8:

Misalkan sebuah garis melalui dua titik P(4,5) dan Q(–2,–1). Tentukan persamaan garis yang melalui titik P dan Q tersebut!

Jawaban:

Andaikan garis yang melalui titik P dan Q ini mempunyai gradien *m*, sehingga persamannya adalah $y = mx + b$. Akan ditentukan nilai *m* dan *b*.

Ketika garis itu melalui P(4,5), maka diperoleh:

$$y = mx + b$$
$$\Leftrightarrow 5 = m(4) + b$$
$$\Leftrightarrow 5 = 4m + b$$
$$\Leftrightarrow b = 5 - 4m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (1)$$

Ketika garis itu melalui Q(–2,–1), maka diperoleh: $y = mx + b$

$$\Leftrightarrow -1 = m(-2) + b$$
$$\Leftrightarrow -1 = -2m + b$$
$$\Leftrightarrow 2m = b + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh: $2m = b + 1$

$$\Leftrightarrow 2m = (5 - 4m) + 1$$
$$\Leftrightarrow 2m = 5 - 4m + 1$$
$$\Leftrightarrow 2m = 6 - 4m$$
$$\Leftrightarrow 2m + 4m = 6$$
$$\Leftrightarrow 6m = 6$$
$$\Leftrightarrow m = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Dari persamaan (1) dan (3), diperoleh: $b = 5 - 4m$

$$\Leftrightarrow b = 5 - 4(1)$$
$$\Leftrightarrow b = 5 - 4$$
$$\Leftrightarrow b = 1$$

Nilai *m* dan *b* di atas kita substitusikan ke dalam persamaan $y = mx + b$, sehingga diperoleh: $y = (1)x + 1 = x + 1$. Jadi, persamaan garis yang dimaksud adalah: $y = x + 1$.

Agar berlaku umum, sekarang kita akan mencari persaman suatu garis yang melalui dua titik A(x_1,y_1) dan B(x_2,y_2). Andaikan garis yang melalui titik A dan B ini mempunyai gradien *m*, sehingga persaman garis ini adalah $y = mx + b$.

Ketika garis itu melalui A(x_1,y_1), maka diperoleh: $y = mx + b$

$$\Leftrightarrow y_1 = mx_1 + b$$
$$\Leftrightarrow b = y_1 - mx_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Ketika garis itu melalui B(x_2,y_2), maka diperoleh: $y = mx + b$

$$\Leftrightarrow y_2 = mx_2 + b$$
$$\Leftrightarrow b = y_2 - mx_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh: $b = b$

$$\Leftrightarrow y_1 - mx_1 = y_2 - mx_2$$
$$\Leftrightarrow y_1 - mx_1 = y_2 - mx_2$$
$$\Leftrightarrow mx_2 - mx_1 = y_2 - y_1$$
$$\Leftrightarrow m(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (3)$$

Dari persamaan (1) dan (3), diperoleh: $b = y_1 - mx_1$

$$\Leftrightarrow b = y_1 - \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right) \cdot x_1$$
$$\Leftrightarrow b = y_1 - \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right) \cdot x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.... (4)$$

Sekarang, kita substitusikan nilai *m* dan *b* hasil dari persamaan (3) dan (4) ke dalam persamaan $y = mx + b$, sehingga kita peroleh: $y = mx + b$

$$\Leftrightarrow y = \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right) \cdot x + \left(y_1 - \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right) \cdot x_1\right)$$
$$\Leftrightarrow y = \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right) \cdot x + y_1 - \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right) \cdot x_1$$
$$\Leftrightarrow y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \cdot x - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \cdot x_1$$
$$\Leftrightarrow y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Jadi secara umum, persaman garis melalui dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

dengan syarat $x_1 \neq x_2$ dan $y_1 \neq y_2$

G. Strategi Pemecahan Masalah pada Pembelajaran Relasi dan Fungsi

1. Strategi Pemecahan Masalah Relasi

Berikut ini diberikan suatu contoh masalah yang berkaitan dengan konsep relasi. Untuk menggambarkan suatu relasi dapat dinyatakan dengan tiga cara, yakni, dengan diagaram panah, pasangan berurutan dan diagram Cartesius.

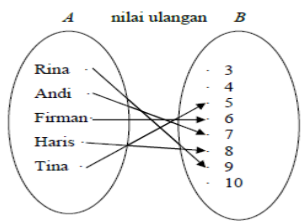
Contoh 4.9:

Hasil ulangan matematika Risna, Andi, Firman, Haris, dan Tina berturut-turut adalah 9, 7, 6, 8, dan 5. Jika A = {Rina, Andi, Firman, Haris, Tina} dan $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Nyatakan relasi dari himpunan A ke himpunan B tersebut dengan:

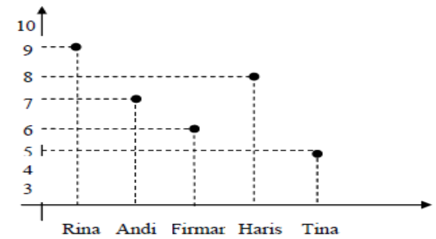
1) diagram panah
2) pasangan berurutan
3) diagram Cartesius

Penyelesaian:

1) Untuk menggambarkan diagram panah dari relasi yang diberikan, yaknidengan menempatkan anggota himpunan A pada diagram sebelah kiri dan menempatkan anggota himpunan B pada diagram sebelah kanan. Selanjutnya, dibuat panah dari anggota himpunan A ke anggota himpunan B sesuai relasi yang diketahui. Diagram panah yang dimaksud digambarkan sebagai berikut.



2) Untuk menyatakan relasi tersebut dengan pasangan berurutan, caranya sebagai berikut. Misal, Rina dengan nilai 9 dituliskan dengan pasangan berurutan (Rina, 9), Andi dengan niali 7 dituliskan sebagai pasangan berurutan (Andi, 7) dan seterusnya sehingga diperoleh pasangan berurutan untuk relasi yang diberikan, yakni, R = {(Rina,9), (Andi,7), (Firman,6), (Haris,8), (Tina,5)}.
3) Untuk menyatakan relasi dengan diagram Cartesius maka dibuat dua sumbu, sumbu mendatar menyatakan anggota himpunan A dan sumbu tegak menyatakan anggota himpunan B. Gambar relasi di atas sebagai berikut.



2. Strategi Pemecahan Masalah yang Berkaitan dengan Fungsi

Berikut ini akan diberikan beberapa contoh masalah yang berkaitan dengan fungsi serta cara mengajarkan penyelesaian dari masalah tersebut.

Contoh 4.10:

Andi mengendarai mobil memerlukan waktu dua jam untuk menempuh perjalanan dari kota A ke kota B. Sedangkan Beni memerlukan waktu tiga jam untuk menempuh perjalanan yang sama. Andi mengendarai mobil dengan kecepatan 12 km/jam lebih cepat dari pada Beni. Tentukan jarak kota A ke kota B.

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut langkah-langkahnya sebagai berikut.

1. Memilih variabel.
   Misalkan waktu yang diperlukan Andi untuk menempuh perjalanan dari kota A ke kota B adalah t_a, dengan kecepatan V_a, dan misalkan waktu yang diperlukan Beni untuk menempuh perjalanan dari kota A ke kota B adalah t_b, dengan kecepatan V_b Jarak dari kota A ke kota B dimisalkan S.
2. Menyatakan setiap bilangan yang muncul pada soal dengan variabel yang telah dipilih
   Andi memerlukan waktu 2 jam untuk menempuh jarak dari kota A ke kota B dengan kecepatan V_a. Jarak merupakan fungsi waktu, berarti $S = t_aV_a$. Jadi, $S = 2V_{a.}$
   Beni memerlukan waktu 3 jam untuk menempuh jarak dari kota A ke kota B dengan kecepatan V_b, berarti $S = t_bV_b$ sehingga $S = 3V_b$. Andi mengendarai mobil 12 km/jam lebih cepat dari pada Beni, berarti $V_a = 12+V_b$.
3. Menyatakan hubungan antara variabel
   S = jarak yang ditempuh Andi dan Beni sama, berarti
   $S = 2V_a = 3V_{b.}$

4. Menyelesaikan kalimat terbuka

$2Va = 3Vb$

$3Vb = 2(12 + Vb) = 24 + 2Vb$

$Vb = 24$.

Sehingga di peroleh $S = tbVb \Leftrightarrow S = 3(24) = 72$.

5. Menyatakan jawaban sesuai pertanyaan

Jadi, jarak kota A dan B adalah 72 km.

Contoh 4.11:

Toni, Iwan, dan Hairul bersepeda dengan kecepatan yang sama. Jarak tempuh
yang mereka lalui setelah t menit dapat dinyatakan dengan fungsi $s(t) = 2t^2 + 3t + 5$ (meter). Setelah p menit, Toni berhenti bersepeda. Jarak yang ditempuh Toni setelah p menit adalah 95 meter. Iwan berhenti bersepeda 2 menit kemudian. Hairul berhenti bersepeda setelah 2 kali p menit. Jika jarak yang ditempuh Iwan 157 Meter dan jarak yang ditempuh Hairul adalah 329 meter. Berapa lama masing-masing Toni, Iwan, dan Hairul bersepeda?

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut langkah-langkahnya sebagai berikut.

1. Memilih variabel

   Dalam soal ini variabel yang terkait sudah diketahui, yakni waktu t, fungsi dari jarak terhadap waktu diketahui $s(t) = 2t^2 + 3t + 5$.

   Waktu tempuh Toni p menit.

   Waktu tempuh Iwan $p + 2$ menit.

   Waktu tempuh Hairul $2p$ menit.

2. Menyatakan setiap bilangan yang muncul pada soal dengan variabel yang telah dipilih:

   Jarak tempuh Toni selama p menit 95 meter.

   Jarak tempuh Iwan selama $p + 2$ menit 157 meter.

   Jarak tempuh Hairul selama $2p$ menit 329 meter.

3. Menyatakan hubungan antara variabel

   Fungsi jarak : $s(t) = 2t^2 + 3t + 5$

   Jarak yang ditempuh Toni : $s(p) = 2p^2 + 3p + 5$

   $$95 = 2t^2 + 3t + 5$$
   $$2t^2 + 3t = 90 \;\ldots\ldots 1)$$

   Jarak yang ditempuh Iwan : $s(p+2) = 2(p+2)^2 + 3(p+2) + 5$

   $$157 = 2(p^2 + 4p + 4) + 3p + 6 + 5$$
   $$157 = 2p^2 + 11p + 19$$
   $$2p^2 + 11p = 138 \;\ldots\ldots 2)$$

   Jarak yang ditempuh Hairul: $s(2p) = 2(2p)^2 + 3(2p) + 5$

   $$329 = 8p^2 + 6p + 5$$
   $$8p^2 + 6p = 324 \;\ldots\ldots\ldots 3)$$

4. Menyelesaikan kalimat terbuka

   Dari persamaan 1) dan 2) diperoleh:

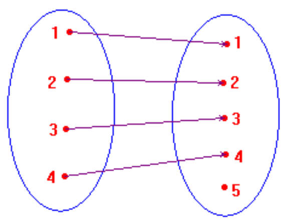
   $$\begin{array}{rl} 2t^2 + 3t & = 90 \\ \underline{2p^2 + 11p} & \underline{= 138} \; - \\ -8p & = -48 \\ p & = 6 \end{array}$$

5. Menyatakan jawaban sesuai pertanyaan

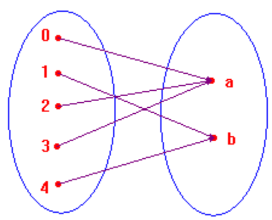
   Dengan memperhatikan langkah (2) dan mengganti $p = 6$, diperoleh waktu yang diperlukan masing-masing untuk bersepeda adalah 6 menit, 8 menit dan 12 menit.

LATIHAN SOAL

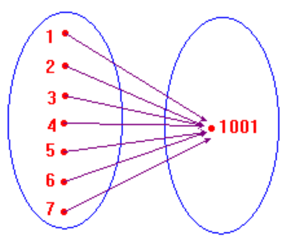
1. Mana dari himpunan pasangan terurut berikut yang merupakan fungsi jika domainnya himpunan {1,2,3,4,5}? Berikan penjelasan dari jawaban Anda!
   a. {(1,3), (3,5), (4,3)}
   b. {(2,5), (3,5), (1,3), (5,1), (4,1)}
   c. {(2,1), (1,3), (3,4), (4,2), (2,5), (5,2)}
   d. {(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5)}
2. Mana dari diagram-diagram berikut yang merupakan fungsi? Berikan penjelasan mengapa Anda menjawab demikian!



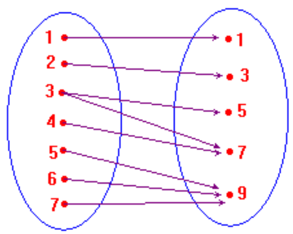
(a)



(b)



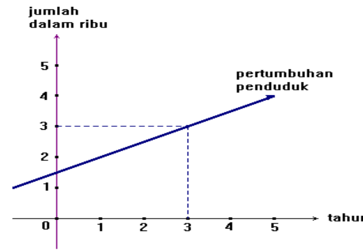
(c)



(d)

3. Jika $x^3 - 2x^2$, tentukan:
   (a) $f(2) \times f(5)$ (b) $f(t)$ (c) $\frac{f(3)}{f(0)}$
4. Tentukan persamaan garis yang melalui suatu titik, jika diketahui:
   (a) P(5,–2) dan gradien 2
   (b) Q(1,0) dan gradien –1

5. Andaikan suatu garis g yang melalui titik A(0,3) dan B(–3,2), memiliki gradien m_1. Dan jika terdapat h dengan gradien m_2 yang tegak lurus dengan garis g.
   (a) Carilah persamaan garis g yang melalui A dan B.
   (b) Carilah gradien garis g tersebut.
   (c) Carilah juga gradien garis h yang tegak lurus garis g.
6. Tentukan nilai $\frac{f(2)}{f(5)}$dari suatu fungsi $f(x) = \frac{x^2-7x+10}{x-3}$!
7. Tentukan fungsi persamaan garis yang melalui titik (3,4) dan (-5,0)!
8. Laju pertumbuhan penduduk suatu kota ditunjukkan dengan grafik berikut ini. Sumbu-x menyatakan pertambahan waktu (dalam tahun), sedangkan sumbu-y menyatakan jumlah penduduk (dalam ribu). Berapa kira-kira jumlah penduduk setelah 7 tahun? Jika ternyata pada tahun ke-10 terjadi bencana besar yang menewaskan 70% penduduk pada tahun itu, berapa jumlah penduduk pada tahun ke-15 (dengan asumsi pertambahan penduduknya tetap sama)?



9. Matematikawan yang sangat terkenal, DeMorgan, menghabiskan seluruh usianya pada tahun 1800-an. Pada tahun terakhir di masa hidupnya beliau berkata, “Dulu aku berusia x tahun pada tahun x^2.” Pada tahun berapakah DeMorgan dilahirkan?
10. Jika $y = \frac{1-x}{3+2x}$, maka penulisan x sebagai fungsi dari y adalah ....

BAB V
PEMECAHAN MASALAH PADA LOGIKA

A. Mendeskripsikan Pernyataan dan Bukan Pernyataan (Kalimat Terbuka)

Pernyataan adalah kalimat yang hanya benar saja atau salah saja, akan tetapi tidak sekaligus benar dan salah. Dalam matematika, pernyataan-pernyataan dengan huruf kecil, seperti a, b, p, dan q.

Kalimat terbuka adalah kalimat yang masih mengandung variabel, sehingga belum dapat ditentukan nilai kebenarannya (benar atau salah). Kalimat terbuka tersebut dapat berubah menjadi bentuk pernyataan, jika variabelnya diganti dengan suatu konstanta.

Contoh 5.1:

Kalimat terbuka: $x + 5 = 9$
Jika variabelnya diganti dengan 4 maka $4 + 5 = 9$ (pernyataan benar)
Jika variabelnya diganti dengan 7 maka $7 + 5 = 12$ (pernyataan salah)

B. Mendeskripsikan Ingkaran, Konjungsi, Disjungsi, Implikasi, Biimplikasi Dan Ingkarannya

1. Pernyataan Majemuk

Apabila suatu pernyataan terdiri dari satu pernyataan maka diantara satu pernyataan dengan pernyataan lainnya dibutuhkan suatu kata penghubung sehingga diperoleh suatu pernyataan majemuk. Untuk Logika matematika ada 5 macam penghubung pernyataan yaitu *ingkaran* (negasi), *konjungsi* (dan), *disjungsi* (atau), *implikasi* (jika...maka...) dan *biimplikasi* (jika dan hanya jika).

Tabel 5.1 Logika Matematika

Operasi Logika	Penghubung	Lambang
Ingkaran	Tidak, non	~ atau -
Konjungsi	Dan	$\wedge$
Disjungsi	Atau	$\vee$
Implikasi	Jika....maka....	$\rightarrow$
Biimplikasi	Jika dan hanya jika	$\leftrightarrow$

Ingkaran, konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi disebut operasi dalam logika. Simbol-simbol dari operasi dalam logika diberika dalam tabel berikut.

2. Ingkaran atau Negasi atau penyangkalan

Nilai kebenaran dapat dituliskan dalam bentuk tabel yang dinamakan tabel 5.2 kebenaran seperti berikut.

Tabel 5.2 Nilai kebenaran dari operasi ingkaran

P	~P
B	S
S	B

3. Operasi Konjungsi

Operasi konjungsi merupakan operasi biner (operasi yang dikenakan pada dua pernyataan) yang dilambangkan dengan tanda "$\wedge$". Dengan operasi ini dua pernyataan dihubungkan dengan kata "dan".

Jika p dan q dua pernyataan, maka $p \wedge q$ bernilai benar jika p dan q keduanya bernilai benar, sebaliknya $p \wedge q$ bernilai salah jika satu dari p atau q bernilai salah atau keduanya salah.

Tabel 5.3 Nilai kebenaran dari operasi konjungsi

P	Q	$P \wedge Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

4. Operasi Disjungsi

Operasi disjungsi juga merupakan operasi biner yang dilambangkan dengan tanda "$\vee$". Operasi ini menggabungkan dua pernyataan menjadi satu dengan kata hubung "atau".

Jika p dan q dua pernyataan, maka $p \vee q$ bernilai benar jika p dan q keduanya bernilai benar atau salah satu dari p atau q bernilai benar, sebaliknya $p \vee q$ bernilai salah jika keduanya salah.

Tabel 6.4 Nilai kebenaran dari operasi disjungsi

P	Q	$P \vee Q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

5. Operasi Implikasi

Operasi implikasi (kondisional) adalah operasi penggabungan dua pernyataan yang menggunakan kata hubung "jika ... maka ..." yang dilambangkan "$\rightarrow$". Implikasi dari penyataan p dan q ditulis $p \rightarrow q$ dan dibaca “jika p maka q”. Pernyataan p→q juga dapat dibaca “p hanya jika q” atau “p adalah syarat cukup bagi q” atau “q adalah syarat perlu bagi p”.

Dalam pernyataan p→q

p disebut hipotesa / anteseden / sebab

q disebut koklusi / konsekuen / akibat

Jika p dan q dua buah pernyataan maka p→q salah jika p benar dan q salah, dalam kemungkinan lainnya p→q benar.

Tabel 5.5 Nilai kebenaran operasi implikasi

P	Q	P→Q
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

6. Operasi Biimplikasi (Bikondisional)

Biimplikasi yaitu pernyataan majemuk yang menggunakan kata hubung “....jika dan hanya jika ....” dinotasikan “↔”. Biimplikasi dari pernyataan p dan q ditulis p↔q dibaca p jika dan hanya jika q. Pernyataan p↔q dapat juga dibaca:

p equivalent q

p adalah syarat perlu dan cukup bagi q

Jika p dan q dua buah pernyataan maka P↔Q benar bila kedua pernyataan tersebut mempunyai nilai kebenaran yang sama, sebaliknya P↔Q salah bila salah satu salah, atau salah satu benar.

Tabel 5.6 Nilai kebenaran operasi Biimplikasi

P	Q	P↔Q
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

7. Menentukan Nilai Kebenaran Pernyataan Majemuk

Dari pernyataan-pernyataan tunggal p, q, r, ... dan dengan menggunakan operasi-operasi pernyataan negasi (~), konjungsi (∧), disjungsi (∨), implikasi (→), dan biimplikasi (↔) dapat disusun suatu pernyataan majemuk yang lebih rumit.

Contoh:

1. ~(p ∨ ~q)
2. ~[p ∧ (p → q)]
3. [(p ∨ q) → r]

Nilai kebenaran pernyataan majemuk seperti itu dapat ditentukan dengan menggunakan pertolongan tabel dasar untuk negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi yang telah dibahas di depan. Untuk memahami cara-cara menentukan nilai kebenaran pernyataan majemuk yang lebih rumit, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1: Tentukan nilai kebenaran pernyataan majemuk ~(P ∨ ~Q)

Jawab:

p	Q	~Q	(P∨~Q)	~(P ∨ ~Q)
B	B	S	B	S
B	S	B	B	S
S	B	S	S	B
S	S	B	B	S

Jadi nilai kebenaran pernyataan majemuk ~(P ∨ ~Q) adalah S S B S.

C. Mendeskripsikan Invers, Konvers Dan Kontraposisi

Dari suatu pernyataan bersyarat “p → q” yang diketahui dapat dibuat pernyataan lain sebagai berikut:

1. q → p disebut pernyataan *Konvers* dari p → q
2. ~p → ~q disebut pernyataan *Invers* dari p → q
3. ~q → ~p disebut pernyataan *Kontraposisi* dari p → q

Untuk semua kemungkinan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan komponen p dan q, hubungan nilai kebenaran konvers, invers, dan kontraposisi dengan implikasi semula, dapat ditunjukan dengan memakai tabel kebenaran.

Tabel 5.7 Hubungan kebenaran q → p, ~p → ~q, ~q → ~p dengan p → q

				Implikasi	Konvers	Invers	Kontraposisi
P	Q	~p	~q	p→q	q → p	~p → ~q	~q → ~p
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B

Dari tabel diatas ternyata suatu implikasi yang salah konversnya benar tetapi, implikasinya yang benar.

1. Negasi Pernyataan Majemuk

Untuk menentukan negasi dari pernyataan majemuk dapat digunakan sifat-sifat negasi pernyataan majemuk pada tabel berikut ini:

Tabel 5.8 Sifat-sifat negasi pernyataan majemuk

Operasi	Penghubung	Lambang
Konjungsi	$p \wedge q$	$\sim p \vee \sim q$
Disjungsi	$p \vee q$	$\sim p \wedge \sim q$
Implikasi	$p \rightarrow q$	$p \wedge \sim q$
Biimplikasi	$p \leftrightarrow q$	$p \leftrightarrow \sim q$ atau $\sim p \leftrightarrow q$

D. Menerapkan Modus ponens, modus tollens dan prinsip silogisme Dalam Menarik Kesimpulan

Dasar-dasar logika matematika yang telah kita pelajari pada subbab terdahulu akan diterapkan lebih lanjut dalam proses penarikan kesimpulan. Suatu proses penarikan kesimpulan terdiri atas beberapa pernyataan yang diketahui (disebut premis), kemudian dengan memakai prinsip logika dapat diturunkan suatu pernyataan baru yang ditarik dari premis-premis semula (disebut kesimpulan / konklusi). Penarikan seperti itu disebut argumentasi. Kalau konjungsi dari premis-premis berimplikasi konklusi maka argumentasi itu dikatakn berlaku atau sah. Sebaliknya, kalau konjungsi dari premis-premis tidak berimplikasi konklusi maka argumentasi itu dikatakan tidak sah. Jadi suatu argumentasi dikatakn sah kalau premis-premisnya benar maka konklusinya juga benar.

Dalam subbab ini kita akan mempelajari beberapa cara penarikan kesimpulan, diantaranya adalah modus ponens, modus tollens, dan silogisme.

1. Modus Ponens

Jika $p \rightarrow q$ benar dan p benar maka q benar.

Skema arugmen dapat ditulis sebagai berikut:

$p \rightarrow q$ ....premis 1

<u>p ....premis 2</u>

$\therefore q$ ....kesimpulan/konklusi

Dalam bentuk implikasi, argumentasi tersebut dapat dituliskan sebagai $[(p\rightarrow q)\wedge p]\rightarrow q$. Argumentasi ini dikatakn sah kalau pernyataan implikasi $[(p\rightarrow q)\wedge p]\rightarrow q$ merupakan tautologi. Tautologi adalah sebuah pernyataan majemuk yang selalu benar untuk semua kemungkinan nilai kebenaran dari penyataan-pernyataan komponennya.

Tabel 5.9 Nilai kebenaran dari $[(p\rightarrow q)\wedge p]\rightarrow q$

P	q	$p\rightarrow q$	$(p\rightarrow q)\wedge p$	$[(p\rightarrow q)\wedge p]\rightarrow q$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Dari tabel pada kolom tampak bahwa $[(p\rightarrow q)\wedge p]\rightarrow q$ merupakan tautologi, jadi argumen tersebut sah.

2. Modus Tollens

Jika $p \rightarrow q$ benar dan $\sim q$ benar maka p benar

Skema argumen dapat ditulis sebagai berikut:

$p \rightarrow q$ ....premis 1

<u>$\sim q$ ....premis 2</u>

$\therefore \sim p$ ....kesimpulan/konklusi

Dalam bentuk implikasi, modus tollens dapat dituliskan sebagai $[(p\rightarrow q)\wedge\sim q]\rightarrow\sim p$, sah atau tidaknya modus tollens dapat diuji dengan tabel kebenaran sebagai berikut!

Tabel 5.10 Nilai kebenaran $[(p\rightarrow q)\wedge\sim q]\rightarrow\sim p$

P	Q	$\sim p$	$\sim q$	$p\rightarrow q$	$(p\rightarrow q)\wedge\sim q$	$[(p\rightarrow q)\wedge\sim q]\rightarrow\sim p$
B	B	S	S	B	S	B
B	S	S	B	S	S	B
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B

Dari tabel tampak bahwa $[(p\rightarrow q)\wedge\sim q]\rightarrow\sim p$ merupakan tautologi. Jadi modus tollens merupakan argumentasi yang sah.

3. Silogisme

Dari premis-premis $p\rightarrow q$ dan $q\rightarrow r$ dapat ditarik konklusi $p\rightarrow r$. Penarikan kesimpulan seperti ini disebut kaidah silogisme. Skema argumennya dapat dinyatakn sebagai berikut:

$p \rightarrow q$ ....premis 1

<u>$q \rightarrow r$ ....premis 2</u>

$\therefore p \rightarrow r$.........kesimpulan/konklusi

Dalam bentuk implikasi, silogisme dapat dituliskan sebagai $[(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)]\rightarrow(p\rightarrow r)$ sah atau tidaknya silogisme dapat diuji dengan tabel kebenaran sebagai berikut:

Tabel 5.11 Kebenaran [(p→q)^(q→r)]→(p→r)

p	Q	R	p→q	q→r	p→r	(p→q)^(q→r)	[(p→q)^(q→r)]→(p→r)
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	S	B
B	S	B	S	B	B	S	B
B	S	S	S	B	S	S	B
S	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B	B

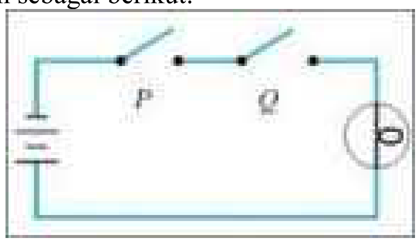
Dari tabel tampak bahwa [(p→q)^(q→r)]→(p→r) merupakan tautologi. Jadi silogisme merupakan argumentasi yang sah.

E. Aplikasi Logika Matematika

Sama halnya dengan pokok bahasan matematika yang lainnya, logika matematika mempunyai peranan dan aplikasi dalam kehidupan sehari – hari. Salah satu aplikasi logika matematika yang sering dijumpai adalah dalam rangkaian listrik. Telah diketahui bersama bahwa terdapat 2 jenis rangkaian listrik, yaitu :

a. Rangkaian seri

Misalkan terdapat dua buah saklar P dan Q, maka rangkaian seri dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 5.1 Rangkaian Seri

Jika saklar terbuka, maka disimbolkan dengan b (buka), dan jika tertutup akan disimbolkan dengan t (tutup). Dari rangkaian seri terdapat 4 kemungkinan posisi saklar sehingga lampu akan menyala atau tidak, yaitu:

1. Jika saklar P tertutup dan Q tertutup, maka arus listrik dapat mengalir sehingga dapat menyalakan lampu.

2. Jika saklar P tertutup dan Q terbuka, maka arus listrik dapat mengalir melewati P tetapi tidak dapat melewati Q, sehingga lampu tidak dapat menyala.
3. Jika saklar P terbuka dan Q tertutup, maka arus listrik tidak bisa melewati P sehingga tidak dapat menyalakan lampu meskipun saklar Q tertutup.
4. Jika saklar P terbuka dan Q terbuka, maka arus listrik tidak dapat mengalir sehingga tidak dapat menyalakan lampu.

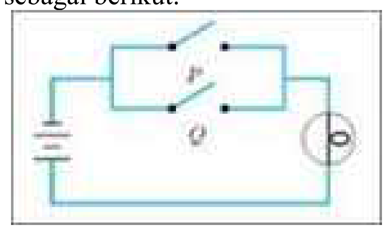
   Dari 4 kemungkinan di atas, dapat disimpulkan dalam tabel berikut:

P	Q	Lampu
t	t	Menyala
t	b	Mati
b	t	Mati
b	b	Mati

Jika diperhatikan, tabel di atas identik dengan tabel kebenaran pada operasi konjungsi (∧), yakni dengan mengganti "t" dengan "B", "b" dengan "S", "menyala" dengan "B", dan "mati" dengan "S".

b. Rangkaian paralel

Misalkan terdapat dua buah saklar P dan Q, maka rangkaian paralel dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 5.2 Rangkaian Paralel

Jika saklar terbuka, maka disimbolkan dengan b (buka), dan jika tertutup akan disimbolkan dengan t (tutup). Dari rangkaian seri terdapat 4 kemungkinan posisi saklar sehingga lampu akan menyala atau tidak, yaitu:

1. Jika saklar P tertutup dan Q tertutup, maka arus listrik dapat mengalir sehingga dapat menyalakan lampu.
2. Jika saklar P tertutup dan Q terbuka, maka arus listrk dapat mengalir melewati P sehingga dapat menyalakan lampu.
3. Jika saklar P terbuka dan Q tertutup, maka arus listrik tidak bisa melewati P tetapi dapat mengalir melewati Q, sehingga dapat menyalakan lampu.

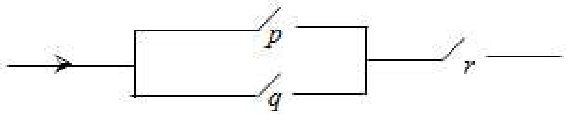
4. Jika saklar P terbuka dan Q terbuka, maka arus listrik tidak dapat mengalir sehingga tidak dapat menyalakan lampu.
   Dari 4 kemungkinan di atas, dapat disimpulkan dalam tabel berikut:

P	Q	Lampu
t	t	Menyala
t	b	Menyala
b	t	Menyala
b	b	Mati

Jika diperhatikan, tabel di atas identik dengan tabel kebenaran pada operasi disjungsi (∨), yakni dengan mengganti “t” dengan “B”, “b” dengan “S”, “menyala” dengan “B”, dan “mati” dengan “S”.

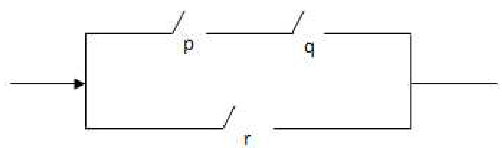
Contoh 5.2:

Buatlah rangkaian listriknya jika diketahui simbol logika $(p \wedge q) \vee r$.
Jawab:
Dari simbol logika tersebut bahwa simbol $(p \wedge q)$ merupakan simbol untuk rangkaian paralel, sedangkan “∧” merupakan simbol untun rangkaian seri. Maka rangkaian untuk $(p \wedge q) \vee r$ adalah sebagai berikut:



Contoh 5.3:

Perhatikan rangkaian berikut listrik berikut, dan tentukan pula simbol logika untuk rangkaian yang diberikan:



Jawab:
Rangkaian listrik di atas merupakan rangkaian listrik paralel, maka secara simbol logika akan dihubungkan dengan operasi “∨”. Sehingga diperoleh simbol logika sebagai berikut: $(p \wedge q) \vee r$

LATIHAN SOAL

1. Tentukan negasi dari pernyataan-pernyataan berikut:
   a. Hari ini Jakarta banjir.
   b. Kambing bisa terbang.
   c. Didi anak bodoh
   d. Siswa-siswi SMANSA memakai baju batik pada hari
2. Coba kalian tentukan negasi dari beberapa pernyataan berikut ini
   a) Kemarin Bandung Hujan
   b) Mira anak pintar
   c) Kambing memiliki sayap
   d) Siswa SMA memakai batik pada hari Senin
3. Ingkaran dari pernyataan “Semua pasien mengharapkan sehat dan dapat beraktifitas kembali” adalah…
4. Ubahlah pasangan pernyataan di bawah ini menjadi pernyataan majemuk dengan operasi majemuk (dan)
   a. p: Hari ini Banjarmasin cerah
      q: Hari ini Banjarmasin udaranya sejuk
   b. p: Michelle mengenakan baju pink
      q: Michelle mengenakan topi merah
   c. p: Ujang pandai dalam pelajaran Fisika
      q: Ujang pandai dalam pelajaran Matematika
5. Perhatikan pernyataan berikut:
   "Jika cuaca mendung maka Charli membawa payung"
   Tentukan konvers, invers dan kontraposisi dari pernyataan di atas!
6. Tentukan kesimpulan dari :
   Premis 1 : Jika hari cerah maka Budi bermain bola.
   Premis 2 : Budi tidak bermain bola.
7. Amati pernyataan berikut ini:
   p: Hari ini Adit pergi ke pasar
   q: Hari ini Adit pergi ke toko mainan
   ubah pernyataan di atas dengan logika matematika di bawah ini:
   a. $p \wedge q$
   b. $p \wedge \sim q$
   c. $\sim p \wedge q$
   d. $\sim p \wedge \sim q$
8. Diketahui pernyataan :
   a. Jika hari panas, maka Ani memakai topi.
   b. Ani tidak memakai topi atau ia memakai payung.

c. Ani tidak memakai payung.
Kesimpulan yang sah adalah...
9. Gabungkanlah beberapa pernyataan di bawah ini dengan operasi (atau):
   a. p: Aisyah pergi ke pasar
      q: Aisyah menggoreng ikan
   b. p: Ali mengajar Fisika
      q: Ali mengajar Matematika
10. Tentukan kesimpulan dari premis berikut:
    Premis 1: jika harga BBM turun maka harga cabai turun
    Premis 2: harga cabai tidak turun

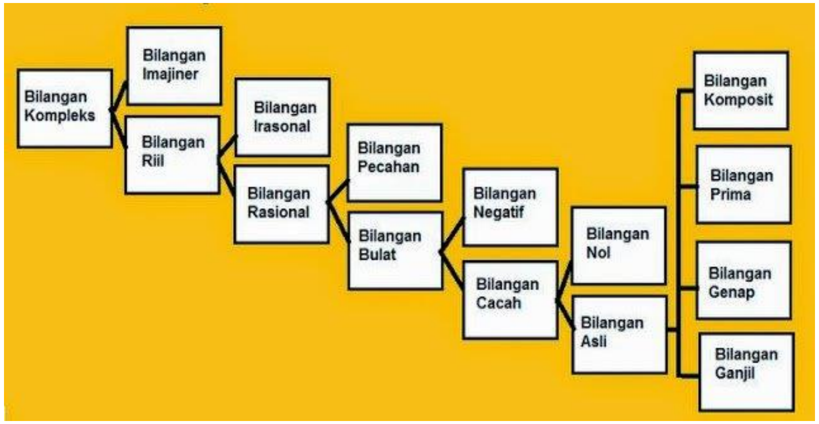
BAB VI
PEMECAHAN MASALAH PADA BILANGAN BULAT

A. Pengertian dan Contoh Bilangan Bulat

Setiap berbicara tentang mata pelajaran Matematika, kamu pasti seringkali mendengar kata bilangan '*kan*?. Bilangan dapat diartikan menghitung (membilang).

Bilangan adalah suatu konsep matematika yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran. Simbol ataupun lambang yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan disebut sebagai angka atau lambang bilangan. Bilangan merupakan materi yang banyak dibahas di Sekolah Dasar.

Dari sini, RG Squad jadi tahu betapa pentingnya bilangan dalam ilmu matematika bukan? *Nah*, dalam artikel berikut ini kita akan membahas tentang pengertian dan contoh bilangan bulat. Apa *sih* bilangan bulat itu? *Yuk*, kita simak.

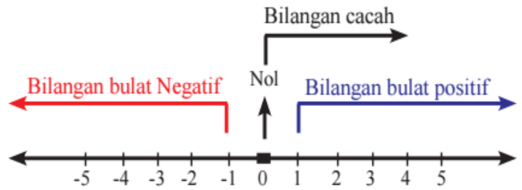


Gambar 6.1 Jenis Bilangan

Dari skema di atas, dapat dilihat bahwa bilangan bulat termasuk bilangan rasional yang merupakan bagian dari bilangan real. Selain itu, bilangan bulat terdiri dari:

1. Bilangan bulat negatif = {...,–5,–4,–3,–2,–1}
2. Bilangan nol = {0}
3. Bilangan asli atau bilangan bulat positif = {1,2,3,4,5,...} yang dapat terbagi menjadi:
   a. Bilangan ganjil = {1,3,5,7,...}
   b. Bilangan genap = {2,4,6,8,...}

Bilangan nol dan bilangan asli membentuk bilangan yang disebut: Bilangan cacah = {0,1,2,3,...}



Gambar 6.2 Bilangan Cacah

1. Mengurutkan Bilangan Bulat

Mengurutkan beberapa bilangan bulat, yaitu menuliskan bilangan bulat tersebut secara urut dari yang nilainya terbesar atau terkecil. Pada garis bilangan, semakin ke kanan letak suatu bilangan, nilainya semakin besar. Sebaliknya, semakin ke kiri, nilainya semakin kecil.

2. Membandingkan Bilangan Bulat

Lambang-lambang untuk membandingkan dua bilangan bulat sebagai berikut:

- a lebih dari b, ditulis $a > b$
- a kurang dari b, ditulis $a < b$
- a lebih dari atau sama dengan b, ditulis $a \geq b$
- a kurang dari atau sama dengan b, ditulis $a \leq b$

3. Lawan (Invers) Suatu Bilangan Bulat

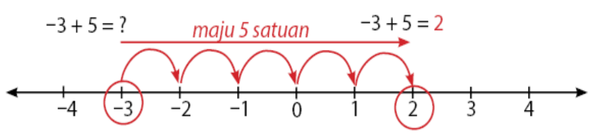
Lawan bilangan a adalah –a. Sebaliknya, lawan –a adalah a.

Contoh:

- lawan 5 adalah –5
- Invers dari –3 adalah 3

B. Operasi Bilangan Bulat

Operator hitung dalam matematika meliputi penjumlahan (+), pengurangan (-), perkalian (×), dan pembagian (:). Operasi pada bilangan bulat merupakan perhitungan yang melibatkan bilangan bulat. Anggota bilangan bulat jumlahnya tidak terbatas, yaitu …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ….



Gambar 6.3 Bilangan Bulat

Operasai hitung pada bilangan bulat memiliki sifat-sifat yang akan dibahas pada pembahasan di bawah.

Sifat Operasi Penjumlahan

Tertutup: $a + b \in B$ dengan a dan $b \in B$
Komutatif: $a + b = b + a$
Asosiatif: $(a + b) + c = a + (b + c)$
Identitas: $a + 0 = 0 + a = a$
Invers: $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Sifat Operasi Pengurangan

Tertutup: $a - b = a + (-b)$

Sifat Operasi Perkalian

Tertutup: $a \times b \in B$ dengan a dan $b \in B$
Komutatif: $a \times b = b \times a$
Asosiatif: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
Identitas: $a \times 1 = 1 \times a = a$
Invers: $a \text{ x } \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$
Distributif terhadap penjumlahan
$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$
Distributif terhadap pengurangan
$(a - b) \times c = (a \times c) - (b \times c)$

Sifat Operasi Pembagian

$a : b = a \times \frac{1}{b}$
Distributif terhadap penjumlahan
$(a + b) : c = (a : c) + (b : c), c \neq 0$
Distributif terhadap pengurangan
$(a - b) : c = (a : c) - (b : c), c \neq 0$

Contoh 6.1:

Dalam kompetisi matematika, setiap jawaban benar diberi nilai 4, salah -2 dan tidak dijawab -1. Dari 40 soal yang diberikan, Rini berhasil menjawab benar sebanyak 30 dan salah sebanyak 6. Skor yang diperoleh Rini adalah ….

Pembahasan:
Jawaban Rini:
Benar = 30
Salah = 6
Tidak dijawab = 40 – 30 – 6 = 4

Jadi, Skor Rini adalah $= 30 \times 4 + 6 \times (-2) + 4 \times -1$

$= 120 - 12 - 4 \quad = 104$

C. Contoh Kasus

Kasus 1

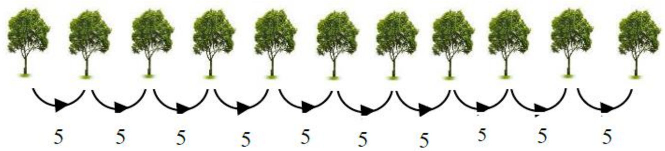
Panjang sebuah jalan dari satu ujung ke ujung lainnya adalah 50 m. Pepohonan ditanam dengan jarak 5 m disepanjang pinggir jalan tersebut. Berapa banyak pohon yang ditanam sepanjang jalan tersebut?

Penyelesaian 1: (dengan menggunakan Polya)

a. Pada tahap *Memahami masalah,* siswa memahami soal yang diberikan. Kemudian menentukan panjang sebuah jalan 50 m, disepanjang jalan akan ditanami pohon. Siswa mencoba mencari banyaknya pohon yang ditanam di sepanjang jalan.

b. Tahap *Merencanakan penyelesaian,* siswa dapat menggunakan beberapa cara. Salah satunya dengan menggunakan gambar sebgaai berikut:

c. Menyelesaikan masalah



Jarak masing-masing pohon 5 m.

d. Mengecek kembali

Jadi pohon yang ditanam sepanjang jalan sebanyak 11 pohon.

Penyelesaian 2: (dengan menggunakan cara Reys)

Penyelesaian dengan menggunakan gambar.

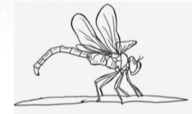
Sebuah jalan dengan panjang 50 m. Tiap 5 m ditanami pohon.
Mencari banyak pohon yang dibutuhkan untuk ditanam sepanjang jalan.
- Melakukan operasi pembagian 50 m : 5 m
- Menjumlah 1 pohon yang ada di ujung.

Banyaknya pohon yang dibutuhkan

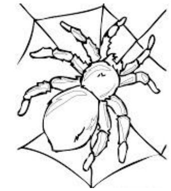
$= \frac{50}{5} + 1$ pohon yang ada di ujung

Jadi, banyaknya pohon yang ditanam sepanjang jalan ada 11 batang.

Kasus 2:



Seekor laba-laba memiliki 8 kaki. Seekor capung memiliki 6 kaki. Terdapat 12 ekor laba-laba dan capung.



Banyak kaki yang mereka miliki adalah 88 kaki. Berapa ekor laba-laba yang ada di sana.

Penyelesaian 1: (dengan menggunakan cara Polya)

a. *Memahami masalah*

Diketahui: Seekor laba-laba memiliki 8 kaki,
Seekor capung memiliki 6 kaki.
Jumlah kaki laba-laba dan capung = 88 kaki
Menentukan banyaknya laba-laba.

b. *Merencanakan penyelesaian*

Dengan membuat asumsi
(Petunjuk: Anggap semua hewan itu adalah capung)

c. *Menyelesaikan masalah*

Jika semua hewan tersebut adalah capung, maka akan terdapat $12 \times 6 = 72$ kaki. Kemudian terdapat kekurangan $(88 - 72 = 16)$ kaki.

$8 - 6 = 2$

Selisih antara banyak kaki seekor laba-laba dan capung adalah 2.

$16 : 2 = 8$

d. *Mengecek kembali*

Jadi, banyaknya laba-laba ada 8 ekor

Penyelesaian 2: (dengan menggunakan cara Reys)

Dengan menggunakan tabel.

Banyak laba-laba	Banyak kaki	Banyak capung	Banyak kaki	Seluruh kaki
6	48	6	36	84
8	64	4	24	88

Jadi, banyaknya laba-laba ada 8 ekor.

LATIHAN SOAL

1. Suhu di daerah Padang Pasir pada Malam hari adalah -10^0C. Pada siang harinya suhunya menjadi 45^0C. Perbedaan suhu di Padang Pasir antara Malam hari dan siang hari adalah...
2. Pada ulangan Matematika Tika menjawab 30 pertanyaan dengan benar, 6 pertanyaan salah dan 4 pertanyaan tidak dijawab. Jika untuk setiap pertanyaan yang benar nilainya 5, pertanyaan yang salah nilainya -2 serta yang tidak dijawab nilainya -1, maka jumlah seluruh nilai yang didapat tika adalah...
3. Sebuah pesawat terbang berada di ketinggian 35.000 kaki diatas permukaan laut. Kemudian menurunkan ketinggiannya sebesar 17.000 kaki. beberapa saat kemudian pesawat tersebut menaikan ketinggiannya sebesar 7.500 kaki dari ketinggian sebelumnya. Berada di ketinggian berapakah pesawat terbang terbang tersebut sekarang ...
4. $8^2 : (16 : 4) – 3^2 \times 5 – (15 \times 3) = ...$
5. $2 \times 9 + 16^2 : 4 = …$
6. Mila membeli selusin gelas dengan harga Rp. 24.000,00 per gelas. Kemudian ia membeli lagi 20 gelas dengan harga Rp. 30.000 per gelas. Berapa uang yang harus dibayarkan untuk gelas-gelas tersebut?
7. Tiga orang guru memenangkan lomba karya ilmiah. Jumlah hadian yang mereka terima adalah rp. 70.000.000,00. Masing-masing akan mendapat bagian yang sama setelah dikurangi pajak 10%. Berapakah besar bagian masing-masing guru?
8. Diketahui aturan tes masuk ke suatu perguruan tinggi adalah jawaban benar diberi nilai 4, jawaban yang salah diberi nilai -1, dan tidak menjawab diberi nilai 0. Jumlah seluruh soal adalah 100.
   a. Berapakan nilai tertinggi yang dapat diperoleh?
   b. Berapakah nilai terendah yang dapat diperoleh?
   c. Berapakah jumlah soal yang dijawab benar jika diketahui nilai yang diperoleh 200 dan 10 soal tidak dijawab.
9. Sebuah bak mandi berbentuk persegi panjang tanpa tutup mempunyai ukuran panjang 2,1 m, lebar 1,5 m dan tinggi 1m. Tentukan volume bak mandi tersebut!
10. Sebuah bilangan yang jika dikalikan dengan lawannya kemudian dibagi dengan -18, hasilnya adalah bilangan prima yang kurang dari 3. Tentukanlah bilangan-bilangan itu!

BAB VII
PEMECAHAN MASALAH PADA SISTEM BILANGAN CACAH

A. Pengertian Bilangan Cacah

Bilangan (*number*) dapat diartikan sebagai: “Suatu **ukuran** dari **besaran**, tetapi juga dipakai dalam suatu cara abstrak (tak berwujud) tanpa menghubungkannya dengan `berapa banyak` atau **pengukurannya**” (Hollands, 1984: 15). Pada operasi hitung selanjutnya akan dibahas tentang bilangan kardinal (*cardinal number*), yaitu yang berhubungan dengan bilangan cacah (*whole numbers*), yang didefinisikan sebagai gabungan bilangan asli (*natural numbers*) dengan bilangan 0 (nol), bilangan asli itu sendiri adalah himpunan A = {1, 2, 3, ...} (Wheeler, 1973: 81-83). Jadi bilangan cacah dapat didefinisikan sebagai himpunan C = {0, 1, 2, 3, …}.

B. Operasi Hitung Bilangan Cacah Dan Sifat-Sifatnya

Operasi hitung yang akan dibahas adalah penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Penjelasannya sebagai berikut:

1. Sifat-sifat Penjumlahan
   a. Tertutup
   Bentuk sifat tertutup dalam penjumlahan bilangan cacah adalah setiap jumlah (hasil penjumlahan) selalu menghasilkan bilangan cacah pula. Seperti 2 + 3 = 5, bilangan 5 termasuk bilangan cacah.
   b. Komutatif
   Bentuk sifat komutatif (sifat pertukaran) dalam penjumlahan bilangan cacah selalu menunjuk untuk setiap bilangan cacah a dan b, berlaku a + b = b + a. Seperti 2 + 4 = 4 + 2, 3 + 6 = 6 + 3 dan lain-lain.
   c. Assosiatif
   Bentuk sifat assosiatif (sifat pengelompokkan) dalam penjumlahan bilangan cacah selalu menunjuk untuk setiap bialangan cacah a, b dan c, berlaku: (a + b) + c = a + (b + c). Seperti (2 + 4) + 5 = 2 + (4 + 5) dan lain-lain
   d. Sifat Penjumlahan dengan bilangan 0 (nol)
   Setiap bilangan cacah bila dijumlahkan dengan bilangan nol selalu menunjuk kepada bilangan itu sendiri, dengan sifat a + 0 = a. Seperti 5 + 0 = 5, 7 + 0 = 7 dan lain-lain.

Penggunaan sifat-sifat tersebut dalam pemecahan masalah hanyalah untuk menyederhanakan pengerjaan operai hitung, sehingga dapat lebih cepat terselesaikan.

Contoh 7.1:

1) Pada hari Senin Ina membeli kue sebanyak dua kali, yang pertama membeli lima bungkus kue dan yang kedua membeli 8 bungkus kue. Berapa bungkus kue yang dibeli Ina pada hari senin tersebut?
   Jawab:
   5 bungkus kue + 8 bungkus kue = … bungkus kue, dengan menggunakan sifat komutatif soal tersebut di selesai dengan cara: 8 +5.
2) Pada hari raya Idul Fitri, Amin mendapat hadiah uang dari tiga orang saudaranya, yaitu masing-masing sebesarnya 57 ribu rupiah, 25 ribu rupiah dan 75 ribu rupiah. Berapakah jumlah hadiah yang diterima Amin seluruhnya?
   Jawab:
   57 ribu rupiah + 25 ribu rupiah + 75 ribu rupiah = ….. ribu rupiah.
   Dengan menggunakan sifat assosiatif soal tersebut diselesaikan dengan cara: 57 + (25 + 75)

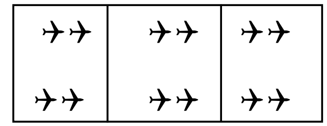
2. Perkalian

Pemahaman konsep perkalian dapat diilustrasikan sebagai pemasangan silang antara dua himpunan, yaitu: Jika a dan b bilangan cacah, A dan B adalah himpunan yang terhingga sedemikian hingga n(A) = a dan n(B) = b, maka $a \times b = n(A \times B)$. Misalkan perkumpulan bulu tangkis mempunyai pemain putra sebanyak 3 orang, yaitu: Rudi, Candra, dan Gunawan, serta mempunyai 2 orang pemain putri, yaitu: Susi dan Yeni. Jika akan diturunkan bermain dalam pasangan ganda campuran, maka pasangan yang mungkin terjadi adalah: (1) Rudi dan Susi; (2) Rudi dan Yeni; (3) Candra dan Susi; (4) Candra dan Yeni; (5) Gunawan dan Susi; dan (6) Gunawan dan Yeni. Jadi banyaknya pasangan atau kombinasi yang mungkin terjadi adalah 6 pasang. Banyaknya pasangan tersebut didapat dari pemasangan silang dua anggota himpunan atau didapat dari perkalian bilangan 3 dan bilangan 2.

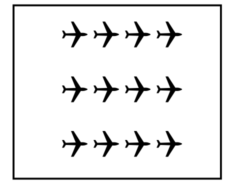
Perkalian dapat pula dinyatakan sebagai penjumlahan berulang, dengan definisi: Jika a dan b bilangan cacah, maka $a \times b = b + b + b + ... + b$ atau $a \times b$ adalah penjumlahan berulang yang mempunyai a suku dan tiap-tiap suku adalah b.

Contoh 7.2:

Perkalian 3×4 dapat diperagakan sebagai berikut:



atau dengan jajaran yang terdiri dari 3 baris masing-masing dengan 4 anggota (pesawat) seperti gambar berikut:



Definisi lain dalam hal perkalian dapat digunakan dengan pendekatan kelipatan suatu bilangan, seperti terlihat pada tabel berikut ini.

Tabel 8.1 Kelipatan suatu bilangan

Kelipatan	Kelipatan ke …									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Penggunaan kelipatan pada proses perkalian misalnya 2×4, yaitu mencari kelipatan 4 pada langkah ke dua (pada tabel di atas adalah 8, karena pada kelipatan 4 kita temukan: 4, 8, ...).

Sifat Operasi Hitung Perkalian

1) Sifat Tertutup
   Sifat tertutup dalam perkalian bilangan cacah maksudnya ialah, jika ada dua bilangan cacah atau lebih diperkalikan, maka hasilnya bilangan cacah pula (tidak keluar dalam konteks bilangan cacah).
   Misalnya: $2 \times 4 = 8$, $3 \times 7 = 21$ dan lain lain, 8 dan 21 adalah anggota bilangan cacah.
2) Sifat Pertukaran (*Commutative*)
   Sifat pertukaran (komutatif) didefinisikan: Untuk semua bilangan cacah a dan b berlaku $a \times b = b \times a$.
   Untuk bukti secara umum, dapat diambil himpunan A dan B sedemikian hingga n(A) = a, n(B) = b. Karena $A \times B = B \times A$ maka,

n (A × B) = n (B × A) atau a × b = n (A × B) = n (B × A) = b × a.
Misalkan 3 × 4 = 4 × 3 = 12. Karena 4 + 4 + 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12

3) Sifat Pengelompokan (*Assosiative*)
Untuk mengalikan tiga bilangan cacah, misalnya 2 × 3 × 4, dapat digunakan pengelompokan yang berbeda, yaitu:
2 × 3 × 4 = (2 × 3) × 4 = 6 × 4 = 24 atau,
2 × 3 × 4 = 2 × (3 × 4) = 2 × 12 = 24
Dengan demikian didapat (2 x 3) x 4 = 2 x (3 x 4). Dari contoh tersebut nampak adanya sifat asosiatif dalam perkalian.

4) Elemen Identitas dan Sifat Perkalian degan Bilangan 0 (nol)
Bilangan 1 (satu) adalah elemen identitas perkalian sehingga untuk setiap bilangan cacah a berlaku 1.a = a dan a.1 = a. Sedangkan untuk bilangan 0 (nol) berlaku 0. a = 0 dan a.0 = 0

Contoh 7.3:

4 × 1 = 4 ; 6 × 1 = 6 ; 1 × 8 = 8 ; 1 × 10 = 10 ; dsb.
4 × 0 = 0 ; 2 × 0 = 0 ; 5 × 0 = 0 ; 0 × 10 = 0; dsb.

5) Sifat Penyebaran (*Distributive*) Perkalian terhadap Penjumlahan
Untuk setiap bilangan cacah a, b, dan c berlaku:
a × (b + c) = (a × b) + (a × c) dan (b + c) × a = (b × a) + (c × a).

Contoh 7.4:

7 × 13 = 7 × (10 + 3) = (7 × 10) + (7 × 3)
8 × 13 = 8 × (10 + 3) = (8 × 10) + (8 × 3)
63 × 4 = (60 + 3) × 4 = (60 × 4) + (3 × 4) = 240 + 14 = 254
34 × 21 = (34 × 20) + (34 × 1) = 680 + 34 = 714

Sifat-sifat tersebut di atas fungsinya untuk mempermudah penyelesaian suatu soal, seperti contoh soal berikut:

87 × 34 = 34 × 87 (sifat komutatif)
= (30 + 4) × (80 + 7) (sifat distributif)
= 30 × (80+7) + 4 × (80+7) (sifat distributif)
= (30 × 80) + (30 × 7) + (4 × 80) + (4 × 7) (sifat distributif)
= 2400 + 210 + 320 + 28
= 2400 + 530 + 28
= 2400 + 558
= 2958

Contoh 7.5:

1. Pak Ahmad membagikan uang sodaqoh kepada sejumlah fakir miskin sebanyak Rp. 50.000,00, masing-masing medapatkan Rp. 12.500,00. Berapakah jumlah pakir miskin yang diberi uang oleh Pak Ahmad?
Jawab:
Misalkan jumlah orang fakir miskin adalah p.
Rp. 50.000,00 : p = Rp 12.500,00 atau ditulis $\frac{50000}{p} = 12500$
12.500 p = 50.000
$p = \frac{50000}{12500} \rightarrow p = 4$
Jadi banyaknya pakir miskin yang dibagi uang sebanyak 4 orang

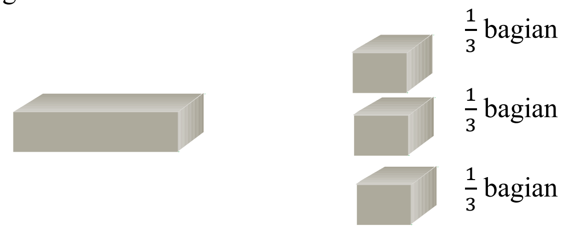
LATIHAN SOAL

1. Apa yang dimaksud dengan bilangan cacah!
2. Selesaikan soal berikut dengan menggunakan sifat komutatif atau asosiatif.
   a. 5 + 12 = … d. 15 x 5 = ….
   b. 3 + 5 + 12 = …. e. 12 x 6 x 10 = …
   c. 10 + 5 + 10 + 3 = … f. 35 x 8 = …
3. Jika penduduk kelurahan berjumlah berjumlah 1500 Kepala Keluarga (KK), dan setiap KK membuang sampah setiap harinya sebanyak 2 kg. Berapa kg banyaknya sampah yang terkumpul setelah 4 minggu?
4. Amin mengadakan perjalanan dari kota A ke kota B yang berjarak 60 km dengan menaiki sepeda. Di perjalanan Amir istirahat setiap 12 km. Berapa kali istiharahat yang dilakukan Amir selama perjalan sebelum sampai tujuan?
5. Nina mempunyai karet gelang yang diikat dalam 25-an, ia mempunyai sebanyak 30 ikat. Berapakah karet gelang yang dipunyai Nina? Pedagang “air mineral gelas” setiap harinya laku terjual sebanyak 2 dus. Modal yang ia keluarkan untuk stiap dusnya Rp. 11.000,00. Berakah keuntungan yang diperoleh selama seminggu, jika harga eceran pergolas Rp 500,00 ?
6. Pak Rudi mempunyai dua bidang tanah. Masing-massing luas nya 60.000 m^2. ia mnyumbangkan tanah tersebut seluas 10.000 m^2 untuk tempat ibadah dan sisanya ia bagi rata kepada 2 orang anaknya. Luas tanah yang diterima tiap anak adalah...
7. Hasil dari 124 + 125 : 5 × 16 adalah ...
8. -36 : 4 + (-7) × (-3) = ...
9. Ibu mempunyai persediaan mentega sebangayak 2/3 kg. Karena adik ingin roti buatan ibu, maka ibu membuatkan dengan menggunakana 1/3 kg mentega. Supaya tidak kehabisan mentega, ibu membeli lagi ½ kg untuk persediaan. Berapa kg mentega yang dimiliki ibu sekarang?
10. Untuk membuat celana panjang diperlukan 1 ¼ meter kain. Sedangkan untuk membuat kemeja lengan pendek diperlukan kain sebanyak 1 ½ meter. Berapa meter kain yang diperlukan untuk membuat 2 celana panjang dan 3 kemeja lengan pendek?

BAB VIII
PEMECAHAN MASALAH PADA PECAHAN

A. Pengertian Bilangan Pecahan

Bilangan pecahan adalah nilai bilangan antara dua bilangan bulat yang ditulis $\frac{a}{b}, b \neq 0$, a disebut pembilang dan b disebut penyebut. Perhatikan gambar berikut!



Gambar 8.1 Contoh bilangan pecahan

Pecahan negatif diperoleh ketika pembilang atau penyebutnya merupakan bilangan bulat negatif.

Contoh 8.1:

1. $\frac{-1}{2}$ ditulis $-\frac{1}{2}$
2. $\frac{3}{-4}$ ditulis $-\frac{3}{4}$

B. Jenis Bilangan Pecahan

1. Pecahan Biasa

Ada banyak nama untuk bilangan seperenam, di antaranya adalah: $\frac{2}{12}, \frac{3}{18}, \frac{4}{24}, \frac{5}{30}$, dan sebagainya. Nama-nama seperti itu disebut nama biasa atau nama pecahan biasa.

2. Pecahan Campuran

Pecahan yang memiliki campuran nama bilangan bulat dan nama pecahan biasa disebut *pecahan campuran.* $a\,\frac{b}{c}$ merupakan pecahan campuran karena memiliki nama bilangan bulat yaitu a dan nama pecahan biasa yaitu $\frac{b}{c}$. Pecahan campuran $a\,\frac{b}{c}$ dengan $c \neq 0$ dapat dinyatakan pula dengan pecahan biasa $\frac{(c\times a)+b}{c}$.

3. Pecahan Desimal
   Pecahan dengan menggunakan nama desimal disebut *pecahan desimal*.

Contoh 8.2:

$\frac{1}{2}$ nama desimalnya 0,5 dan $\frac{3}{4}$ nama desimalnya 0,75.

4. Persen
   Persen mengandung arti perseratus, dilambangkan "**%**". Persen adalah nama lain dari suatu pecahan dengan penyebut 100.

Contoh 8.3:

25 persen ditulis 25% atau dapat pula dinyatakan $\frac{25}{100}$. Untuk setiap pecahan $\frac{a}{b}$ dengan b ≠ 0 dapat dinyatakan dalam bentuk persen menjadi: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times 100\%$.

5. Permil
   Permil mengandung arti perseribu, dilambangkan "‰". Permil adalah nama lain dari suatu pecahan dengan penyebut 1000.

Contoh 8.4:

25 permil ditulis 25‰ atau dapat pula dinyatakan $\frac{25}{1000}$. Untuk setiap pecahan $\frac{a}{b}$ dengan $b \neq 0$ dapat dinyatakan dalam bentuk permil menjadi:
$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times 1000\%$.

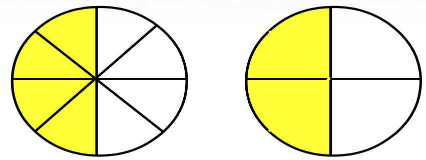
6. Pecahan Murni Dan Pecahan Tidak Murni
   Dengan memperhatikan pembilang dan penyebutnya, suatu bilangan pecahan dapat kita golongkan ke dalam pecahan murni dan pecahan tidak murni. Pecahan $\frac{a}{b}$ kita sebut pecahan murni, apabila nilai *a* selalu lebih kecil daripada nilai *b*. Contoh: $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}$ Sedangkan pecahan $\frac{a}{b}$ kita sebut pecahan tidak murni, apabila nilai *a* selalu lebih besar daripada nilai *b*.

Contoh 8.5:

$\frac{52}{91}, \frac{9}{5}, \frac{10}{6}$. Khusus untuk pecahan tidak murni dapat kita nyatakan dalam bentuk pecahan campuran.

C. Pecahan Senilai

Perhatikan gambar berikut!



Gambar 8.2 pecahan pada lingkaran

Gambar di atas menunjukkan dua lingkaran yang sama, tetapi gambar (i) dibagi menjadi 8 bagian, sehingga daerah yang diarsir menunjukan pecahan $\frac{4}{8}$ dan gambar (ii) dibagi menjadi 4 bagian, sehingga daerah yang diarsir menunjukan pecahan $\frac{2}{4}$. Karena pada kedua gambar tersebut daerah arsirannya sama besar, maka pecahan $\frac{4}{8}$ dan $\frac{2}{4}$ memiliki nilai yang sama. Dapat kita katakan bahwa $\frac{4}{8}$ senilai dengan $\frac{2}{4}$.

Kemudian, jika kita mengamati lebih lanjut, ternyata $\frac{4}{8}$ dan $\frac{2}{4}$ memiliki hubungan, yaitu kita dapat memperoleh $\frac{2}{4}$ dari pecahan $\frac{4}{8}$ dengan cara membagi pembilang dan penyebutnya dengan bilangan 2 $\left(\frac{4}{8} = \frac{4:2}{8:2} = \frac{2}{4}\right)$. Begitu juga sebaliknya kita dapat memperoleh $\frac{4}{8}$ dari pecahan $\frac{2}{4}$, yaitu dengan cara mengalikan pembilang dan penyebutnya dengan bilangan 2 $\left(\frac{2}{4} = \frac{2 \times 2}{4 \times 2} = \frac{4}{8}\right)$.

Dari uraian di atas kita dapat menyimpulkan bahwa untuk mendapatkan pecahan senilai dari suatu pecahan dapat kita lakukan dengan membagi atau mengalikan pembilang dan penyebutnya dengan angka yang sama.

D. Membandingkan Dua Pecahan

Untuk dapat membandingkan dua pecahan, ada tiga hal penting yang harus kamu perhatikan, yaitu:

1. $\frac{a}{b}$ lebih dari $\frac{p}{r}$, ditulis $\frac{a}{b} > \frac{p}{r}$.
2. $\frac{a}{b}$ sama dengan $\frac{p}{r}$, ditulis $\frac{a}{b} = \frac{p}{r}$.
3. $\frac{a}{b}$ kurang dari $\frac{p}{r}$, ditulis $\frac{a}{b} < \frac{p}{r}$.

Contoh 8.6:

Apakah hubungan antara $\frac{1}{8}$ dan $\frac{1}{10}$? Apakah $\frac{1}{8}$ lebih dari $\frac{1}{10}$ atau sebaliknya $\frac{1}{8}$ kurang dari $\frac{1}{10}$?

Jawaban:

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menyamakan dahulu penyebut pada kedua pecahan tersebut dengan cara mencari KPK dari 8 dan 10. Setelah kita mengetahui bahwa KPK dari 8 dan 10 adalah 40, selanjutnya $\frac{1}{8} \ldots . \frac{1}{10}$ berubah menjadi $\frac{5}{40} \ldots \frac{4}{40}$ Langkah terakhir, kita tinggal melihat bilangan yang terdapat pada pembilang, yaitu bilangan 4 dan 5. Karena bilangan 5 lebih besar nilainya dari bilangan 4, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $\frac{5}{40} > \frac{4}{40}$. Dan hal itu berarti bahwa $\frac{1}{8} > \frac{1}{10}$

E. Mengubah Bentuk Pecahan Ke Bentuk Desimal

Dalam menyelesaikan pengubahan bentuk pecahan biasa ke pecahan desimal, kamu harus selalu mengubah dulu penyebut agar merupakan bilangan perpangkatan 10, yaitu 10, 100, 1000, dan seterusnya.

Contoh 8.7:

$\frac{35}{100} = 0{,}35\ \frac{3}{4} = \frac{3\times25}{4\times25} = \frac{75}{100} = 0{,}75\ \frac{3}{8} = \frac{3\times125}{8\times125} = \frac{375}{1000} = 0{,}375$

Untuk mengubah dari bentuk pecahan desimal ke bentuk pecahan biasa dapat dilakukan dengan cara berikut.

$$0{,}75 = (7 \times \frac{1}{10}) + (5 \times \frac{1}{100}) = \frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{70}{100} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100}$$

F. Mengubah Bentuk Pecahan Ke Bentuk Persen

Perhatikan beberapa contoh berikut.

1. $\frac{1}{2} = \frac{1\times50}{2\times50} = \frac{50}{100} = 50\%$
2. $75\% = 75 \times \frac{1}{100} = \frac{75}{100} = \frac{75:25}{100:25} = \frac{3}{4}$

G. Mengubah Bentuk Pecahan Ke Bentuk Permil

Perhatikan beberapa contoh berikut.

1. $\frac{7}{20} = \frac{7\times50}{20\times50} = \frac{350}{1000} = 350\, {}^{0}/_{00}$
2. $75\, {}^{0}/_{00} = 75 \times \frac{1}{1000} = \frac{75}{1000} = \frac{75:25}{1000:25} = \frac{3}{40}$

H. Mengubah Bentuk Pecahan Ke Bentuk Pecahan Campuran

Perhatikan beberapa contoh berikut.

1. $\frac{19}{5} = \frac{15}{5} + \frac{4}{5} = 3 + \frac{4}{5} = 3\frac{4}{5}$
2. $2\frac{7}{6} = \frac{(6\times2)+7}{6} = \frac{12+7}{6} = \frac{19}{6}$

I. Operasi Pada Bilangan Pecahan

1. Penjumlahan Pecahan

Dalam operasi penjumlahan ada dua hal penting yang harus diperhatikan. *Pertama*, ketika kamu akan menjumlahkan pecahan dengan penyebutnya yang telah sama, maka kamu dapat secara langsung menjumlahkan pembilang-pembilangnya saja.

Contoh 8.8:

$$\frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{2+6}{5} = \frac{8}{5}$$

Kedua, ketika kamu akan menjumlahkan pecahan dengan penyebutnya yang tidak sama, maka kamu harus mengubah dulu pecahan tersebut sehingga penyebutnya yang baru merupakan kelipatan persekutuan terkecil dari penyebut-penyebut semula.

Contoh 8.9:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2\times5}{3\times5} + \frac{4\times3}{5\times3} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$$

Agar lebih mudahnya, perhatikan formula berikut ini:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

Sifat Penjumlahan Pada Pecahan

a. Sifat Komutatif Penjumlahan

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}$$

b. Sifat Asosiatif Penjumlahan

$$(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}) + \frac{d}{b} = \frac{a}{b} + (\frac{c}{b} + \frac{d}{b})$$

2. Pengurangan Pada Pecahan

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-cb}{bd}$$

Contoh 8.10:

a. $\frac{5}{8}-\frac{4}{8}=\frac{1}{8}$

b. $\frac{3}{7}-\frac{2}{8}=\frac{3\times8}{7\times8}-\frac{2\times7}{7\times8}=\frac{24}{56}-\frac{14}{56}=\frac{10}{56}$

3. Perkalian Pecahan

Pada operasi perkalian pecahan berlaku pengerjaan-pengerjaan seperti berikut ini.

a) $a\times\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$ **Contoh 11**: $2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

b) $\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}=\frac{1}{a\times b}=\frac{1}{ab}$ **Contoh 12**: $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

c) $\frac{p}{a}\times\frac{q}{b}=\frac{p\times q}{a\times b}$ **Contoh 13**: $\frac{2}{5}\times\frac{1}{12}=\frac{2\times1}{5\times12}=\frac{2}{60}$

Sifat Operasi Perkalian Pada Pecahan

a. Sifat Komutatif Perkalian

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}$

b. Sifat Asosiatif Perkalian

$(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d})\times\frac{p}{q}=\frac{a}{b}\times(\frac{c}{d}\times\frac{p}{q})$

c. Sifat Distributif Perkalian terhadap Penjumlahan

$\frac{a}{b}\times(\frac{c}{d}+\frac{p}{d})=(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d})+(\frac{a}{b}\times\frac{p}{d})$

d. Sifat Distributif Perkalian terhadap Pengurangan

$\frac{a}{b}\times(\frac{c}{d}-\frac{p}{d})=(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d})-(\frac{a}{b}\times\frac{p}{d})$

e. Sifat Perkalian Pecahan dengan Bilangan 1

$\frac{a}{b}\times 1=\frac{a}{b}$

f. Sifat Perkalian Pecahan dengan Bilangan 0

$\frac{a}{b}\times 0=0\times\frac{a}{b}=0$

g. Sifat Urutan Pecahan

$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad>cb$

4. Pembagian Pecahan

Dalam operasi pembagian pecahan, sembarang $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ dengan $b\neq 0$ dan $d\neq 0$ berlaku:

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}}{\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}}=\frac{\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}}{1}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$, $\frac{d}{c}$ adalah kebalikan dari $\frac{c}{d}$

Contoh 8.11:

$\frac{3}{7}:\frac{5}{2}=\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{35}$

5. Pemangkatan Pecahan

$(\frac{a}{b})^n=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\ldots\times\frac{a}{b}$, $b\neq 0$, $n\in$ **bulat positif.**

Sifat-Sifat Pemangkatan Pecahan:

3. $(\frac{a}{b})^m\times(\frac{a}{b})^n=(\frac{a}{b})^{m+n}$

4. 2. $(\frac{a}{b})^m:(\frac{a}{b})^n=(\frac{a}{b})^{m-n}$

Contoh 8.12:

Hitunglah hasil dari $(\frac{2}{3})^2\times(\frac{2}{3})^4$!

Penyelesaian : $(\frac{2}{3})^2\times(\frac{2}{3})^4=(\frac{2}{3})^{2+4}=(\frac{2}{3})^6$

Contoh 8.13:

Hitunglah hasil dari $(\frac{2}{3})^4:(\frac{2}{3})^2$!

Penyelesaian : $(\frac{2}{3})^4:(\frac{2}{3})^2=(\frac{2}{3})^{4-2}=(\frac{2}{3})^2$

3. $[(\frac{a}{b})^m]^n=(\frac{a}{b})^{m\times n}$

Contoh 8.14:

Hitunglah hasil dari $((\frac{2}{3})^2)^4$!

Penyelesaian : $[(\frac{2}{3})^2]^4=(\frac{2}{3})^{2\times4}=(\frac{2}{3})^8$

LATIHAN SOAL

1. Riana dan Ira ingin mengecat pagar. Riana dapat menyelesaikan pengecatan pagar oleh dirinya sendiri dalam waktu 3 jam, sedangkan Ira menyelesaikannya dalam 4 jam. Pukul 12.00 siang mereka mulai mengecat pagar bersama-sama. Akan tetapi pada suatu waktu mereka bertengkar. Mereka bertengkar selama 10 menit dan dalam masa itu tidak satu pun yang melakukan pengecatan. Setelah pertengkaran tersebut, Ira pergi dan Riana menyelesaikan pengecatan pagar sendirian. Jika Riana menyelesaikan pengecatan pukul 14.25, pada pukul berapakah pertengkaran dimulai?
   A. 12.30 B. 13.00 C. 13.30 D. 13.45 E. 14.00
2. Misalkan:
   $a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \ldots + \frac{1001^2}{2001}$ dan $b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \ldots + \frac{1001^2}{2003}$
   Tentukan bilangan bulat yang nilainya paling dekat ke $a - b$.
   A. 499 C. 501 E. 503
   B. 500 D. 502
3. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+3}\right) = \ldots$
   A. $\frac{1}{n+3}$ C. $\frac{3(n+2)}{n+3}$ E. $\frac{4}{(n+2)(n+3)}$
   B. $\frac{3}{n+3}$ D. $\frac{4(n+2)}{n+3}$
4. Misalkan m dan n bilangan bulat positif yang memenuhi $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{4}{7}$, berapakah $m^2 + n^2$?
   A. 600 C. 400 E. 100
   B. 576 D. 200
5. Jarak sebuah bintang dari bumi adalah 375 juta km. Nyatakan jarak tersebut ke dalam bentuk baku!
   A. 375×10^6 km C. $37{,}5 \times 10^7$ km E. $3{,}75 \times 10^8$ km
   B. $3{,}75 \times 10^6$ km D. $37{,}5 \times 10^8$ km
6. Urutan pecahan terkecil ke pecahan terbesar dari 0,45; 0,85; 7/8; 78% adalah
   A. 0,45; 78%; 7/8; 0,85 C. 0,85; 7/8; 78%; 0,45
   B. 0,45; 78%; 0,85; 7/8 D. 7/8; 0,85; 78%; 0,45
7. Pak Doni mempunyai lahan yang luasnya 2½ ha. Kemudian membeli tanah disebelahnya 3 2/3 ha. Jika 4¼ ha lahan digunakan untuk pertaniah dan sisanya untuk peternakan, maka luas lahan peternakan adalah ...
   A. 1 5/12 ha C. 1 9/12 ha
   B. 1 7/12 ha D. 1 11/12 ha
8. Bentuk sederhana dari pecahan 18/24 adalah ...
   A. ¼ B. ½ C. ¾ D. 1
9. $\frac{5}{6} \times 7 - \frac{12}{36} + \frac{10}{12} = \cdots$
   A. 4 1/9 C. 4 6/35
   B. 144/36 D. 148/12
10. $1\frac{1}{2} + 3\frac{7}{8} - 1\frac{12}{24} = \cdots$
    A. $2\frac{17}{8}$ B. $3\frac{21}{24}$ C. $4\frac{1}{24}$ D. $3\frac{12}{24}$

BAB IX
PEMECAHAN MASALAH PADA PERBANDINGAN

A. Pengertian Perbandingan

Ajang F-1 merupakan salah satu olah raga yang paling digemari oleh sebagian besar masyarakat olah raga dunia. Siapa yang tidak kenal dengan nama besar Michael Schumacher dan Fernando Alonso yang namanya kian melambung setelah dirinya mampu menjuarai F-1 dalam usia yang masih sangat muda dalam catatan sejarah F-1. Michael Schumacher telah menjadi juara dunia sebanyak lima kali, sedangkan Fernando Alonso baru sekali merengkuh gelar juara dunia F-1. Dari informasi tersebut kita dapat membandingkan gelar juara yang pernah diraih oleh Michael Schumacher dan Fernando Alonso sebagai berikut.

1. Michael Schumacher menjadi juara dunia F-1 empat kali lebih banyak dibanding raihan gelar juara yang pernah diraih Fernando Alonso. Dalam contoh ini, kita membandingkan raihan gelar juara kedua pembalap F-1 dengan *menentukan selisihnya*, yaitu 5 – 1 = 4.
2. Michael Schumacher menjadi juara dunia F-1 lima kali dari yang pernah dicapai Fernando Alonso. Dalam contoh ini, kita membandingkan pencapaian juara dunia yang telah diraih oleh kedua pembalap dengan menentukan *hasil baginya*, yaitu $\frac{5}{1}$ atau ditulis $5:1$.

Apa yang dapat Anda simpulkan sementara ini?

Perbandingan adalah pembagian antara dua satuan yang sama. Contoh: Kita memiliki kemeja A dan dasi A, serta kemeja B dan dasi B. Ketika kita ingin membandingkan kedua benda tersebut dengan tepat, benda mana saja yang dapat kita bandingkan? Apakah kemeja A akan kita bandingkan dengan dasi B atau sebaliknya dasi B kita bandingkan dengan kemeja A untuk melihat dasi dan kemeja mana yang lebih mahal harganya? Yang tepat, kita akan dapat membandingkan dasi atau kemeja mana yang lebih mahal jika kita membandingkan kemeja A dengan kemeja B, serta dasi A dan dasi B untuk melihat mana yang lebih mahal di antara keduanya.

Perbandingan dapat dinyatakan dalam $\frac{a}{b}$ atau $a:b$, dan dibaca a berbanding b, $b \neq 0$. Adapun syarat sebuah perbandingan adalah:

1. Satuan-satuan yang diperbandingkannya sejenis.
2. Perbandingannya dibuat dalam bentuk pecahan yang paling sederhana dan dinyatakan dengan bilangan bulat positif.
3. Perbandingan dapat disederhanakan bentuknya tanpa menggunakan satuan.

Contoh 9.1:

Umur ayah adalah 40 tahun dan umur ibu adalah 35 tahun. Ayah dan ibu memiliki seorang anak yang masih duduk di bangku SMU dengan umur 17 tahun.

a. Berapa perbandingan umur ayah terhadap umur ibu?
b. Berapa perbandingan umur ayah terhadap anaknya yang masih duduk di bangku SMU?
c. Berapa perbandingan umur ibu terhadap anak tersebut?

Jawaban:

Ingat, syarat sebuah perbandingan adalah satuan atau besaran yang dibandingkannya harus sejenis. Dalam contoh ini satuan/besaran yang akan kita bandingkan adalah besaran yang sejenis, yaitu besaran umur.

a. umur ayah : umur ibu = 40 : 35, ditulis $\frac{40}{35} = \frac{8}{7}$.
b. umur ayah : umur anak = 40 : 17, ditulis $\frac{40}{17}$.
c. umur ibu : umur anak = 35 : 17, ditulis $\frac{35}{17}$.

Contoh 9.2:

Sederhanakanlah perbandingan-perbandingan berikut.

a. 20 : 45 = ….
b. $1\frac{4}{6} : 3\frac{2}{3} = \ldots$

Jawaban:

Perhatikan cara menyederhanakan perbandingan berikut ini.

a. $20:45 = \frac{20}{5} : \frac{45}{5} = 4:9$
b. $1\frac{4}{6} : 3\frac{2}{3} = \frac{10}{6} : \frac{11}{3} = \frac{10}{6} \times \frac{3}{11} = \frac{30}{66} = 5:11$

Contoh 9.3:

Jika kecepatan mobil A adalah 250 km/jam dan perbandingan antara kecepatan mobil A dan mobil B adalah 5 : 6. Berapa kecepatan mobil B?

Jawaban:

Kecepatan mobil A : kecepatan mobil B = 5 : 6, jika kecepatan mobil A adalah 250 km/jam, maka kecepatan mobil B adalah,

$$\frac{\text{kecepatan mobil A}}{\text{kecepatan mobil B}} = \frac{5}{6}$$

$$5 \times \text{kecepatan mobil } \rightleftarrows B = 6 \times \text{kecepatan mobil A}$$

$$\text{kecepatan mobil B} = \frac{6}{5} \times \text{kecepatan mobil A}$$

$$\text{kecepatan mobil B} = \frac{6}{5} \times 250 = 300$$

Jadi, kecepatan mobil B adalah 300 km/jam.

B. Perbandingan Senilai

Agar Anda dapat memahami mengenai konsep perbandingan senilai, perhatikan tabel berikut ini.

Tabel 9.1 Contoh perbandingan senilai

Banyak jam tangan	Harga (Rp)	Keterangan
1	15.000	Baris ke-1
2	30.000	Baris ke-2
3	45.000	Baris ke-3
4	60.000	Baris ke-4
5	75.000	Baris ke-5
A	B	Baris ke-6

Jika kita perhatikan tabel tersebut, maka kita dapat melihat bahwa besar harga untuk satu buah jam tangan dalam setiap baris adalah:

$$\frac{15.000}{1} = \frac{30.000}{2} = \frac{45.000}{3} = \frac{60.000}{4} = \frac{75.000}{5} = \frac{A}{B} = 15.000$$

Contoh di atas merupakan penjelasan mengenai konsep perbandingan senilai, yaitu perbandingan harga jam tangan yang jika jumlah jam tangannya terus bertambah, maka harganya pun terus bertambah pula.

Ada dua cara untuk menghitung perbandingan senilai, yaitu:

1. **Berdasarkan Nilai Satuan**

Contoh 9.4:

Harga 3 buah komik Rp.45.000,00. Berapa harga 6 buah komik?

Jawaban:

Untuk dapat mengetahui berapa harga 6 buah komik, kita harus mengetahui terlebih dahulu harga satuan sebuah komik. Informasi apa yang dapat kita jadikan modal untuk dapat menjawab soal itu? Perhatikan kalimat pertama pada soal, *Harga 3 buah komik Rp.45.000,00.* Informasi itu sangat membantu kita agar dapat menjawab permasalahan yang diajukan. Kalau harga 3 buah komik Rp.45.000,00, berapa harga sebuah komik?

Harga 1 buah komik = $\frac{45.000}{3} = 15.000$

Setelah kita mengetahui bahwa harga 1 komik Rp.15.000,00, maka kita dapat mencari harga 6 buah komik sebagai berikut.

Harga 6 buah komik = 6 ×harga 1 buah komik = $6 \times 15.000 = 90.000$

Jadi, harga 6 buah komik adalah Rp.90.000,00.-

2. **Berdasarkan Perbandingan**

Cara kedua untuk menghitung perbandingan senilai adalah dengan cara perbandingan. Kita akan mencoba menyelesaikan permasalahan pada contoh soal di atas dengan cara perbandingan sebagai berikut.

Banyak komik	**Harga (Rp)**
3	45.000
6	x

Perbandingan harga komik dan harganya dapat ditulis dalam bentuk 3 : 6 = 45.000 : x.

Dalam bentuk yang lain dapat ditulis, $\frac{3}{6} = \frac{45.000}{x}$ dan dapat diselesaikan menjadi:

$$3 \times x = 6 \times 45.000$$

$$x = \frac{6}{3} \times 45.000$$

$$x = 90.000$$

Jadi, ternyata jawabannya sama dengan cara menghitung perbandingan berdasarkan nilai satuan, yaitu Rp.90.000,00.

C. Perbandingan Berbalik Nilai

Perhatikan tabel berikut ini.

Tabel 9.2 Perbandingan waktu dan kecepatan

Kecepatan ($^{m}/_{detik}$)	Waktu (detik)	Keterangan
50	60	Baris ke-1
100	30	Baris ke-2
200	15	Baris ke-3
300	10	Baris ke-4
600	5	Baris ke-5

Kalau kita perhatikan dengan seksama, semakin besar nilai yang terdapat pada kolom kecepatan, maka nilai waktu semakin kecil. Mari kita uraikan beberapa perbandingan pada tabel di atas.

Kita lihat perbandingan pada baris 1 dan 2. Jika kecepatan dikali 2 (50$^{m}/_{detik}$ menjadi 100$^{m}/_{detik}$), maka waktu dibagi 2 atau dikali $\frac{1}{2}$ (60 detik menjadi 30 detik).

1. Pada baris ke-3 dan ke-6, jika kecepatan dikali 3 (200 $^{m}/_{detik}$ menjadi 600$^{m}/_{detik}$), maka waktu dibagi 3 atau dikali $\frac{1}{3}$ (15 detik menjadi 5 detik).
2. Pada baris ke-4 dan ke-5, jika kecepatan dikali 2 (300 $^{m}/_{detik}$ menjadi 600 $^{m}/_{detik}$), maka waktu dibagi 2 atau dikali $\frac{1}{2}$ (10 detik menjadi 5 detik), dan seterusnya.

Pada tabel di atas, kita dapat melihat sebuah contoh mengenai konsep pebandingan berbalik nilai. Jika salah satu besaran nilainya bertambah, maka besaran lainnya yang diperbandingkan nilainya semakin berkurang.

D. Skala

Apakah kamu pernah menggambar peta? Apakah kita mengambarkan suatu wilayah pada peta dengan ukuran yang sebenarnya? Ternyata tidak, karena dalam menggambar sebuah peta menggunakan konsep perrbandingan senilai, di mana perbandingan antara jarak-jarak wilayah yang digambarkan dalam peta dan jarak yang sesungguhnya adalah sama. Dalam sebuah peta, kita sering menemukan istilah skala.

Skala adalah perbandingan antara ukuran gambar pada peta dan ukuran benda sesungguhnya. Apa artinya 1 : 2.500.000? Arti dari 1 : 2.500.000 yang terdapat pada peta adalah bahwa dalam setiap 1 cm pada gambar mewakili 2.500.000 cm pada ukuran sebenarnya.

Contoh 9.5:

Tentukan skala pada peta, jika jarak 2 cm pada peta mewakili jarak 5 km!

Jawaban:

Skala = ukuran gambar : ukuran sebenarnya
= 2 cm : 5 km
= 2 cm : 500.000 cm
= 1 : 250.000

Jadi, skala pada peta tersebut adalah 1 : 250.000.

Latihan Soal

1. Di suatu padang rumput, Syahda dan Ria melihat sekumpulan hewan ternak yang terdiri dari kambing dan ayam. Secara keseluruhan, Syahda melihat 13 ekor hewan. Sedangkan Ria melihat 38 kaki hewan. Berapa perbandingan jumlah kambing dan ayam yang ada di padang rumput tersebut?
2. Suatu gambar peta kota berskala 1 : 200. Tentukan jarak pada gambar peta kota tersebut jika jarak sebenarnya 8,5 km!
3. Sebuah bak mandi dapat terisi air penuh jika menggunakan 80 timba air dengan volume 12 liter. Berapa timba air yang diperlukan untuk mengisi bak mandi dengan volume 15 liter?
4. Suatu peta berskala 1 : 600.000. Berapakah jarak sebenarnya antara 2 kota jika jarak pada peta 18 mm?
5. Sebuah saluran air seharusnya dibuat dengan menggunakan pipa berdiameter 10 cm. Tetapi yang tesedia hanya pipa-pipa berdiameter 3 cm. agar kapasitas saluran tidak lebih kecil daripada yang diinginkan, berapa banyak pipa 3 cm yang perlu dipakai untuk mengganti satu pipa 10 cm.
6. Suatu peta berskala 1 : 1.200.000. Jika jarak sebenarnya antara 2 kota adalah 30 km, berapakah jarak pada peta?
7. Ayah membagikan uang sejumlah Rp. 360.000 kepada Andi dan Syifa dengan perbandingan 3 : 6. Tentukan jumlah uang yang diterima masing-masing oleh Andi dan Syifa!
8. Sebuah mobil balap menempuh 60 km dalam waktu 30 menit. Berapa jam waktu yang diperlukan mobil tersebut untuk menempuh jarak 180 km?
9. Ayah Budi hendak membangun sebuah rumah yang dikerjakan oleh 15 pekerja dengan waktu selesai dalam 60 hari. Jika pekerjaan tersebut dilakukan oleh 30 pekerja, perkiraan dalam berapa hari pekerjaan tersebut akan selesai?
10. Andi menyediakan satu kantong plastik makanan untuk ikannya yang berjumlah 5 ekor yang habis dalam waktu 15 hari. Jika ikan Andi sekarang berjumlah 30 ekor, perkirakan berapa hari satu kantong plastik makanan yang disediakan oleh Andi akan habis.

BAB X
PEMECAHAN MASALAH PADA PELUANG

Peluang (*probability*) merupakan suatu kajian khusus matematika yang menjadi dasar untuk mempelajari statistika pada tahap yang lebih lanjut. Adapun untuk mempelajari peluang itu sendiri, diperlukan pemahaman yang matang mengenai permutasi dan kombinasi. Meskipun demikian, kajian mengenai permutasi dan kombinasi juga merupakan dasar untuk mempelajari matematika diskret yang memiliki banyak peran dalam kehidupan karena penerapannya.

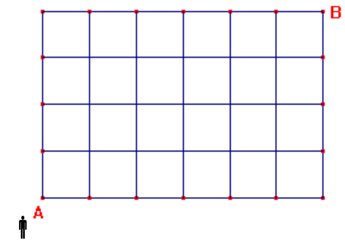
Pada bab ini akan dibahas konsep-konsep mengenai permutasi, kombinasi, dan peluang sebagai bekal atau persiapan untuk mempelajari pembahasan pada bab selanjutnya, yakni statistika.

A. Permutasi

Pernahkah Anda tersesat di jalanan?

Apakah Anda bingung, ada berapa banyak jalan terpendek dari A ke B? (lihat Gambar 11.1).

Atau, pernahkah Anda terlibat dalam kepanitiaan suatu kejuaraan di lingkungan sekitar Anda? Mungkin kejuaraan sepakbola, basket, volley, atau lainnya?



Gambar 10.1 Bagan pencarian jalan dari A ke B

Seringkali kita temui dalam kehidupan sehari-hari, berbagai persoalan yang menuntut kita untuk menyusun atau mengurutkan benda-benda. Seperti pada Gambar 11.1 di atas, seringkali kita kebingungan menentukan jalan mana yang harus ditempuh untuk segera sampai ke tempat tujuan karena begitu banyaknya pilihan jalan yang harus ditempuh. Atau andaikan saja Anda ditunjuk untuk menjadi panitia pertandingan volley pada peringatan HUT RI, yang lebih dikenal dengan istilah "Agustusan".

Andaikan saja dalam 1 kelurahan terdapat 8 RW, dan masing-masing RW mengirimkan 1 tim volley yang siap berlaga. Ini berarti terdaftar 8 tim yang akan segera dipertandingkan. Setiap 2 tim akan berhadapan 2 kali, sekali main *kandang*, dan sekali main *tandang*. Suatu persoalan yang muncul dan harus dijawab adalah, “Berapa kali pertandingan dalam kejuaraan ini?”

Untuk lebih memudahkan, 8 tim itu kita beri inisial: A, B, C, D. E, F, G, dan H. Sedangkan pasangan terurut AB berarti *pertandingan antara A dan B dikandang A*, dan BA berarti *pertandingan antara A dan B dikandang B*. Sehingga banyaknya pertandingan sama dengan banyaknya pasangan terurut kedelapan unsur (tim) tadi. Untuk menyelesaikan persoalan terakhir ini kita tetapkan lebih dahulu unsur pertama pasangan terurut itu. Dalam hal ini kita mempunyai 8 kemungkinan. Kemudian setelah unsur pertama kita tetapkan (dipilih) maka ada 7 unsur yang bisa kita ambil sebagai unsur kedua pasangan terurut itu. Jadi seluruhnya kita akan memperolch (8 × 7) = 56 pasangan terurut, sehingga terdapat 56 perlandingan dalam kejuaran tersebut. Untuk lebih jelasnya perhatikan diagram pada Gambar 11.2 di bawah ini.

Unsur pertama	Unsur kedua	Pasangan terurut	Banyak pasangan
A	B	AB	7
	C	AC	
	D	AD	
	E	AE	
	F	AF	
	G	AG	
	H	AH	
B	A	BA	7
	C	BC	
	D	BD	
	. . . .	. . . .	. . . .
	dan seterusnya.		

Banyak pasangan 8 × 7 = 56.

Gambar 10.2 Diagram pembagian pasangan

Terdapat 8 benda atau unsur, yaitu: A, B, C, D, E, F, G, dan H, dalam setiap pasangan hanya digunakan 2 unsur saja. Masing-masing pasangan ini disebut permutasi 2 dari 8 unsur tersebut. Banyaknya seluruh permutasi ini ditulis $P_{8,2}$ Jadi $P_{8,2} = 8 \times 7 = 56$, $P_{9,2} = 9 \text{ x } 8 = 72$. Kita dapat juga membuat susunan terdiri dari 3 unsur dari 8 unsur tadi. Masing-masing susunan itu disebut permutasi 3 dari 8 unsur. Secara umum permutasi dapat ditentukan sebagai berikut.

Definisi Permutasi

Susunan terurut yang terdiri dari r unsur berbeda yang diambil dari n unsur berbeda ($r \leq n$) disebut *permutasi r dari n unsur*.

Jika kita memiliki 8 unsur dan akan disusun secara terurut terdiri dari 8 unsur, berapa banyak susunan seluruhnya yang hisa kita buat? Dengan kata lain, berapa $P_{8,8}$? Untuk menjawabnya, kita pilih unsur pertama, untuk ini kita mempunyai 8 pilihan. Kemudian setelah unsur pertama kita tetapkan, kita pilih unsur kedua, untuk ini kita mempunyai 7 pilihan. Setelah unsur pertama dan kedua kita tetapkan, kita pilih unsur ketiga, untuk ini kita punya 6 pilihan. proses ini kita lanjutkan sampai unsur ke 8 dari susunan dan untuk yang terakhir ini kita hanya punya 1 pilihan. Jadi banyak susunan yang peroleh adalah:

$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Jadi $P_{8,8} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8!$

$n!$ dibaca n *faktorial*, yang nilainya $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$.

Dengan demikian, kita peroleh sebagai berikut:

Banyak permutasi dari n unsur berbeda, yaitu P_n :

$P_n = n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$

Definisi Faktorial

n faktorial ditulis $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

dengan n bilangan asli, dan $0! = 1 = 1!$

Contoh 10.1:

Terdapat 6 mahasiswa yg memenuhi syarat dan bersedia menjadi pengurus Kerohanian Islam (Rohis). Jika pengurus Rohis tersebut terdiri dari ketua, wakil ketua, sekretaris dan bendahara, ada berapa macam susunan pengurus Rohis yang mungkin terbentuk?

Jawaban:

Persoalan ini termasuk dalam persoalan mencari banyak susunan terdiri dari 4 unsur yang diambil dari 6 unsur. Oleh karena itu, yang akan kita tentukan adalah $P_{6,4}$. Untuk itu, perlu dijelaskan/dilakukan hal-hal berikut. Ada 6 mahasiswa yang dipilih sebagai ketua. Seandainya ketua telah dipilih, maka 5 pilihan untuk wakil ketua. Jika ketua dan wakil ketua telah terpilih, maka ada 4 pilihan untuk sekretaris. Jika ketua dan sekretaris telah dipilih, maka tinggal 3 mahasiswa yang bisa dipilih untuk bendahara. Jadi banyaknya susunan pengurus yang mungkin 6 × 5 × 4 × 3 = 360. Perkalian 6 × 5 × 4 × 3 dapat diubah menjadi bentuk faktorial sebagai berikut.

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

Dengan demikian, $P_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!}$

Banyaknya Permutasi

Banyaknya permutasi *r* benda berbeda diambil dari *n* benda adalah

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Kini kita akan mendalami kasus lain dari permutasi. Jika pada permutasi di atas kita mempunyai *n* benda yang berbeda. Sekarang kita akan melihat bila diantara *n* benda itu ada yang sama. Yaitu misalkan di antara *n* benda ada n_1 buah benda yang sama ($n_1 \leq n$). Maka di antara $P_{n,n1}$ permutasi, setiap n_1! di antaranya adalah adalah sama, sehingga

$$P_{n,n_1} = \frac{n!}{n_1!}.$$

Misalnya 3 unsur a_1, a_2, dan b. Maka macam permutasinya adalah:

Pertama: $a_1\ a_2$ b dan $a_2\ a_1$ b

Kedua: a_1 b a_2 dan a_2 b a_1

Ketiga: b $a_1\ a_2$ dan b $a_2\ a_1$

Setiap 2 permutasinya sama, sehingga $P_{n,n_1} = \frac{3!}{2!} = 3$.

Sekarang, andaikan terdapat *n* benda yang terdiri dari *k* kelompok, dan setiap kelompok terdiri dari benda yang sama. Kelompok 1 beranggot n_1, kelompok 2 beranggota n_2, dst hingga kelompok *k* beranggota n_k.

Jadi, jumlah $n = n_1 + n_2 + n_k$.

Banyak Permutasi dengan Beberapa Unsurnya Sama

Banyaknya permutasi dari *n* benda terdiri *k* kelompok yang setiap kelompok ke-i ($1 \leq i \leq k$) mempunyai anggota yang sama sebanyak n_i adalah:

$$P_{n,n_i} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \ldots \times n_k!}$$

Contoh 10.2:

Tentukan banyak susunan 4 huruf yang diambil dari kata "MANA"

Jawaban:

Diketahui $n = 4$, banyak huruf M = n_1, = 1, banyak huruf A = n_2 = 2, dan banyak huruf N = n_3 = 1, sehingga $P_{n,n_i} = \frac{4!}{1! \times 2! \times 1!} = 12.$

Dengan demikian, banyak cara menyusun (permutasi) huruf pada kata "MANA" adalah 12 cara.

B. Kombinasi

Pada permutasi urutan unsur pada susunan diperhatikan yaitu sebagai contoh permutasi "BCA" tidak sama dengan "ABC". Akan tetapi, jika urutannya tidak diperhatikan maka permutasi itu disebut kombinasi (kelompok benda yang urutannya tidak diperhatikan). Jadi pada kombinasi "BCA" sama dengan "ABC".

Contoh 3:

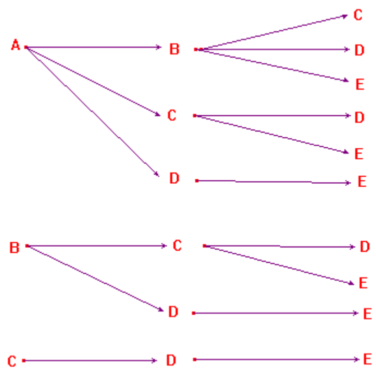
Sebuah buku terdiri dari 5 bab. Anda hanya ingin membaca 3 bab saja. Ada berapa banyak cara yang bisa dilakukan untuk membaca buku tersebut?

Jawaban:

Persoalan ini termasuk dalam persoalan kombinasi yaitu mencari banyak susunan 3 unsur dari 5 unsur berbeda tanpa memperhatikan urutannya. Misalkan bab yang akan dibaca tersebut adalah A, B, C, D dan E, kombinasi itu dapat diperoleh dengan cara berikut.

Pertama kita pilih A sebagai unsur pertama, B sebagai unsur kedua dan untuk unsurke tiga ada tiga pilihan yaitu C, D atau E. Kemudian A sebagai unsur pertama, C sebagai unsur kedua, dan untuk unsur ketiga ada 2 pilihan yaitu D atau E. Selanjutnya A sebagai unsur pertama D sebagai unsur kedua dan E sebagai unsur ketiga. Berikutnya B kita pilih sebagai unsur pertama C kedua dan D atau E ketiga. Selanjutnya C sebagai unsur pertama, D unsur kedua dan E atau A unsur ketiga.

Sehingga kita memperoleh susunan (kombinasi) sebanyak 3 + 2 + 1 + 2 + 2 = 10. Susunan yang lain dapat diperoleh dari 10 susunan ini dengan mengubah urutannya. Jadi jika urutan tidak diperhatikan maka kita memperoleh 10 susunan (kombinasi) tersebut. Untuk lebih jelasnya perhatikan Gambar 10.3 berikut ini.



Gambar 10.3 Diagram kombinasi

Soal di atas dapat juga diselesaikan sebagai berikut. Banyaknya permutasi terdiri dari 3 unsur diambil dari 5 unsur berbeda adalah $P_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!}$. Akan tetapi permutasi ini dapat dikelompokkan menjadi 3! = 6 kelompok yang setiap kelompok memiliki anggota yang urutannya saja yang berbeda. Jadi setiap 3! permutasi merupakan satu kombinasi saja. Sehingga banyak kombinasi 3 dari 5 unsur itu yang diberi simbol $C_{5,3}$ adalah $C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 10$.

Banyak Kombinasi *r* Unsur Diambil dari *n* Unsur Berbeda

Banyak cara memilih r benda dari n benda yang berbeda tanpa memperhatikan urutannya yaitu banyaknya kombinasi r unsur diambil dari n unsur berbeda adalah

$$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot n!}$$

Didefinisikan 0 ! = 1.

C. Peluang (Probabilitas)

Peristilahan dalam Peluang

Pada bagian ini kita akan mengkaji beberapa istilah, prosedur menentukan peluang, aturan yang mengendalikan peluang, dan kesimpulan yang secara valid (sah) dapat ditarik dari peluang yang telah ditentukan. Karena peluang bersifat tak tentu, maka setiap pembicaraan tentang peluang dianggap sebagai proses observasi (pengamatan) atau pengukuran yang hasilnya tak tentu pula.

Hasil Percobaan

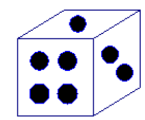
Proses pengamatan atau pangukuran yang hasilnya mengandung ketidaktentuan disebut percobaan, sedangkan hasilnya disebut hasil percobaan.

Contoh 10.3:

Percobaan mengetos atau melambungkan mata uang logam.
Hasil yang mungkin: Angka (A) atau Gambar (G)

Contoh 10.4:

Percobaan mengetos atau melemparkan sebuah dadu.
Hasil yang mungkin adalah: sisi 1, 2, 3, 4, 5 atau 6.



Gambar 10.4 Dadu

Pada percobaan di atas baik mata uang maupun dadu kita anggap mempunyai muka yang seimbang yaitu setiap muka mempunyai kesempatan muncul yang sama.

Ruang Sampel

Sebelum kita menganalisis suatu percobaan kita perlu menentukan ruang sampel yang terdiri atas semua hasil yang mungkin. Ruang sampel yang berbeda bisa berasal dari percobaan yang sama, yang bergantung pada bagaimana pengamat mencatat hasil percobaan itu.

Contoh 10.5:

Bayangkan suatu percobaan mengambil secara acak satu kartu dari 8 kartu yang diberi nomor 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8, lalu mengamati bilangan pada kartu yang diambil yaitu mengambil satu kartu tetapi mengamati apakah yang diperoleh bilangan ganjil atau genap, maka ruang sampel = {genap, ganjil}.

Definisi Ruang Sampel

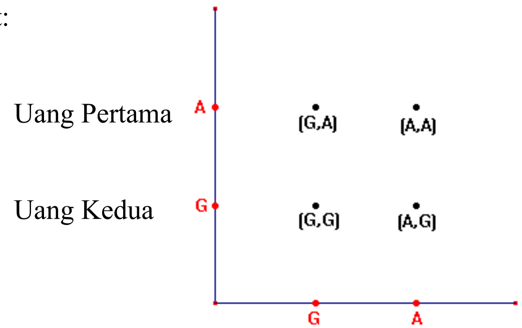
Ruang sampel (dilambangkan dengan S) suatu percobaan adalah himpunan semua hasil yang mungkin dari percobaan itu.

Contoh 10.6:

Dua keping mata uang logam dilambungkan satu kali. Tentukan 2 macam ruang sampelnya!

Jawaban:

Agar lebih mudah memahami kasus ini, kita coba membuat diagram berikut:



Ruang sampel pertama: Seluruh hasil percobaan,
S = {(G,G),(G,A),(A,G),(A,A)}.
Dapat kita lihat bahwa hasil percobaan ini berkesempatan sama untuk muncul atau terpilih (*equally likely/berkesamaan*), yaitu masing-masing hasil muncul atau terpilih dalam banyak cara yang sama.
Ruang sampel kedua: Seluruh hasil percobaan tetapi urutan tidak diperhatikan, yaitu:
S = {(2G), (1G dan 1A),(2A)}
Contoh *ruang sampel yang lain* adalah mendaftar banyaknya gambar yang muncul, jadi dalam hal ini, S = {0,1,2}.

Di sini hasil percobaan tidak berkesamaan. Nol dapat muncul dalam satu cara saja (yaitu mata uang pertama muncul gambar dan yang kedua juga muncul gambar), demikian pula 2 gambar. Tetapi 1 gambar dan 1 angka dapat muncul dalam 2 cara (yaitu mata uang pertama muncul gambar sedangkan yang lain angka, dan yang pertama muncul angka sedangkan yang lain muncul gambar).

Contoh 10.7:

Suatu kantong berisi 5 kelereng hijau (H), 3 kelereng putih (N), 1 kelereng kuning (K). Satu kelereng diambil dari kantong. Kemudian satu kelereng lagi diambil. Tentukan ruang sampel percobaan ini? Apakah hasil percobaannya berkesamaan?

Jawaban:

S = {(H,H), (H,P), (H,K), (P,P), (P,H), (P,K), (K,K), (K,H), (K,P)}
Hasil percobaannya tidak berkesamaan.

Kejadian (*Events*)

Andaikan kita mengambil 1 kartu dari 9 kartu dengan angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9 yang tersedia, mungkin kita tertarik pada hasil yang berupa bilangan genap yaitu 2, 4, 6, dan 8. Bilangan ini adalah unsur himpunan bagian ruang sampel {1,2,3,4,6,7,8,9}, yang mengarahkan kita ke definisi berikut ini.

Definisi Kejadian

Kejadian adalah himpunan bagian ruang sampel.

Contoh 10.8:

Tabulasikan ruang sampel dan kejadian memperoleh paling sedikit satu mata uang muncul gambar pada waktu melambungkan 2 mata uang.

Jawaban:

Ruang sampel Kejadian {GG,GA,AA,AG} {GG,GA,AG}
Kejadian terdiri atas hasil pada ruang sampel dengan G muncul paling sedikit satu kali.

Aturan Peluang

Aturan Peluang adalah cara mengawankan setiap hasil percobaan dengan tepat satu bilangan real p dengan $0 \le p \le 1$. Jika A kawan p maka dikatakan peluang A yaitu P(A)=p.

Sifat Peluang

Peluang pada ruang sampel memenuhi dua sifat berikut:
(1) Jika A suatu hasil percobaan maka peluangnya (P(A)) bernilai: $0 \le P(A) \le 1$
(2) Jumlah peluang semua hasil percobaan sama dengan 1 yaitu P(S) = 1

Contoh 10.9:

Secara intuitif kita bisa menerima bahwa peluang munculnya gambar pada pelambungan satu mata uang logam adalah ½ [P(G) = ½, dan P(A) = ½]. Peluang ini memenuhi kedua sifat peluang tersebut, yaitu:

0 ≤ P(G) ≤ 1 dan 0 ≤ P(A) ≤ 1, dan P(S) = P(G) + P(A) = ½ + ½ = 1

Ruang Sampel Seragam

Jika setiap hasil percobaan pada ruang sampel berkesamaan, maka ruang sampel itu disebut ruang sampel seragam.

Peluang Suatu Kejadian

Misalkan S ruang sampel dengan n(S) banyaknya hasil percobaan yang berkesamaan (S ruang sampel seragam), dan K sebarang kejadian pada S maka:

(1) Jika K himpunan kosong, maka P(K) = 0.

(2) Jika K seluruh ruang terok maka P(K) = P(S) = 1.

(3) Jika K kejadian terdiri atas n(K) hasil percobaan maka $P(K) = \frac{n(K)}{n(S)}$.

Contoh 10.10:

Sebuah kartu diambil dari setumpuk kartu remi. Berapa peluang bahwa yang diambil itu kartu *jack*?

Jawaban:

Seluruhnya terdapat 52 kartu, 4 di antaranya adalah kartu *jack*.

Jadi, n(S) = 52 dan n(K) = 4

Sehingga,

$P(jack) = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

D. Peluang Empiris Dan Kaidah Pencacahan

Sebelumya, kita telah menentukan peluang untuk hasil percobaan berdasarkan banyak cara kejadian muncul. Dalam bagian ini kita akan menentukan berdasar pada apa yang kita sebut data empiris. Coba perhatikan contoh berikut.

Contoh 10.11:

Sebuah dadu dilemparkan 5000 kali. Andaikan cacatan banyak munculnya mata 1 pada berbagai tahap proses itu dituliskan seperti berikut:

Banyak Lemparan (N)	Banyak Munculnya Mata '1' (m)	Frekuensi Relatif/Nisbi (m/N)
50	10	0,2
500	80	0,18
1500	250	0,1667
2500	420	0,168
3500	580	0,1657
5000	830	0,166

Pada data tersebut terlihat bahwa ketika N membesar, frekuensi relatif menjadi stabil disekitar $0{,}166 \approx \frac{1}{6}$. Oleh sebab itu kita menetapkan peluangnya sebesar: $P(1) = \frac{1}{6}$.

Jika diasumsikan bahwa dadu yang dipergunakan mempunyai sisi berkesamaan, karena ruang sampelnya S = {1,2,3,4,5,6} dan K = {1}, maka dengan menggunakan definisi peluang yang menggunakan ruang sampel kita peroleh bahwa $P(1) = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{1}{6}$. Ternyata hasil ini sama dengan hasil yang kita peroleh dengan cara empiris.

Definisi Peluang Empiris

Jika suatu percobaan dilakukan *n* kali, dengan *n* bilangan yang sangat besar, peluang hasil percobaan A mendekati perbandingan berikut ini:

$$P(A) = \frac{banyak\ pemunculan\ A}{n}$$

Kombinasi Dua Kejadian

Pada bagian ini kita akan mempelajari kombinasi dari beberapa kejadian. Misalkan kita mempunyai dua kejadian A dan B. Ada tiga kejadian yang dapat diperoleh dari kedua kejadian tersebut, yaitu:

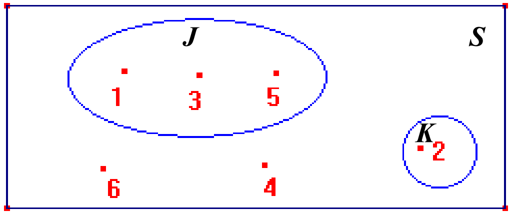
1. Kejadian A∪B (A atau B) adalah himpunan hasil percobaan yang ada dalam A atau B.
2. Kejadian A∩B (A dan B) adalah himpunan semua hasil percobaan yang ada dalam A dan B.
3. Komplemen kejadian A, dinyatakan dengan A, adalah himpunan semua hasil percobaan yang tidak dalam A.

Contoh 10.12:

Dalam melemparkan satu dadu yang simetris, berapa peluang munculnya bilangan ganjil atau 2?

Jawaban:

Kita memisalkan J menyatakan kejadian munculnya bilangan ganjil dan K kejadian munculnya 4, kemudian kita cari P(J∪K). Dengan menggunakan diagram Venn pada gambar di bawah ini kita peroleh:



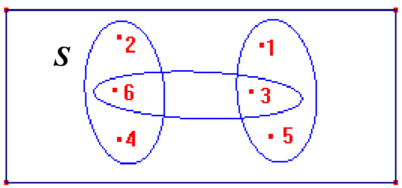
Contoh 10.13:

Dalam melemparkan sebuah dadu yang simetris, berapa peluang memperoleh kelipatan 3 atau bilangan genap?

Jawaban:

Misalkan G menyatakan kejadian munculnya bilangan genap dan T menyatakan munculnya kelipatan 3. Maka yang hendak kita cari tidak lain adalah P(G∪T).

Perhatikan Gambar di bawah. Kita lihat bahwa:



$P(G) = \frac{3}{6}$ dan $P(T) = \frac{2}{6}$

Akan tetapi, P(G ∪ T) ≠ P(G) + P(T) karena $\frac{4}{6} \neq \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$.

Apa perbedaan 2 contoh persoalan pada terakhir di atas? Pada Contoh 13 di atas kita ketahui bahwa kedua himpunan J dan K tidak mempunyai anggota persekutuan.

Kejadian Saling Asing (*Mutually Exclusive*)

1. Kejadian A dan B disebut saling asing apabila mereka tidak mempunyai hasil percobaan sekutu.
2. Jika A dan B kejadian yang saling asing maka P(A ∪ B) = P(A) + P(B)
3. Jika kejadian A dan B *memiliki hasil percobaan sekutu* seperti pada Contoh, maka kita dapat memperumum hasil ini menjadi sebagai berikut ini.

Peluang A atau B

Untuk setiap dua kejadian A dan B, Peluang A atau B adalah

P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

Hasil terakhir dapat kita perluas meliputi 3 kejadian misalnya A, B dan C.

Peluang A atau B atau C

Untuk setiap tiga kejadian A, B dan C, peluang A atau B atau C adalah

P(A∪B∪C) = P(A) + P(B) + P(C) − P(A∩B) − P(A∩C) − P(B∩C) + P(A∩B∩C)

Komplemen dari Kejadian A

Komplemen dari kejadian A (ditulis: A^C) adalah himpunan semua anggota ruang sampel S yang bukan anggota A.

Jadi $(A \cup A^C) = S$, dan $(A \cap A^C) = \varnothing$, $P(A \cup A^C) = 1$ dan $P(A \cap A^C) = 0$, sehingga $P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C) = 1$. Jadi $P(A^C) = 1 - P(A)$

E. Penyelesaian Dengan Menggunakan Cara Polya

Kasus 1

Dalam sebuah kantong terdapat 10 bola putih, 8 bola hitam, dan 6 bola hijau. Berapa bola yang harus diambil dari dalam kantong tersebut supaya paling sedikit ada 4 bola yang sama warnanya?

Penyelesaian: (dengan menggunakan cara Polya)

a. Memahami masalah

Diketahui terdapat 10 bola putih, 8 bola hitam, dan 6 bola hijau.

Menentukan banyaknya bola yang diambil dalam kantong.

b. Merencanakan penyelesaian

Dengan menggunakan tabel

c. *Menyelesaikan masalah*

Pada skenario terburuk, setiap kali akan ada bola dengan warna yang berbeda.

Putih Hitam Hijau

1 1 1

1 1 1

1 1 1

9 + 1 = 10

d. Kesimpulan

Jadi, Bola ke-10 pasti putih, hijau, atau hitam. Sedikitnya ada 4 bola dengan warna yang sama ketika 10 bola diambil.

Kasus 2:

Ada 5 kotak berisi kelereng. Setiap kotak berisi kelereng sama banyak. Jika 15 kelereng diambil dari setiap kotak, maka jumlah kelereng yang tersiswa sama dengan jumlah kelereng mula-mula dalam dua kotak sebelum pengambilan. Berapa banyak kereng dalam setiap kotak mula-mula?

Penyelesaian: (dengan menggunakan cara Reys)

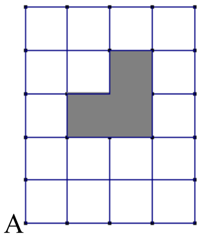
5 x 15 = 75

Ada 75 kelereng yang diambil. 75 juga merupakan banyak kelereng dari 3 keranjang mula – mula.

75 : 3 = 25.

LATIHAN SOAL

1. Seperti nomor 1, namun di Kota Impian tersebut telah dibangun taman kota yang digambarkan sebagai daerah yang diarsir. Maka tentukan banyak jalur terpendek yang dapat dilalui dari A ke B, jika Anda tidak boleh melalui atau menembus taman kota tersebut!



2. Seorang siswa diminta untuk menyelesaikan 5 dari 6 soal ulangan, akan tetapi soal nomor 1 harus dipilih. Tentukan banyaknya pilihan yang dapat diambil oleh siswa tersebut!
3. Dua uang logam dilempar secara bersama-sama. Tentukan banyaknya ruang sampel .... (https://m.youtube.com/watch?v=W-XbxFhQxfY)
4. Terdapat 20 siswa dalam satu kelas. Jika setiap siswa berjabat tangan pada saat bertemu dan berpisah, maka tentukan berapa banyak jabat tangan yang terjadi!
5. Ada 8 mahasiswa hendak mengadukan persoalannya kepada Dosen Pembimbing Akademiknya. Akan tetapi 2 di antaranya sudah menjalani proses bimbingan. Tentukan banyak cara mereka antri.
6. Ada berapa cara jika 4 orang remaja (a,b,c,d) menempati tempat duduk yang akan disusun dalam suatu susunan yang teratur?
7. Seorang peternak akan membeli 4 ekor ayam dan 3 ekor kambing dari seorang pedagang yang memiliki 8 ekor ayam dan 5 ekor kambing. Dengan berapa cara peternak tersebut dapat memilih ternak-ternak yang diinginkan?
8. Berapa banyak permutasi dari cara duduk yang dapat terjadi jika 10 orang disediakan 7 kursi, sedangkan salah seorang dari padanya selalu duduk di kursi tertentu.
9. Dari angka-angka 4,5,6,7,8 dan 9 akan dibuat bilangan ribuan dengan syarat tidak boleh ada angka yang diulang. Tentukan banyaknya bilangan yang terjadi.
10. Dari kota F ke kota G dapat dilalui 5 jalur, sedangkan dari kota G ke kota H dapat dilalui 3 jalur. Berapa jalur dapat dilalui dari kota F ke kota H melewati kota G?

BAB XI
PEMECAHAN MASALAH PADA STATISTIKA

A. Penyajian Data

Setiap orang pasti pernah melakukan pengamatan. Lalu sebagian dari orang yang melakukan pengamatan tersebut melakukan pencatatan atas apa yang telah diamatinya. Sebagai hasil suatu pengamatan atau pengukuran terhadap suatu variabel tertentu, misalnya berat badan, suhu udara, dan banyaknya pengunjung swalayan setiap hari, dapat diperoleh data berupa sekumpulan bilangan. Untuk meringkas data yang berupa kumpulan bilangan itu kita lakukan dengan membuat tabel sebaran seringan (distribusi frekuensi), dan membuat diagram.

Data berasal dari kata datum yang berarti fakta digunakan sebagai dasar dalam pengambilan keputusan. Pengolahan data adalah suatu proses atau manipulasi data yang menerima data sebagai masukan (*input*). Proses tersebut dalam bentuk informasi (*output*).

Tabel Distribusi Frekuensi

Contoh 11.1

Andaikan terdapat data mengenai banyaknya siswa yang terkena cacar air di SD Marikangen pada musim hujan tahun lalu setiap hari selama sebulan, seperti yang tertera pada tabel berikut.

1 0 0 2 4 3 4 6 5 4 1 3 1 3 4
7 0 1 1 4 3 5 3 5 6 2 6 3 3 2

Dari tabel tersebut, kita bisa melihat bahwa bilangan terbesar adalah 7 dan terkecil adalah 0, sehingga rentangan data tersebut 7 – 0 = 7.

Contoh 11.2:

Buatlah daftar sebaran seringan sekor ujian akhir PAI berikut ini.
72, 75, 71, 83. 68, 85, 75, 62, 49, 20, 85, 72. 90, 61, 81, 90. 40, 93, 58, 85, 71, 72

Jawaban:

Daftar distribusi frekuensi terdiri atas 2 kolom yaitu kolom skor dan kolom frekuensi. Tabel berikut ini mendaftar frekuensi setiap skor di atas.

Apabila banyak jenis data cukup besar sebaran seringan seperti diatas mungkin menjadi kurang memadai, perlu diambil cara lain yaitu dengan mengelompokkan data dalam kelas-kelas yang pada umumnya berupa interval.

Skor Ujian	Frekuensi
20	1
40	1
49	3
58	3
61	1
62	1
68	1
71	2
72	3
75	2
81	1
83	1
85	3
90	2
93	1

Frekuensi data yang dikelompokkan disusun dengan membagi rentangan data menjadi selang/interval yang berlebar sama, kemudian mendaftar butir yang termasuk dalam setiap interval. Berikut adalah langkah menyusun sebaran seringan data berkelompok.

Langkah dalam menyusun sebaran seringan data berkelompok
1. Memilih banyak dan lebar kelas
2. Mentabulasikan data ke dalam kelas
3. Mencari seringan dalarn setiap kelas

Contoh 11.3:

Andaikan diketahui data berupa lama pendidikan (dalam tahun) yang pernah diikuti oleh para petani di suatu desa adalah seperti berikut: 3, 3, 12, 10, 9, 7, 6, 9, 4, 15, 18, 18, 9, 10, 8, 8, 8, 2, 4, 11, 12, 12, 10, 17, 1, 12, 6, 6, 6, 11.

Kelompokkan data itu dalam kelas interval berlebar sama dan susun tabel frekuensinya.

Jawaban:

Pertama, kita harus mencari sebaran atau rentangannya, yaitu 18–1 = 17.

Kedua, menentukan banyak kelas. Cara yang standard digunakan adalah dengan menggunakan aturan *Sturges*, yaitu:

$\boldsymbol{k = 1 + 3{,}3 \log n}$

dengan k adalah banyaknya kelas dan n adalah banyak data.

Jadi, kita kelompokkan data ini menjadi 1 + 3,3 log 30 = 2,477. Dengan besarnya nilai k = 2,477 berarti kita boleh mengambil sebanyak 3 kelas.

Ketiga, menentukan panjang kelas, yaitu dengan rumus berikut:

$$P = \frac{\text{rentangan}}{\text{banyak kelas}}$$

Berarti, $P = \frac{17}{3} = 5{,}667$. Ini memperbolehkan kita untuk mengambil 6 panjang kelas. Jika diambil banyak kelasnya 3, dengan panjang kelasnya diambil 6 (k = 3 dan p = 6).

Kelas	Frekuensi
1 – 6	10
7 – 12	16
13 – 18	4
Jumlah	20

Diagram

1. Diagram Dahan-Daun

Salah satu untuk meringkas data adalah dengan *Diagram Dahan-Daun*. Untuk menunjukkan bagaimana cara menyusun diagram ini kita perhatikan Contoh 4 berikut ini.

Contoh 11.4:

Data skor ujian matematika kelas III SD Marisuka berikut ini.

76 84 68 63 58 60 56 97 47 84 64 80 78 91 78 72 85 75 68 73 75.

Angka pertama dan kedua setiap skor kita pasang berturut-turut sebagai dahan dan daun, sehingga diperoleh diagram dahan-daun berikut ini.

Diagram Dahan dan Daun

Skor Ujian Matematika

4	7
5	6 8
6	0 3 4 8 8
7	2 3 5 5 6 8 8
8	0 4 4 5
9	1 7

Angka pertama dan kedua setiap skor berturut-turut kita pasang sebagai dahan dan daun. Sebagai contoh, 8 pada sekor 85 kita letakkan 8 pada dahan dan 5 pada daun.

Berikut adalah tiga langkah menyusun diagram dahan-daun:

(1) Tentukan banyaknya angka yang dipilih sebagai dahan.

(2) Buat daftar dahan dalam suatu kolom dari yang kecil ke yang besar.

(3) Buat daftar angka sisanya dalam setiap butir data sebagai daun dari yang kecil ke yang besar pada kolom di sebelah kanan kolom dahan (Anda bisa juga memilih urutan daun dari besar ke kecil).

Selain dengan diagram dahan-daun, kita bisa juga menggambar data dengan diagram batang, histogram, poligon, diagram lingkaran, dan diagram pastel (*pie*).

2. Diagram Batang

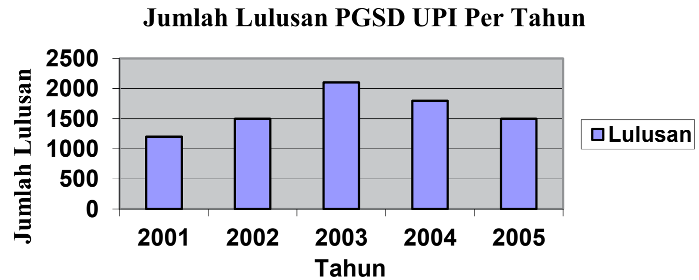
Untuk memahami bagaimana menggambarkan data dalam suatu diagram batang coba perhatikan contoh berikut.

Contoh 11.5:

Gambarlah diagram batang untuk banyak lulusan PGSD UPI kampus daerah per tahun seperti berikut ini (catatan: data ini fiktif).

Tahun	2001	2002	2003	2004	2005
Jumlah Lulusan	1200	1500	2100	1800	1500

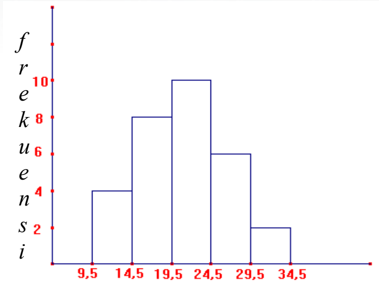
Jawaban:



Sumbu horizontal menyatakan tahun dan sumbu vertikal menyatakan banyaknya lulusan. Jika kita ingin mengetahui banyak lulusan katakanlah pada tahun 2005, tarik garis horizontal dari puncak batang sehingga memotong sumbu vertikal, kemudian tentukan pada sumbu vertikal bilangan yang berkaitan. Bilangan itu menyatakan banyaknya lulusan di tahun 2005, yaitu 2400.

3. Histogram

Histogram adalah diagram batang yang menggambarkan distribusi frekuensi data berkelompok. Oleh sebab itu untuk membangun histogram suatu data lebih dahulu kita cari distribusi frekuensi yang dikelompokkan data tersebut. Tinggi persegi panjang (batang) menyatakan seringan pada interval yang bersangkutan.



Usia (dalam tahun)

Gambar 11.1 Histogram data usia pasien Puskesmas Cimalaka

Diagram di atas merupakan histogram data usia pasien Puskesmas Cimalaka pada bulan Januari 2006. Data tersebut diambil dari distribusi frekuensi berikut ini.

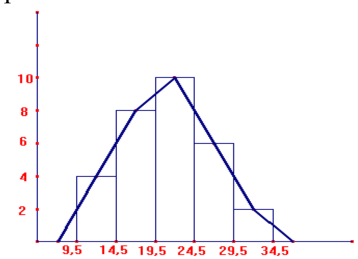
Tabel 11.1 Jumlah Pasien Puskesmas Cimalaka

Kelas (dalam Tahun)	Titik Tengah	Frekuensi
10 – 14	12	4
15 – 19	17	8
20 – 24	22	10
25 – 29	27	6
30 – 34	32	2

4. Poligon

Pada histogram, titik tengah puncak setiap batang yang berdekatan kita hubungkan, maka kita akan memperoleh suatu poligon (segi banyak). Poligon ini disebut "Poligon Frekuensi". Gambar 11.3 adalah poligon frekuensi untuk data pada Tabel 11.1

Frekuensi



Usia (dalam tahun)

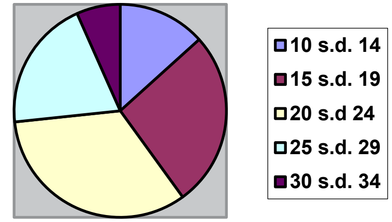
Gambar 11.2 Poligon frekuensi

5. Diagram Lingkaran

Daerah lingkaran dapat juga dipergunakan untuk menggambarkan data. Diagram yang menggunakan lingkaran ini disebut "Diagram Lingkaran". Coba perhatikan Contoh 6 berikut ini.

Contoh 11.6:

Berdasarkan Tabel 11.4, disusun diagram lingkaran berikut ini.



Gambar 11.3 Diagram Lingkaran

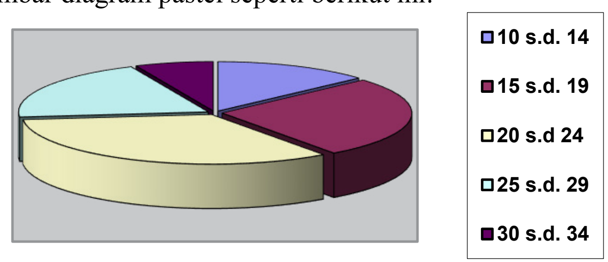
Suatu himpunan pada Diagram Lingkaran dalam Gambar 12.4 adalah suatu juring lingkaran dengan besar sudut pusat: $\alpha_i = \frac{n_i}{n_{total}} \times 360^0$

Misalnya untuk kelas ketiga (berwarna kuning), $n_3 = 10$, dan $n_{\text{total}} = 30$, maka:

$$\alpha_3 = \frac{n_3}{n_{total}} \times 360^0 = \frac{10}{30} \times 360^0 = 120^0$$

6. Diagram Pastel (*Pie*)

Ada satu lagi diagram yang mirip dengan diagram lingkaran, hanya saja diagram ini bergambar bangun dimensi-3. Diagram demikian disebut diagram pastel atau diagram *pie*. Berdasarkan data pada Tabel 12.1, kita dapat menggambar diagram pastel seperti berikut ini:



Gambar 11.4 Diagram Pastel

B. Ukuran Tendensi (Gejala) Pusat

Ukuran tendensi pusat sangat berguna untuk menyatakan data secara ringkas. Ukuran tendensi pusat yang terdiri atas rerata, median, dan modus.

1. Rerata

Rerata atau rata-rata hitung adalah ukuran tendensi pusat yang banyak digunakan dan memiliki ketentuan sebagai berikut.

Definisi Rerata

Misalkan kita mempunyai data berupa bilangan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Maka rerata data tersebut yaitu $\bar{x}$ adalah

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Contoh 11.7:

Tentukan rerata dari 5, 7, 13, 12 dan 23 !

Jawaban:

$$\bar{x} = \frac{5 + 7 + 13 + 12 + 23}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

Contoh 11.8:

Tentukan rerata nilai ujian matematika, pada data berikut ini:

nilai 40 45 50 55 60 65

frekuensi 12 6 13 20 42 7

Jawaban:

Dari data di atas diketahui bahwa ada 12 siswa memperoleh nilai 40, jadi untuk menggunakan rumus rerata di atas bilangan 40 muncul 12 kali. Sedangkan bilangan 45 muncul 6 kali, 50 muncul 13 kali, 55 muncul 20 kali, 60 muncul 42 kali, dan 65 muncul 7 kali, sehingga kita gunakan rumus rerata data berkelompok.

Rerata Data Berkelompok

Misalkan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ mempunyai seringan berturut turut $f_1, f_2, \ldots, f_n$ Maka rerata data ini adalah:

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n}$$

dengan demikian, jawaban pada soal di atas adalah:

$$\bar{x} = \frac{12.40 + 6.45 + 13.50 + 20.55 + 42.60 + 7.65}{12 + 6 + 13 + 20 + 42 + 7} = \frac{5475}{100} = 54{,}75$$

2. MEDIAN

Median dari suatu data yang berupa bilangan adalah bilangan yang terletak *di tengah* jika data itu *diurutkan* menurut besarnya.

Definisi Median

Jika $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ adalah data yang telah diurutkan menurut besarnya (dari kecil ke besar atau dari besar ke kecil) maka mediannya adalah bilangan yang di tengah jika *n* ganjil. Jika *n* genap mediannya adalah rerata 2 bilangan yang berada di tengah data terurut tersebut.

Median Untuk data tunggal

Mencari median data tunggal dengan cara mengurutkan data tersebut dari data terkecil sampai data terbesar atau sebaliknya dari data terbesar sampai data terkecil, kemudian posisi median dicari dengan rumus:

Me : 1/2 (n +1), dimana n = jumlah data

Contoh 11.9:

Tentukan median data ini: 3, 5, 9, 8, 4.

Jawaban:

Data ini diurutkan menjadi 3, 4, 5, 8, 9. Mediannya adalah 5.

Contoh 11.10:

Tentukan median data 4, 6, 7, 3, 5, 2, 8, 9

Jawab:

Data diurutkan menjadi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Median $= \frac{5+6}{2} = 5{,}5$.

Median untuk bentuk data berkelompok.

mencari median data kelompok ini perlu dibuat susunan distribusi frekuensi terlebih dahulu dengan cara mengurutkan dari data terkecil sampai data terbesar atau sebaliknya dari data terbesar sampai data terkecil, kemudian menghitung rentangan (R), jumlah kelas (K) dan panjang kelas interval (P). Terakhir membuat distribusi frekuensi dilanjutkan mencari nilai mediannya dengan rumus **Me = Bb + P ((1/2 n - Jf)/f)**

Keterangan:

Me = Nilai Median
Bb = Batas bawah kelas sebelum nilai median akan terletak
P = panjang kelas nilai median.
n = Jumlah Data
f = Banyaknya frekuensi kelas median
Jf = Jumlah dari semua frekuensi kumulatif sebelum kelas median.

3. Modus

Modus sekelompok bilangan dari suatu hasil pengukuran adalah bilangan yang munculnya paling sering, atau frekuensinya paling tinggi.

Definisi Modus

Modus sekelompok bilangan (hasil pengukuran) adalah bilangan yang muncul paling sering. Jika masing-masing bilangan muncul sekali maka data itu, tidak mempunyai modus. Jika ada dua bilangan yang frekuensinya sama dan paling banyak, maka data itu mempunyai dua modus. Bahkan ada pula data mempunyai tiga atau lebih modus.

Modus data tunggal

Menghitung modus dengan data tunggal dilakukan sangat sederhana, yaitu dengan cara mencari nilai yang sering nilai muncul diatara sebaran data.

Contoh 11.11:

Tentukan modus data 4, 3, 5, 6, 7, 8, 6, 4, 5, 8, 8, 7, 9, 9, 8. 9.

Jawaban:

Setelah diurutkan diperoleh 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9.
8 muncul paling sering yaitu 4 kali. Jadi modus data ini adalah 8.

Modus data berkelompok

Apabila kita sudah mengerti modus berbentuk tunggal tadi maka kita akan lebih mudah untuk memahami modus berbentuk distribusi frekuensi. Dalam hal ini dapat dihitung dengan rumus**: Mo = Bb + P (F1 / F1 + F2)**

Keterangan :
Mo = Nilai Modus
Bb = Batas bawah kelas sebelum nilai median akan terletak
P = Panjang kelas nilai modus
F1 = Selisih antara frekuensi modus (f) dengan frekuensi sebelumnya ($f_{sb)}$)
F1 = Selisih antara frekuensi modus (f) dengan frekuensi sebelumnya (f_{sd})

C. Ukuran Sebaran

Ukuran sebaran data yang akan kita pelajari adalah rentangan, rentangan antar kuartil dan variansi.

1. Rentangan (Range)

Rentangan data adalah selisih bilangan yang terbesar dan yang terkecil yang ada pada data tersebut.

Contoh 11.12:

Tentukan rentangan data berikut.
4, 6, 7, 8, 3,9
Rentangan = 9 – 3 = 6

2. Rentangan Antar Kuartil (*Interquartile Range*)

Untuk mencari rentangan antar kuartil terlebih dulu kita cari kuartil pertama (K_1) dan kuartil ketiga (K_3). Rentangan antar kuartil dirumuskan sebagai berikut.

$$\text{Rentangan Antar Kuartil (RAK)} = K_3 - K_1$$

Contoh 11.13:

Diketahui suatu data berupa banyaknya pengunjung suatu Museum Sribaduga Bandung setiap hari selama 16 hari sebagai berikut:
25, 30, 26, 45, 42, 24, 22, 34, 29, 28, 23, 27, 32, 31, 35, 43.
Tentukan rentangan antar kuartilnya.

Jawaban:

Untuk mencari K_1, K_3 dan RAK data kita urutkan dari kecil ke besar, sehingga kita peroleh sebagai berikut.
22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 42, 43, 45.
Kemudian kita sekat menjadi 4 bagian dengan banyak anggota sama.
Titik perempat pertama, K_1, jatuh antara 25 dan 26 sehingga

$$K_1 = \frac{25+26}{2} = 25{,}5$$

Titik perempat kedua yaitu K_2 (atau median) jatuh antara 29 dan 30 sehingga

$$Me = \frac{29+30}{2} = 29{,}5$$

Titik perempat ketiga, K_3 jatuh antara 34 dan 35 sehingga

$$K_3 = \frac{34+35}{2} = 34{,}5$$

Jadi RAK = $K_3 - K_1 = 34{,}5 - 25{,}5 = 9$

Rentangan antar kuartil dapat digunakan untuk mencari pencilan (*outlier*), yaitu anggota yang letaknya jauh dari anggota data yang lain.

Definisi Pencilan

Pencilan suatu data adalah skor yang lebih dari (K_3 + 1,5 RAK) atau yang kurang dari
(K_1 – 1,5 RAK).

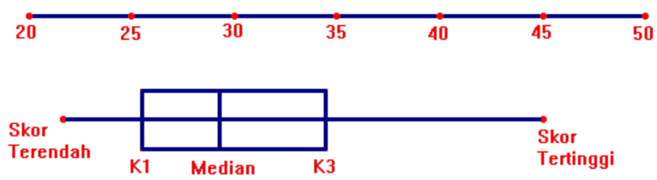
Untuk data pada Contoh 12.14 di atas, diperoleh:

K_3 + 1,5(RAK) = 34,5 + 1,5(9) = 48

K_1 – 1,5(RAK) = 24,5 – 1,5(9) = 11

Dengan demikian, data diatas tidak mempunyai pencilan.

Diagram yang bisa digunakan untuk mencari pencilan adalah diagram *kotak dan Whisker* seperti pada Gambar 12.6 berikut ini.



Gambar 11.5 Diagram Kotak dan *Whisker*

3. Variansi

Variansi adalah kuadrat dari standar deviasi. simbol variansi untuk populasi = V^2. Ukuran sebaran keempat yang hendak kita kaji adalah "variansi". Berikut ini adalah langkah untuk mencari variansi suatu data.

(1) Hitung rerata ($\bar{x}$).

(2) Tentukan beda setiap skor dengan rerata, ($x - \bar{x}$).

(3) Kuadratkan, beda itu, yaitu hitung $(x - \bar{x})^2$.

(4) Bagi jumlah kuadrat beda $\sum(x_i - \bar{x})^2$ tadi oleh (n -1) untuk estimasi kecil.

Contoh 11.14:

Tentukan variansi dari data di bawah ini:

23, 24, 29, 21, 25, 44, 41, 33, 28, 27, 22, 26, 31, 30, 34, 42.

Jawaban:

Kita tentukan dahulu reratanya:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{26 + 44 + 41 + 23 + 24 + 29 + 21 + 33 + 28 + 27 + 22 + 26 + 31 + 30 + 34 + 42.}{16}$$

$$\bar{x} = \frac{480}{16} = 30$$

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
25	–5	25
44	14	196
41	11	121
23	–7	49
24	–6	36
29	–1	1
21	–9	81
33	3	9
28	–2	4
27	–3	9
22	–8	64
26	–4	16
31	1	1
30	0	0
34	4	16
42	12	144
Jumlah		772

Jadi variansi = $s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{772}{15} = 51{,}46667.$

D. Contoh Kasus

Kasus 1

Sebanyak 100 siswa mengikuti tes Matematika. Rata-rata nilai seluruh siswa adalah 64. Rata-rata siswa laki-laki adalah 60 dan rata-rata siswa perempuan adalah 70.

a) Ada berapa banyak siswa laki-laki dan siswa perempuan?

b) Berapa banyaknya siswa laki-laki daripada siswa perempuan?

Penyelesaian: (dengan menggunakan Polya)

a. Memahami masalah

- Ada 100 siswa. Rata-rata semua siswa 64.
- Rata-rata siswa laki-laki 60 dan siswa perempuan 70.

b. Merencanakan penyelesaian

- Dengan menggunakan pemisalan.
- Misalnya x = banyak anak laki-laki
- Maka $\frac{60x+70(100-x)}{100} = 64$

$60x + 7000 - 70x = 6400$
$70x - 60x = 7000 – 6400$
$10x = 600$
$x = 600 :10$
$x = 60$

c. Melaksanakan penyelesaian

$60x + 7000 - 70x = 6400$
$70x - 60x = 7000 - 6400$
$10x = 600$
$x = 600 :10$
$x = 60$

Karena ada 60 siswa laki-laki, maka banyak siswa perempuan adalah: 100 – 60 = 40 siswa siswa perempuan.
Ada 60 – 40 = 20 anak laki-laki lebih banyak daripada anak perempuan.

d. Mengecek kembali

Jadi, banyaknya siswa laki – laki 60, siswa perempuan 40 dan 20 anak laki-laki lebih banyak daripada siswa perempuan adalah laki-laki.

Penyelesaian 2: (dengan menggunakan cara Reys)

Misalkan diasumsikan semua siswa laki-laki, maka:
Nilai totalnya 60 x 100 = 6000
Nilai seluruh siswa sebenarnya = 64 × 100 = 6400
Maka, selisih nilai = nilai sebenarnya – nilai pemisalan
= 6400 – 6000 = 400
Selisih siswa = siswa sebenarnya – siswa pemisalan
= 70 – 60 = 10
Banyaknya siswa perempuan = 400 : 10 = 40
Banyak siswa laki-laki = 100 – 40 = 60
Selisih siswa laki-laki dan perempuan = 60 – 40 = 20
Jadi, 20 anak laki-laki lebih banyak daripada anak perempuan.

Kasus 2

Jonathan mendapatkan nilai 96 untuk pelajaran bahasa Inggris dan 88 untuk IPA. Berapa nilai matematikanya jika rata-rata nilai ujian untuk ketiga pelajaran itu adalah 93?

Penyelesaian: (dengan menggunakan cara Polya)

a. Memahami masalah

Diketahui: Jonatan mendapatkan nilai bhs inggris dan IPA sebesar 96 dan 88.
Rata-rata ketiga nilai matematika, Bahasa Inggris dan IPA adalah 93.
Menentukan nilai matematika.

b. Menyelesaikan penyelesaian

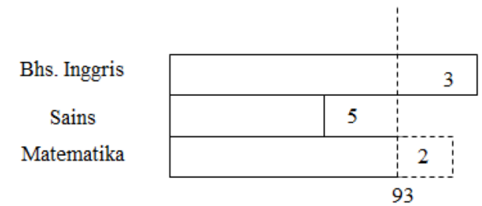
Dengan menggunakan penalaran

c. Melaksanakan penyelesaian

96 + 88 = 184
Nilai total dari bahasa Inggris dan sains adalah 184.
93 x 3 = 279
Nilai total dari 3 mata pelajaran adalah 279.
279 – 184 = 95

d. Kesimpulan

Jadi, Jonatan mendapatkan nilai 95 untuk matematika.

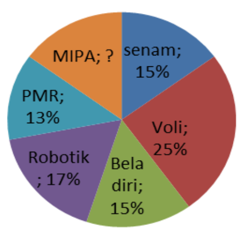


Penyelesaian: (dengan menggunakan cara Reys)

5 – 3 = 2
93 + 2 = 95
Jadi, Jonatan memperoleh nilai 95 untuk matematika.

LATIHAN SOAL

1. Peserta ujian matematika terdiri dari 40 orang siswa kelas A, 30 orang siswa kelas B, dan 30 orang siswa kelas C. Nilai rerata seluruh siswa adalah adalah 7,2 dan nilai rerata siswa kelas B dan C adalah 7,0. Tentukan nilai rerata siswa kelas A!
2. Rerata tinggi badan 30 wanita adalah 156 cm, sedangkan rerata tinggi badan 20 pria adalah 168 cm. Berapakah rerata tinggi badan kelimapuluh orang tersebut?
3. Suatu data memiliki rerata 16 dan jangkauan 6. Jika setiap nilai dalam data dikalikan p kemudian dikurangi q, maka diperoleh data baru dengan rerata 20 dan jangkauan 9. Tentukan nilai $2p + q$.
4. Pada suatu pemilihan umum diikuti 5 partai A, B, C, D dan E dengan perolehan suara berturut-turut 30%, 27%, 23%, dan sisanya terbagi dua sama rata. Susunlah diagram lingkaran untuk data tersebut.
5. Pendapatan rata-rata karyawan suatu perusahaan adalah Rp 300.000,- per bulan. Jika pendapatan rata-rata karyawan pria Rp 320.000,- dan karyawan wanita Rp 285.000,- maka perbandingan jumlah karyawan pria dengan karyawan wanita adalah...
6. Tahun lalu gaji per bulan 6 orang karyawan dalam ribuan rupiah adalah sebagai berikut: 520, 380, 320, 650, 700, 750. Tahun ini gaji mereka naik 20% bagi yang sebelumnya bergaji kurang dari Rp 500.000,- dan 15% bagi yang sebelumnya bergaji lebih dari Rp 500.000,- . Rerata besarnya kenaikan gaji mereka per bulan adalah...
7. Diagram lingkaran berikut menunjukkan kegemaran 300 siswa dalam mengikuti kegiatan ekstrakulikuler di suatu sekolah. Banyak siswa yang gemar MIPA adalah ...



8. Nilai rata-rata IPA dari 8 anak adalah 6,3. Apabila ditambah nilai satu anak, maka rata-ratanya menjadi 6,1. Nilai anak yang baru adalah ...
9. Sebanyak 20 anak ditimbang berat badannya (dalam kg). Diperoleh data sebagai berikut 50, 45, 43, 49, 50, 52, 41, 47, 45, 46, 48, 46, 48, 51, 53, 47, 49, 52, 58, 47. Selisih kuartil bawah adalah...
10. Rerata dari data 7,9,12,8,10,15,18,14,16,X adalah 12. Nilai X adalah ...

DAFTAR PUSTAKA

Amir, Mohammad Faizal., Prasojo, Bayu Hari. 2016. *Buku Ajar Matematika Dasar.* Sidoarjo: UMSIDA PRESS. Retrived from http://eprints.umsida.ac.id.

Barutu, Anwar. 2016. *Penerapan Metode Problem Solving pada Soal Pemecahan Masalah Matematika.* [Video]. (https://m.youtube.com/watch?v=1mt90KL9zAM, diakses tanggal 4 Mei 2018).

Dhurori, Atmini., Markaban. 2010. *Pembelajaran Kemampuan Pemecahan Masalah Dalam Kajian Aljabar Di SMP.* Yogyakarta: PPPPTK Matematika. Retrived from http://ebook.p4tkmatematika.org.

Ginanjar, Anjar. 2013. *Metode Pembelajaran-Pemecahan Masalah (Problem Solving).* [online], (http://aginista.blogspot.co.id/2013/02/metode-pembelajaran-pemecahan-masalah.html?m=1, diakses tanggal 23 April 2018).

Hollands, Roy. 1984. *Kamus Matematika.* Jakarta: Erlangga.

Jurang, Anto. 2013. *Logika Matematika-1,* [PDF], (https://www.slideshare.net/ antojurang/logika-matematika1-17033795, diakses tanggal 23 April 2018).

Ki, Di. 2017. *Strategi Pemecahan Masalah Dengan Diagram atau Gambar.* [Video]. (https://m.youtube.com/watch?v=W-XbxFhQxfY, diakses tanggal 4 Mei 2018).

Kurniawan, Adi, Dkk. 2014. *Pengertian Pemecahan Masalah Matematika*, [online], (http://yukberhitung.weebly.com/materi/pengertian-pemecahan-masalah-matematika, diakses tanggal 24 April 2018).

Margana, Robertus. 2009. *Proses dan Strategi Pemecahan Masalah*, [online], (https://robertmath4edu.wordpress.com/2009/01/15/proses-dan-strategi-pemecahan-masalah/, diakses 22 tanggal April 2018).

McGatha, M.B., & Darcy, P. (2010) Rubrics at play. Mathematics teaching in the middle school, 15(6), 328-336. Retrieved from http://www.eric.ed.gov/ERICWebProtal/detail?accno=EJ878921

Muchyidin, Arif. 2016. *Membangun Konsep, Memecahkan Masalah Dengan Matematika.* Cirebon: CV. CONFIDENT. Retrived from https://www.researchgate.net.

Nissa, Ita Chairun. 2015. *Pemecahan Masalah Matematika (Teori dan Contoh Praktek)*. Mataram: Duta Pustaka Ilmu. Retrived from http://www.academia.edu.

Riduwan, M.B.A, 2003. *Dasar-dasar Statistika,* Bandung: Penerbit Alfabeta

Rizal, Fakhrul. 2013. *Contoh Pemecahan Masalah pada Operasi Bilangan Bulat,* [online], (http://materimatematika-smp.blogspot.co.id/2013/04/contoh-pemecahan-masalah-pada-operasi.html, diakses tanggal 22 April 2018).

Ruseffendi, E.T. 1997. *Materi Pokok Pendidikan Matematika 3*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Soedjadi, R. 2000. *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia*. Jakarta: Dirjen Dikti, Departemen Pendidikan Nasional.

Supinah., Sutanti, Titik. 2010. *Pemebelajaran Berbasis Masalah Matematika Di SD.* Yogyakarta: PPPPTK Matematika. Retrived from http://ebook.p4tkmatematika.org.

Suriasumantri, Jujun S. 1999. *Filsafat Ilmu: Sebuah Pengantar Populer*. Jakarta: Pustaka Sinar Harapan.

__________., *Pembelajaran Pemecahan Masalah*, [online], (https://lenterakecil. com/pembelajaran-pemecahan-masalah/, diakses tanggal 22 April 2018).

Sutawidjaja, Akabar. 1993. *Pendidikan Matematika 3*. Depdikbud, Dirjen Dikti, PPTK: Jakarta.

__________., 2009, *Pembelajaran Pemecahan Masalah*, [online], (http://mate matikaituasik.blogspot.co.id/2009/11/pembelajaran-pemecahan-masalah. html, diakses tanggal 23 April 2018).

Tampubolon, Defantri. 2012. *Klasifikasi Masalah Matematika*, [online], (https://www.defantri.com/2012/12/klasifikasi-masalah-matematika.html? m=1, diakses tanggal 25 April 2018).

Wahyudi, Anugraheni, Indri. 2017. *Strategi Pemecahan Masalah Matematika.* Salatiga: Satya Wacana University Press. Retrived from https://www.researchgate.net.

Wardhani, S., Purnomo, S. S., Wahyuningsih, E. 2010. *Pembelajaran Kemampuan Pemecahan Masalah Matematika Di SD.* Yogyakarta: PPPPTK Matematika. Retrived from http://ebook.p4tkmatematika.org.

__________., *Pembelajaran Pemecahan Masalah*, [online], (https://lenterakecil. com/pembelajaran-pemecahan-masalah/, diakses tanggal 22 April 2018).

__________., 2009, *Pembelajaran Pemecahan Masalah*, [online], (http://mate matikaituasik.blogspot.co.id/2009/11/pembelajaran-pemecahan-masalah. html, diakses tanggal 23 April 2018).

Wolf, K, & Steves, E (2007). the role of rubrics in advancing and assesing student learning. The journal of effective teaching, 7(1), 3-14. retrived from http://works.bepress.com/cgi/viewdocument/cgi?article=1058&context=susan_madsen#page=8

GLOSARIUM

A

Aksioma : Suatu pernyataan yang bisa dilihat kebenarannya tanpa perlu adanya bukti

Alas : Bagian dasar dari suatu bangun atau benda

Aljabar : Cabang ilmu Matematika yang di dalamnya memuat dan memanipulasi simbol-simbol

Analogi : Membandingkan dua hal yang berlainan berdasarkan keserupaannya

Argumentasi : Kumpulan pernyataan, baik tunggal maupun majemuk dimana pernyataan-pernyataan sebelumnya disebut premis-premis dan pernyataan terakhir disebut konklusi/ kesimpulan dari argumen

Asosiatif : Proses pengelompokkan penjumlahan dan perkalian dengan cara yang berbeda namun hasilnya akan tetap sama

Asumsi : Suatu anggapan atau dugaan sementara yang belum dapat dibuktikan kebenarannya.

B

Biimplikasi : Dua pernyataan atau kalimat terbuka yang dihubungkan dengan kata hubung "… jika dan hanya jika …" dan dilambangkan dengan simbol "⇔"

Bilangan : Suatu konsep matematika yang digunakan dalam pencacahan dan pengukuran

D

Desil : Titik atau skor atau nilai yang membagi seluruh distribusi frekuensi dari data yang kita selidiki ke dalam 10 bagian yang sama besar

Desimal : Bilangan pecahan yang penyebutnya merupakan kelipatan 10 kemudian ditulis dengan menggunakan koma (,) serta sebagai pemisah antara bilangan bulat serta bilangan pecahannya

Disjungsi : Pernyataan majemuk yang dibentuk dengan cara menggabungkan dua pernyataan tunggal dengan menggunakan kata penghubung "atau"

Distributif : Suatu penggabungan dengan cara mengkombinasikan bilangan dari hasil operasi terhadap elemen-elemen kombinasi

Domain : Himpunan nilai-nilai "masukan" tempat fungsi tersebut terdefinisi (ada)

E

Elemen : Objek-objek matematika tertentu yang membentuk himpunan

Elips : Gambar yang menyerupai lingkaran yang telah dipanjangkan ke satu arah

Empiris : Hasil dari suatu percobaan

F

Faktorial : Hasil perkalian antara bilangan bulat positif yang kurang dari atau sama dengan *n*

Frekuensi : Daftar nilai data yang disertai dengan nilai frekuensi yang sesuai

Fungsi : Pemetaan setiap anggota sebuah himpunan kepada anggota himpunan yang lain

G

Geologi : Ilmu (sains) yang mempelajari bumi, komposisinya, struktur, sifat-sifat fisik, sejarah, dan proses pembentukannya

Geometri : Cabang matematika yang bersangkutan dengan pertanyaan bentuk, ukuran, posisi relatif gambar, dan sifat ruang

Gradien : Ukuran kemiringan atau kecondongan suatu garis

Grafik : Kumpulan data dari beberapa tabel yang disajikan atau ditampilkan dalam bentuk gambar

H

Himpunan : Kumpulan objek yang memiliki sifat yang dapat didefinisikan dengan jelas

Horizontal : Garis mendatar

I

Identitas : Operasi suatu bilangan yang hasilnya bilangan itu sendiri
Interpretasi : Kemampuan seseorang untuk memahami sesuatu yang sudah didapatkan atau di rekam, diubah atau dapat disusun dalam bentuk atau cara lain
Interval : Suatu himpunan bilangan real dengan sifat bahwa setiap bilangan yang terletak di antara dua bilangan dalam himpunan itu juga termasuk ke dalam himpunan
Invers : Sebuah fungsi yang berkebalikan dari fungsi asalnya
Irisan : Dua himpunan yang bagian-bagiannya menjadi anggota dari keduanya
Irrasional : Bilangan riil yang tidak bisa dibagi (hasil baginya tidak pernah berhenti)

K

Keliling : Jumlah sisi-sisi pada bangun dua dimensi
Kodomain : Seluruh anggota himpunan daerah kawan
Kombinasi : Menggabungkan beberapa objek dari suatu kumpulan tanpa memperhatikan urutannya
Kompleks : Bilangan yang terdiri dari 2 bagian yaitu bagian riil dan bagian imajiner
Komplemen : Himpunan semua elemen dari S yang tidak ada di himpunan A
Komutatif : Operasi hitung dua buah bilangan yang apabila ditukar posisinya, hasilnya tetap sama
Kongruen : Keadaan dua bangun datar yang sama dan sebangun
Konjungsi : Pernyataan majemuk dengan kata hubung “dan”
Konklusi : Pernyataan yang dihasilkan berdasarkan data yang terdapat dalam premis-premis
Konstan : Suatu nilai tetap
Kontekstual : Konsep pembelajaran yang menghubungkan materi pelajaran dengan konteks kehidupan nyata yang dialami peserta didik dalam kehidupan sehari-hari
Kontraposisi : Suatu pernyataan Implikasi baru dari suatu pernyataan implikasi
Konvers : Perubahan dari satu sistem ke sitem yang lain
Kuadrat : Hasil perkalian antara suatu bilangan dengan bilangan itu sendiri

Kuartil : Bilangan yang digunakan untuk membagi sekumpulan data menjadi empat bagian (sama banyak), atau perempat
Kurva : Objek yang mirip dengan garis yang tidak harus lurus

L

Linear : Sebuah persamaan aljabar, yang tiap sukunya mengandung konstanta, atau perkalian konstanta dengan variabel tunggal
Logika : Ilmu yang membahas tentang "ketepatan"
Luas : Besar area

M

Masalah : Suatu pertanyaan yang menunjukkan adanya tantangan, tidak mudah diselesaikan menggunakan prosedur yang telah diketahui, dan memerlukan perencanaan yang benar didalam proses penyelesaiannya
Matematika : Ilmu tentang kuantitas, struktur, ruang, dan perubahan
Median : Nilai tengah data setelah diurutkan
Metode : Prosedur atau cara yang ditempuh untuk mencapai tujuan tertentu
Model : Rencana, representasi, atau deskripsi yang menjelaskan suatu objek, sistem, atau konsep, yang sering kali berupa penyederhanaan atau idealisasi
Modus : Nilai yang sering muncul dalam suatu kelompok data

N

Negasi : Ingkaran
Noktah : Titik yang digunakan dalam pelajaran matematika
Notasi : Lambang fungsi (pemetaan)

P

Peluang : Cara untuk mengungkapkan pengetahuan atau kepercayaan bahwa suatu kejadian akan berlaku atau telah terjadi

Pencilan : Datum yang menyimpang sangat jauh dari datum-datum lainnya di dalam satu kumpulan datum
Permil : Perseribu
Permutasi : Susunan unsur berbeda yang dibentuk dari n unsur, diambil dari n unsur atau sebagian unsur
Persen : Perseratus
Persentil : Pembagian n data terurut menjadi 100 bagian sama banyak
Pythagoras : Suatu aturan matematika yang dapat digunakan untuk menentukan panjang salah satu sisi dari sebuah segitiga siku-siku
Polygon : Bentuk datar yang terdiri dari garis lurus yang bergabung untuk membentuk rantai tertutup atau sirkuit
Ponens : Pengasingan atau penegasan akibat
Prapeta : Daerah asal
Premis : Pernyataan-pernyataan, data, bukti atau dasar yang digunakan untuk menarik suatu kesimpulan
Prosedur : Langkah atau urutan atau cara yang digunakan untuk menyelesaikan tugas-tugas matematika yang mencakup langkah demi langkah dalam melakukan tugas

R

Range : Jangkauan
Rasional : Bilangan yang dapat dinyatakan sebagai a/b di mana a, b bilangan bulat dan b tidak sama dengan 0
Relasi : Aturan yang menghubungkan anggota pada suatu himpunan dengan anggota himpunan lainnya
Rerata : Nilai rata-rata dari beberapa buah data

S

Silogisme : Suatu proses berfikir dimana bertolak dari satu atau lebih (premis)
Skala : Perbandingan antara jarak pada gambar dengan jarak yang sebenarnya
Statistika : Cabang ilmu matematika terapan yang terdiri dari teori dan metoda mengenai bagaimana cara mengumpulkan, mengukur, mengklasifikasi, menghitung, menjelaskan, mensintesis, menganalisis, dan menafsirkan data yang diperoleh secara sistematis

Substitusi : Rumus yang digunakan dalam ilmu Matematika untuk menyelesaikan suatu persoalan dengan cara menggabungkan persamaan-persamaan yang telah diketahui

T

Teorema : Sebuah pernyataan, sering dinyatakan dalam bahasa alami, yang dapat dibuktikan atas dasar asumsi yang dinyatakan secara eksplisit ataupun yang sebelumnya disetujui

V

Variabel : Nilai yang dapat berubah dalam suatu cakupan soal atau himpunan operasi yang diberikan
Vertikal : Garis dengan posisi tegak lurus
Volume : Kapasitas

PROFIL PENULIS

Dr. Andi Mulawakkan Firdaus, M.Pd, Lahir di Bulukumba 09 Juli 1989, beliau menempuh pendidikan dasar di SD 185 Bialo (tamat 2002); SMP Negeri 2 Gangking (tamat 2004); SMA Negeri 1 Bulukumba (tamat 2007); Menyelesaikan Program Sarjana Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Makassar tahun 2012; dan Program Magister Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Surabaya tahun 2014. Doktor di bidang Pendidikan Matematika lulusan Program Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya Tahun 2021 dengan meraih presetasi Mahasiswa pertama yang tidak promosi doktor di program studi Pendidikan matematika dengan menerbitkan 2 artikel scopus Q3. Saat ini beliau mengajar di Program Studi Pendidikan Matematika FKIP serta menjabat sebagai Ketua Divisi Kurikulum dan MBKM Universitas Muhammadiyah Makassar. Beliau aktif sebagai pemateri pada pelatihan Guru-guru SD, SMP dan SMA. Beliau aktif sebagai penulis artikel pada jurnal nasional terakreditasi dan jurnal Internasional bereputasi terindeks Scopus. Beliau juga aktif sebagai pembicara pada seminar/konferensi pengembangan pendidikan matematika. Sejak tahun 2016 hingga kini terlibat sebagai pengelola dan reviewer jurnal nasional terakreditasi dan jurnal bereputasi terindeks scopus. Selain itu, beliau juga aktif sebagai Asesor Badan Akreditasi Nasional Sekolah/Madrasah (BAN S/M) Provinsi Sulawesi Selatan sejak tahun 2020.

Evi Novianty, S.Pd., M.Pd, Lahir di Gowa pada tahun 1996, kabupaten Gowa Provinsi Sulawesi Selatan. ia tamat sekolah dasar tahun 2007, tamat SMP Negeri 1 Pallangga tahun 2010, dan tamat SMA yapip Makassar tahun 2013. Menyelesaikan pendidikan S1 pendidikan matematika (S.Pd) di Universitas Muhammadiyah Makassar tahun 2017, meraih gelar magister pendidikan (M.Pd) bidang pendidikan matematika di Universitas Negeri Makassar tahun 2020, dengan judul tesis “profil reversibilitas dalam menyelesaikan masalah matematika ditinjau dari tipe kepribadian pada siswa kelas 8 SMP Negeri 1 Pallangga”. Dan semenjak tahun 2021 sampai sekarang menjadi dosen tetap di STKIP Paris Barantai Kotabaru Provinsi Kalimantan Selatan.