

MODEL PEMBELAJARAN BERBASIS MATHEMATICAL PROBLEM

(Dilengkapi Worksheet)

Dr. Sriyanti Mustafa, M.Pd
Vernita Sari, S.Pd., M.Pd
Dr. Baharullah, M.Pd

Kata Pengantar

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala petunjuk dan kemudahan yang diberikan sehingga buku “*Model Pembelajaran Berbasis Mathematical Problem*” ini dapat selesai dengan baik. Buku ini disusun sebagai panduan teknis memahami model pembelajaran matematika yang dapat meningkatkan kemampuan berpikir matematis peserta didik sekolah menengah atas.

Buku ini secara khusus menguraikan pengembangan model pembelajaran berbasis masalah dalam pembelajaran matematika, yaitu spesifikasi pada masalah matematika (*mathematical problem*). *Mathematical problem* ditandai dengan penyajian masalah matematika dengan menggunakan *student worksheet*. Masalah matematika yang disajikan dalam *worksheet* memuat soal/masalah yang telah dipilih/diseleksi dengan pertimbangan pada masalah tersebut dapat mengakomodir kemampuan berpikir matematis peserta didik.

Semoga buku ini bermanfaat, sehingga pembelajaran matematika semakin menyenangkan.

Parepare, Juni 2017

Tim Penyusun

Daftar Isi

Halaman

Halaman Sampul	i
Kata Pengantar	ii
Daftar Isi.....	iii
Daftar Tabel.....	iv
Daftar Gambar.....	v
I. PENDAHULUAN.....	1
A. Konsep Dasar Model Pembelajaran	1
B. Jenis-jenis Model Pembelajaran	2
II. MODEL PEMBELAJARAN BERBASIS	
<i>MATHEMATICAL PROBLEM</i>	4
A. Pengertian Model Pembelajaran Berbasis <i>Mathematical Problem</i>	4
B. Ciri-ciri Model Pembelajaran Berbasis <i>Mathematical Problem</i>	5
C. Sintaks Model Pembelajaran Berbasis <i>Mathematical Problem</i>	6
III. <i>STUDENT WORKSHEET</i>	9
A. Pengembangan Model Pembelajaran Berbasis Masalah	9
B. Pengembangan <i>Worksheet</i>	11
C. Konsep Berpikir Matematis.....	13
IV. PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN	
BERBASIS <i>MATHEMATICAL PROBLEM</i>	
DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA	15
V. MASALAH MATEMATIKA	23
A. Bentuk Pangkat.....	26
B. Bentuk Akar.....	41
C. Logaritma.....	49
BIG ACTIVITY BOOK (Worksheet)	52
REFERENSI	118

Daftar Tabel

Halaman

Tabel 1: Sintaks Model Pembelajaran Berbasis <i>Mathematical Problem</i>	7
Tabel 2: Sintaks dalam Pembelajaran Matematika	16

Daftar Gambar

	<i>Halaman</i>
Gambar 1: Sajian Awal <i>Worksheet</i>	11
Gambar 2: Sajian Aktivitas <i>Worksheet</i>	12
Gambar 3: Sajian Akhir/Kesimpulan	12
Gambar 4: Sintaks Model Pembelajaran Berbasis <i>Mathematical Problem</i>	15
Gambar 5: Ilustrasi Fase Orientasi	17
Gambar 6: Ilustrasi Fase Organisasi.....	17
Gambar 7: Ilustrasi Fase Membimbing	18
Gambar 8: Ilustrasi Fase Mengembangkan (Unjuk Kerja)	18
Gambar 9: Identifikasi Masalah	19
Gambar 10: Pengelompokkan Masalah 1	19
Gambar 11: Pengelompokkan Masalah 2.....	20
Gambar 12: Ilustrasi Masalah Kesebangunan	20
Gambar 13: Kesimpulan.....	21
Gambar 14: Ilustasi Struktur Berpikir Matematis Masalah Kesebangunan	22
Gamabr 15: Petunjuk Istilah.....	23
Gambar 16: Ruang Lingkup Pembelajaran Matematika	24
Gambar 17: Peta Konsep Matemaatika	25

I. PENDAHULUAN

A. Konsep Dasar Model Pembelajaran

Menurut Briggs (Gafur, 1984) model adalah seperangkat prosedur yang berurutan untuk mewujudkan suatu proses. Model-model pembelajaran biasanya disusun berdasarkan berbagai prinsip atau teori pengetahuan. Para ahli menyusun model pembelajaran berdasarkan prinsip-prinsip pembelajaran, teori psikologis, sosiologis, analisis sistem, atau teori-teori lain yang mendukung. Joyce, dkk (1986) menyusun model pembelajaran berdasarkan teori belajar.

Model pembelajaran merupakan pola umum perilaku pembelajaran untuk mencapai tujuan pembelajaran yang diharapkan. Joyce, dkk (1986) menyatakan bahwa model pembelajaran merupakan rencana atau pola yang dapat digunakan untuk membentuk kurikulum (rencana pembelajaran jangka panjang), merancang bahan-bahan pembelajaran, dan membimbing pembelajaran di kelas atau yang lain.

Sejalan dengan itu, Slavin (2009) mengungkap bahwa model pembelajaran merupakan suatu acuan kepada suatu pendekatan pembelajaran termasuk tujuannya, sintaksnya, lingkungannya, dan sistem pengelolanya. Sedangkan menurut Trianto (2009) model pembelajaran merupakan pendekatan yang luas dan menyeluruh serta dapat diklasifikasikan berdasarkan tujuan pembelajarannya, sintaks (pola urutannya), dan sifat lingkungan belajarnya.

Model pembelajaran dapat digunakan sebagai acuan perencanaan dalam pembelajaran di kelas ataupun tutorial untuk menentukan perangkat-perangkat pembelajaran yang sesuai dengan dengan bahan ajar yang diajarkan (Trianto, 2011).

Secara umum model pembelajaran memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

- 1) Berdasarkan teori pendidikan dan teori belajar dari para ahli tertentu. Misalnya, model pembelajaran kelompok yang disusun oleh Herbert Thelen berdasarkan teori John Dewey. Model ini dirancang untuk melatih partisipasi peserta didik dalam kelompok secara demokratis.
- 2) Mempunyai misi atau tujuan pendidikan tertentu, misalnya model pembelajaran berpikir induktif dirancang untuk mengembangkan proses berpikir induktif.

- 3) Dapat dijadikan pedoman untuk perbaikan kegiatan belajar mengajar di kelas, misalnya model Synectic dirancang untuk memperbaiki kreativitas dalam pelajaran mengarang.
- 4) Memiliki bagian-bagian model yang disebut (1) urutan langkah-langkah pembelajaran (*syntax*), (2) adanya prinsip-prinsip reaksi, (3) sistem sosial, (4) sistem pendukung. Keempat hal tersebut merupakan pedoman praktis bila guru akan melaksanakan suatu model pembelajaran.
- 5) Memiliki dampak sebagai akibat terapan model pembelajaran. Dampak tersebut meliputi dampak pembelajaran, yaitu hasil belajar yang dapat diukur; dan dampak pengiring, yaitu hasil belajar jangka panjang.
- 6) Membuat persiapan mengajar (desain instruksional) dengan pedoman model pembelajaran yang dipilihnya.

B. Jenis-jenis Model Pembelajaran

Sugiyanto (2008) mengemukakan bahwa ada banyak model pembelajaran yang dikembangkan oleh para ahli dalam usaha mengoptimalkan hasil belajar peserta didik. Model pembelajaran tersebut antara lain terdiri dari:

1) Model Pembelajaran Kontekstual

Model pembelajaran kontekstual merupakan konsep belajar yang mendorong guru untuk menghubungkan antara materi yang diajarkan dengan situasi dunia nyata peserta didik. Pembelajaran ini juga mendorong peserta didik membuat hubungan antara pengetahuan yang dimilikinya dan penerapannya dalam kehidupan peserta didik sehari-hari. Pengetahuan dan keterampilan peserta didik diperoleh dari usaha peserta didik mengkonstruksi sendiri pengetahuan dan keterampilan baru ketika peserta didik belajar.

2) Model Pembelajaran Kooperatif

Model pembelajaran kooperatif merupakan model pembelajaran yang merujuk pada berbagai macam metode pembelajaran dimana para peserta didik bekerja dalam kelompok-kelompok kecil untuk saling membantu satu sama lain dalam mempelajari materi pelajaran.

3) Model Pembelajaran Kuantum

Pembelajaran yang dirancang dari berbagai teori atau pandangan psikologi kognitif dengan menyingkirkan hambatan belajar melalui penggunaan cara dan alat yang tepat, sehingga peserta didik dapat belajar secara mudah dan alami

4) Model Pembelajaran Terpadu

Model pembelajaran terpadu merupakan pembelajaran yang memungkinkan peserta didik baik secara individual maupun kelompok aktif mencari, menggali, dan menemukan konsep serta prinsip secara holistik. Pembelajaran ini merupakan model yang mencoba memadukan beberapa pokok bahasan.

5) Model Pembelajaran Berbasis Masalah (*Problem Based Learning*–PBL)

Model pembelajaran berbasis masalah merupakan sebuah model pembelajaran yang menyajikan masalah kontekstual sehingga merangsang peserta didik untuk belajar. Fokusnya tidak banyak pada apa yang sedang dikerjakan peserta didik tetapi pada apa yang peserta didik pikirkan selama peserta didik mengerjakannya. Guru memfungsikan diri sebagai pembimbing dan fasilitator sehingga peserta didik dapat belajar untuk berfikir dan menyelesaikan masalahnya sendiri.

Berbagai teori dikemukakan para ahli tentang model pembelajaran. Secara khusus, Piaget, Vygotsky dan Konstruktivisme mengungkapkan bahwa pembelajaran berbasis masalah akan melibatkan peserta didik dalam proses mendapat informasi dan mengonstruksi pengetahuannya sendiri, sehingga pembelajaran akan menjadi bermakna.

II. MODEL PEMBELAJARAN BERBASIS *MATHEMATICAL PROBLEM*

A. Pengertian Model Pembelajaran Berbasis *Mathematical Problem*

Model pembelajaran berbasis *mathematical problem* merupakan model pembelajaran yang secara khusus dimodifikasi dari model pembelajaran berbasis masalah untuk pembelajaran matematika. Model pembelajaran ini menyajikan masalah kontekstual, sehingga merangsang peserta didik untuk belajar. Dalam kelas yang menerapkan pembelajaran berbasis masalah, peserta didik bekerja dalam tim untuk memecahkan masalah dunia nyata (*real world*). Pembelajaran Berbasis masalah merupakan salah satu model pembelajaran inovatif yang dapat memberikan kondisi belajar aktif kepada peserta didik. Melibatkan peserta didik untuk memecahkan suatu masalah melalui tahap-tahap metode ilmiah sehingga peserta didik dapat mempelajari pengetahuan yang berhubungan dengan masalah tersebut dan sekaligus memiliki keterampilan untuk memecahkan masalah. Lebih lanjut Boud dan Felletti, menyatakan bahwa pembelajaran berbasis masalah adalah suatu pendekatan pembelajaran dengan membuat konfrontasi kepada pembelajar (peserta didik) dengan masalah-masalah praktis, berbentuk *ill-structured*, atau *open ended* melalui stimulus dalam belajar.

Menurut Arends (Trianto, 2009) pembelajaran berbasis masalah merupakan suatu pendekatan pembelajaran di mana peserta didik mengerjakan permasalahan yang autentik dengan maksud untuk menyusun pengetahuan peserta didik sendiri, mengembangkan inkuiri dan keterampilan berpikir, mengembangkan kemandirian, dan percaya diri.

Pembelajaran berbasis masalah (*Mathematical Problem*) merupakan salah satu model pembelajaran inovatif yang dapat memberikan kondisi belajar aktif kepada peserta didik. Melibatkan peserta didik untuk memecahkan suatu masalah melalui tahap-tahap metode ilmiah, sehingga peserta didik dapat mempelajari pengetahuan yang berhubungan dengan masalah tersebut dan sekaligus memiliki keterampilan untuk memecahkan masalah (Ward, 2002; Stepien, dkk.,1993). Model pembelajaran ini melibatkan peserta didik dalam proses pembelajaran yang aktif, kolaboratif, berpusat

kepada peserta didik, yang mengembangkan kemampuan pemecahan masalah dan kemampuan belajar mandiri yang diperlukan untuk menghadapi tantangan dalam kehidupan dan karier, dalam lingkungan yang bertambah kompleks sekarang ini. Pembelajaran berbasis masalah menyarankan kepada peserta didik untuk mencari atau menentukan sumber-sumber pengetahuan yang relevan. Pembelajaran berbasis masalah memberikan tantangan kepada peserta didik untuk belajar sendiri. Dalam hal ini, peserta didik lebih diajak untuk membentuk suatu pengetahuan dengan sedikit bimbingan atau arahan guru sementara pada pembelajaran tradisional, peserta didik lebih diperlakukan sebagai penerima pengetahuan yang diberikan secara terstruktur oleh seorang guru.

B. Ciri-ciri Model Pembelajaran Berbasis Mathematical Problem

Pengembangan pembelajaran berbasis masalah telah memberikan model pengajaran memiliki karakteristik sebagai berikut:

- 1) Pengajuan pertanyaan atau masalah
Pembelajaran berdasarkan masalah mengorganisasikan pengajaran disekitar pertanyaan dan masalah yang dua-duanya secara sosial penting dan secara pribadi bermakna untuk peserta didik.
- 2) Berfokus pada keterkaitan antar disiplin
Meskipun pembelajaran berdasarkan masalah mungkin berpusat pada mata pelajaran tertentu (IPA, matematika, ilmu-ilmu sosial), masalah-masalah yang diselidiki telah dipilih benar-benar nyata agar dalam pemecahannya, peserta didik meninjau masalah itu dari banyak mata pelajaran.
- 3) Penyelidikan autentik
Pembelajaran berdasarkan masalah mengharuskan peserta didik melakukann penyelidikan autentik untuk mencari penyelesaian nyata terhadap masalah nyata.
- 4) Menghasilkan produk dan memamerkannya
Pembelajaran berdasarkan masalah menuntut peserta didik untuk menghasilkan produk tertentu dalam karya nyata. Produk tersebut bisa berupa laporan, model fisik, video maupun program komputer. Dalam pembelajaran kalor, produk yang dihasilkan adalah berupa laporan.
- 5) Kolaborasi dan kerja sama

Pembelajaran berdasarkan masalah dicirikan oleh peserta didik yang bekerja sama satu dengan yang lainnya, paling sering secara berpasangan atau dalam kelompok kecil.

Selain, karakteristik tersebut, terdapat ciri-ciri khusus lainnya, yaitu:

- 1) Pembelajaran berbasis masalah merupakan rangkaian aktivitas pembelajaran artinya dalam pembelajaran ini tidak mengharapkan peserta didik hanya sekedar mendengarkan, mencatat kemudian menghafal materi pelajaran, akan tetapi melalui strategi pembelajaran berbasis masalah peserta didik aktif berpikir, berkomunikasi, mencari dan mengolah data dan akhirnya menyimpulkannya
- 2) aktivitas pembelajaran diarahkan untuk menyelesaikan masalah. Strategi pembelajaran berbasis masalah menempatkan masalah sebagai kata kunci dari proses pembelajaran. Artinya, tanpa masalah tidak mungkin ada proses pembelajaran.
- 3) pemecahan masalah dilakukan dengan menggunakan pendekatan berpikir secara ilmiah. Berpikir dengan menggunakan metode ilmiah adalah proses berpikir deduktif dan induktif. Proses berpikir ini dilakukan secara sistematis dan empiris, sistematis artinya berpikir ilmiah dilakukan melalui tahapan-tahapan tertentu, sedangkan empiris artinya proses penyelesaian masalah didasarkan pada data dan fakta yang jelas.

C. Sintaks Model Pembelajaran Berbasis *Mathematical Problem*

Model pembelajaran berbasis *mathematical problem* efektif untuk pengajaran proses berpikir tingka tinggi, karena pembelajaran ini membantu peserta didik untuk memproses informasi yang sudah jadi dalam benaknya dan menyusun pengetahuan peserta didik sendiri tentang dunia sosial dan sekitarnya. Melalui model pembelajaran tersebut, peserta didik dilatih menyusun sendiri pengetahuannya, mengembangkan keterampilan memecahkan masalah. Selain itu, dengan pemberian masalah autentik, peserta didik dapat membentuk makna dari bahan pelajaran melalui proses belajar dan menyimpannya dalam ingatan sehingga sewaktu-waktu dapat digunakan lagi.

Langkah-langkah pemecahan masalah dalam pembelajaran berbasis masalah (Pannen, 2001), yaitu:

- 1) Mengidentifikasi masalah

- 2) Mengumpulkan data
- 3) Menganalisis data
- 4) Memecahkan masalah berdasarkan pada data yang ada dan analisisnya
- 5) Memilih cara untuk memecahkan masalah
- 6) Merencanakan penerapan pemecahan masalah
- 7) Melakukan uji coba terhadap rencana yang ditetapkan
- 8) Melakukan tindakan (*action*) untuk memecahkan masalah

Empat tahap yang pertama mutlak diperlukan untuk berbagai kategori tingkat berpikir, sedangkan empat tahap berikutnya harus dicapai bila pembelajaran dimaksudkan untuk mencapai keterampilan berpikir tingkat tinggi.

Sintaks model pembelajaran berbasis *mathematical problem* dalam kajian buku ini mengadaptasi dari sintaks model pembelajaran berbasis masalah. Berikut disajikan Tabel 2. 1 sintak model pembelajaran berbasis *mathematical problem*.

Tabel 2.1. Sintaks Pembelajaran Berbasis *Mathematical Problem*

Tahap	Aktivitas Pembelajaran
Tahap 1: Orientasi peserta didik pada masalah	Penjelasan tujuan pembelajaran, penjelasan logistik yang dibutuhkan, pengajuan fenomena atau demonstrasi atau cerita untuk memunculkan masalah, memotivasi peserta didik untuk terlibat dalam pemecahan masalah yang dipilih.
Tahap 2: Mengorganisasi peserta didik untuk belajar	Pendefinisikan dan mengorganisasikan tugas belajar yang berhubungan dengan masalah tersebut.
Tahap 3: Membimbing penyelidikan individual maupun kelompok.	Pengumpulan informasi yang sesuai, melaksanakan eksperimen, untuk mendapatkan penjelasan dan pemecahan masalah.
Tahap 4: Mengembangkan dan menyajikan hasil karya.	Perencanaan dan penyiapan karya yang sesuai seperti laporan, video, dan model serta membantu peserta didik untuk berbagi tugas dengan temannya.
Tahap 5: Menganalisis dan mengevaluasi proses pemecahan masalah.	Melakukan refleksi atau evaluasi terhadap penyelidikan peserta didik dan proses-proses yang peserta didik gunakan.

Menurut Pierce dan Jones (Howey et al, 2001) dalam pelaksanaan model pembelajaran tersebut terdapat proses yang harus dimunculkan, seperti: keterlibatan (*engagement*),

inkuiri dan investigasi (*inquiry and investigation*), kinerja (*performance*), Tanya jawab dan diskusi (*debriefing*). Proses tersebut diuraikan sebagai berikut:

- 1) Keterlibatan bertujuan untuk mempersiapkan peserta didik untuk berperan sebagai pemecah masalah (*self-directed problem solver*) yang bisa bekerja sama dengan pihak lain, menghadapkan peserta didik pada situasi yang mampu mendorong untuk mampu menemukan masalah, meneliti dan menyelesaikannya.
- 2) Inkuiri dan investigasi yang meliputi kegiatan mengeksplorasi berbagai cara menjelaskan dan implikasinya, serta kegiatan mengumpulkan dan mendistribusikan informasi. Kinerja bertujuan menyajikan temuan yang diperoleh.
- 3) Tanya jawab dan diskusi, yaitu menguji keakuratan dari solusi dan melakukan refleksi terhadap pemecahan masalah yang dilakukan.

III. STUDENT WORKSHEET

A. Pengembangan Model Pembelajaran Berbasis *Mathematical Problem*

Model pembelajaran berbasis *mathematical problem* diarahkan untuk menopang pencapaian secara optimal sasaran atau tujuan pembelajaran yang telah ditetapkan. Tujuan pembelajaran terbagi atas tujuan utama yang bersifat segera atau mendesak untuk dicapai (*instructional effect*) dan tujuan pengikut atau pengiring yaitu tujuan yang tidak segera dapat dicapai atau hasilnya tidak segera dapat dipetik setelah pembelajaran berlangsung, tetapi diharapkan dalam waktu yang relatif lama (*nurturant effect*).

Pembelajaran berbasis *mathematical problem* atau berdasarkan masalah matematika memiliki beberapa keunggulan sebagai berikut:

- 1) Pemecahan masalah matematika merupakan teknik yang cukup bagus untuk memahami kemampuan berpikir matematis peserta didik
- 2) Pemecahan masalah matematika dapat menantang kemampuan berpikir matematis peserta didik serta memberikan kepuasan untuk menemukan pengetahuan baru bagi peserta didik.
- 3) Pemecahan masalah matematika dapat meningkatkan aktivitas pembelajaran peserta didik, sehingga pembelajaran matematika dapat menyenangkan.
- 4) Pemecahan masalah matematika dapat membantu peserta didik menstansfer pengetahuan untuk memahami masalah dalam kehidupan nyata.
- 5) Pemecahan masalah matematika dapat membantu peserta didik mengembangkan pengetahuan baru dan bertanggung jawab dalam pembelajaran yang dilakukan.
- 6) Melalui pemecahan masalah bisa memperlihatkan kepada peserta didik bahwa setiap mata pelajaran (matematika, IPA, sejarah, dan lain sebagainya), pada dasarnya merupakan cara berpikir, dan sesuatu yang harus dimengerti oleh peserta didik, bukan hanya sekedar belajar dari guru atau dari buku-buku saja.

- 7) Pemecahan masalah matematika juga dapat mengembangkan kemampuan peserta didik untuk berpikir kritis dan mengembangkan kemampuan peserta didik untuk menyesuaikan dengan pengetahuan baru
- 8) Pemecahan masalah matematika dapat memberikan kesempatan pada peserta didik yang mengaplikasikan pengetahuan yang peserta didik miliki dalam dunia nyata.
- 9) Pemecahan masalah matematika dapat mengembangkan minat peserta didik untuk secara terus menerus belajar sekalipun belajar pada pendidikan formal telah berakhir.

Adapun kelemahan yang ditemukan dalam model pembelajaran ini sebagai berikut:

- 1) Jika peserta didik tidak memiliki minat atau tidak memiliki kepercayaan bahwa masalah yang dipelajari sulit untuk dipecahkan, maka peserta didik akan merasa sulit untuk mencoba
- 2) Membutuhkan cukup waktu untuk persiapan
- 3) Tanpa pemahaman mengapa peserta didik berusaha untuk memecahkan masalah yang sedang dipelajari, maka peserta didik tidak akan belajar apa yang ingin pelajari.

Selanjutnya pengembangan model pembelajaran berbasis *mathematical problem* sangat penting dilakukan khususnya dalam pembelajaran matematika. Istilah berbasis *mathematical problem* dimaksudkan sebagai orientasi dasar melakukan pengembangan model pembelajaran yang sarannya untuk meningkatkan kemampuan berpikir matematis peserta didik. *Mathematical problem* merupakan ciri khusus yang harus muncul pada aktivitas mental yang dilakukan guru dan peserta didik pada sajian buku ajar dan jurnal tugas matematika peserta didik (*student worksheet*).

Kajian ini dirancang khusus sesuai kebutuhan belajar matematika peserta didik, sehingga dapat berkontribusi terhadap pengembangan pembelajaran matematika yang menarik, menyenangkan dan mendukung pengembangan IPTEK.

Untuk meningkatkan kemampuan berpikir matematis peserta didik, maka perlu dilakukan upaya pengembangan terhadap model pembelajaran yang selama ini digunakan guru di sekolah, yaitu sajian materi dan tugas-tugas yang diberikan ke peserta didik sedapat mungkin yang dapat melatih peserta didik berpikir matematis.

Bahan ajar adalah seperangkat materi yang disusun secara sistematis baik tertulis maupun tidak, sehingga tercipta lingkungan atau suasana yang memungkinkan peserta didik untuk belajar. Jenis bahan ajar yang akan dibahas pada penelitian ini adalah buku ajar dan jurnal tugas matematika peserta didik (*student worksheet*).

B. Pengembangan Worksheet

Jurnal Tugas Matematika Peserta didik (*student worksheet*) adalah lembaran-lembaran berisi tugas yang harus dikerjakan peserta didik (Inra, 2010). Lembar kegiatan berisi petunjuk dan langkah-langkah untuk menyelesaikan suatu tugas. Suatu tugas yang diperintahkan dalam lembar kegiatan harus jelas kompetensi dasar yang akan dicapainya. Tugas-tugas sebuah lembar kegiatan tidak akan dapat dikerjakan oleh peserta didik secara baik apabila tidak dilengkapi dengan buku lain atau referensi lain yang terkait dengan materi tugasnya. Tugas-tugas yang diberikan kepada peserta didik dapat berupa teori dan atau praktik. Keuntungan adanya lembar kegiatan bagi guru adalah memudahkan guru dalam melaksanakan pembelajaran, sedangkan bagi peserta didik dapat membuat peserta didik belajar mandiri, belajar memahami, dan menjalankan tugas tertulis. Dalam menyiapkannya guru harus cermat, memiliki pengetahuan dan keterampilan yang memadai, karena sebuah lembar kegiatan harus memenuhi paling tidak kriteria yang berkaitan dengan tercapai atau tidaknya sebuah kompetensi dasar yang dikuasai peserta didik.

Student Worksheet dalam penelitian ini digunakan untuk membantu mendeskripsikan kemampuan berpikir matematis. *Worksheet* dirancang menjadi 3 (tiga) bagian yaitu sajian awal, sajian eksplorasi aktivitas/kegiatan, dan sajian akhir. Tampilan bagian awal disajikan seperti berikut:



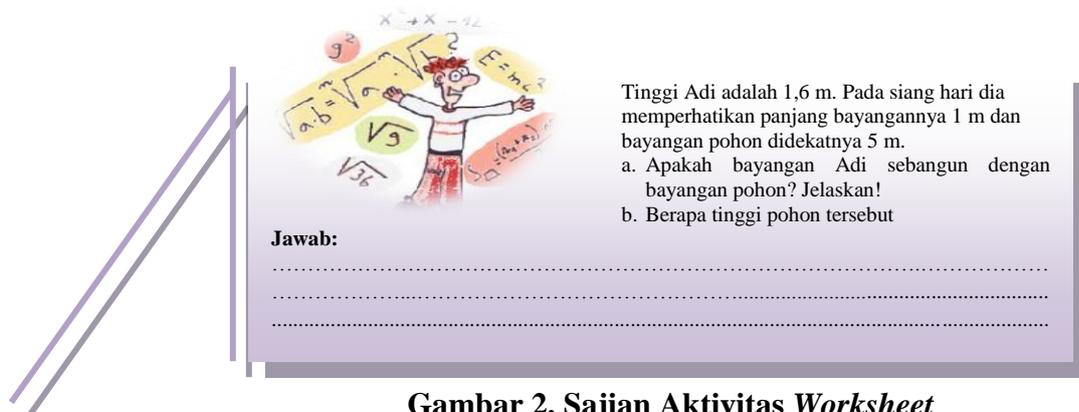
STUDENT WORKSHEET 1

Kemampuan Dasar : Memahami.....
Nama Peserta didik :
Kelas/Semester :

Gambar 1. Sajian Awal Worksheet

Sajian awal memuat identitas peserta didik serta kemampuan dasar yang diharapkan muncul pada aktivitas peserta didik menyelesaikan masalah matematika. Selanjutnya masalah matematika disajikan sesuai dengan kemampuan berpikir matematis peserta didik. Permasalahan disajikan dengan cara mengaitkan materi prasyarat dengan materi

yang sedang dipelajari peserta didik. Rancangan aktivitas disesuaikan dengan materi yang dikembangkan, dan memungkinkan peserta didik mengeksplorasi kemampuan berpikirnya. Berikut adalah salah satu tampilan aktivitas dalam *student worksheet*.



Gambar 2. Sajian Aktivitas Worksheet

Bagian kesimpulan disajikan untuk memberi kesempatan pada peserta didik mengemukakan hasil temuannya selama aktivitas yang telah dilakukan sebelumnya, dan bagian ini diharapkan menjadi matematika formal bagi peserta didik. Adapun penyajian kesimpulan adalah sebagai berikut:



Gambar 3. Sajian Akhir/Kesimpulan

Penggunaan *student worksheet* diharapkan dapat mengeksplorasi kemampuan berpikir peserta didik dalam menyelesaikan masalah matematika. Pada penelitian ini, pengembangan *student worksheet* memodifikasi komponen yang uraikan Dhoruri, dkk (2009) sebagai berikut:

- 1) Pembelajaran bersifat realistik.
- 2) Mengundang partisipasi aktif dan kreativitas peserta didik
- 3) Memungkinkan pengembangan model mulai dari tingkatan situasi, referensi, general, dan tingkatan formal.

- 4) Pengulangan untuk memperkuat pemahaman.
- 5) Umpan balik positif untuk mendorong dan meningkatkan pemahaman peserta didik.

C. Konsep Berpikir Matematis

Berbagai teori mengungkap pengertian berpikir, Solso (2008) berpendapat bahwa “berpikir adalah sebuah proses dari otak yang mengakses representasi sebelumnya untuk memahami atau menciptakan sebuah model baru jika memang belum ada”. Berpikir merupakan proses representasi mental baru melalui transformasi informasi dengan interaksi yang melibatkan atribut mental, seperti abstraksi, imajinasi, dan pemecahan masalah. Berpikir mencakup banyak aktivitas mental yang melibatkan kerja otak. Menurut Alvonco (2012) “berpikir adalah proses otak mengolah dan menerjemahkan informasi (stimulus) yang masuk melalui panca indra ke bagian otak sadar atau bawah sadar yang menghasilkan arti dan sejumlah konsep”. Berpikir memungkinkan seseorang untuk merepresentasikan dunia sebagai model dan memberikan perlakuan terhadapnya secara efektif sesuai dengan tujuan, rencana, dan keinginan. Dalam proses pembelajaran, aktivitas berpikir melibatkan seluruh pribadi, perasaan dan kehendak peserta didik.

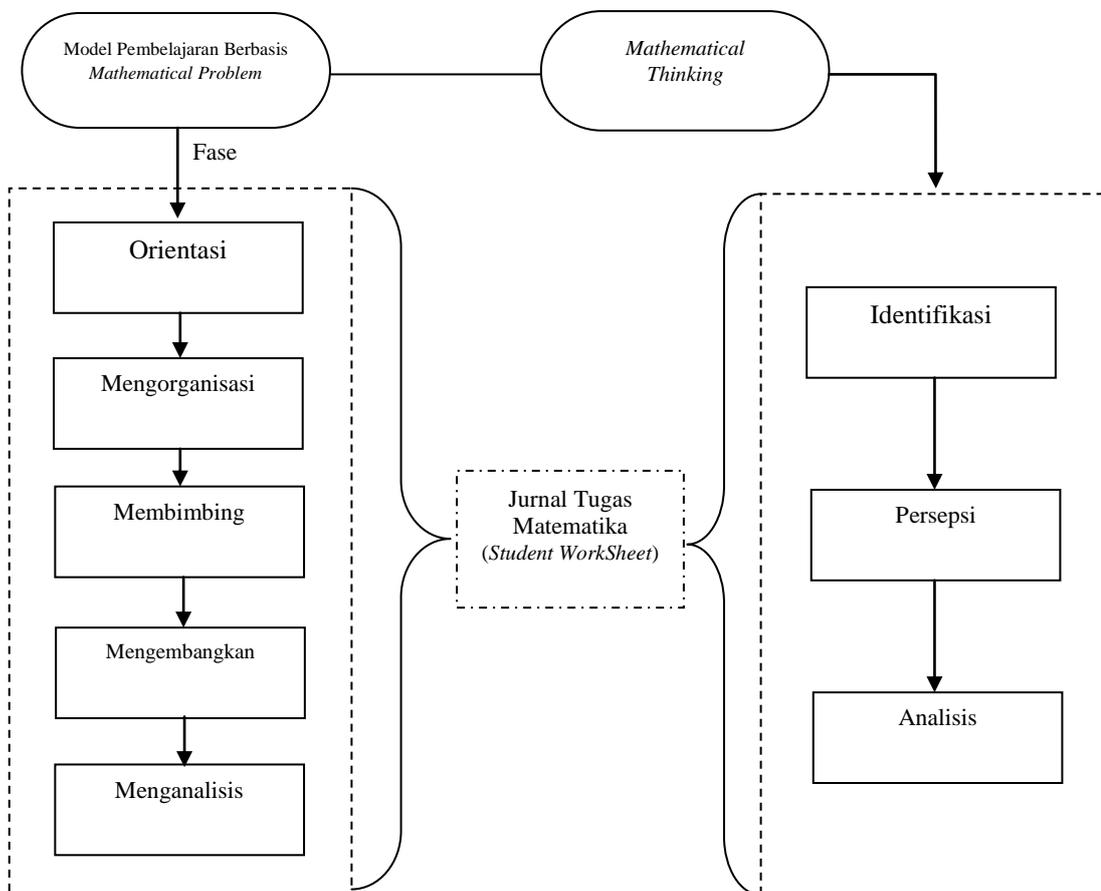
Berpikir dapat merujuk pada tindakan yang memproduksi pikiran atau proses produksi pemikiran (Wikipedia). Berpikir matematis dapat dipandang sebagai suatu cara untuk memahami masalah matematika dengan menyusun berbagai sumber kajian terhadap objek-objek matematika. Stacey (2009) mengungkapkan bahwa “berpikir matematis adalah suatu proses dan merupakan kegiatan yang sangat kompleks”, sehingga untuk memahaminya dapat dilakukan dengan memberikan contoh. Proses berpikir matematis menguraikan urutan-urutan dalam kegiatan berpikir, misalnya jika dalam diri peserta didik timbul suatu masalah yang harus dipecahkan, maka muncul suatu skema/bagan yang masih belum jelas. Selanjutnya skema/bagan tersebut dipecahkan atau dikaitkan, dan dibanding-bandingkan dengan teliti sampai menghasilkan suatu kesimpulan.

Kemampuan berpikir matematis peserta didik pada saat mengerjakan masalah matematika di *worksheet* dalam kajian ini mengadaptasi proses yang diungkap Mustafa (2015) sebagai berikut:

- 1) Mengidentifikasi masalah, dilakukan melalui kegiatan membuat persepsi, menganalisis dan menetapkan identitas. Persepsi didefinisikan sebagai tindakan menyusun, mengenali, dan menafsirkan berbagai informasi sensorik guna memberikan gambaran dan pemahaman tentang objek. Hal ini sejalan dengan ungkapan Solso (2008) bahwa persepsi mengacu pada interpretasi hal-hal yang dilihat, didengar, dirasakan, atau mengalami lebih dari sekadar stimulasi sensorik. Selanjutnya kejadian-kejadian sensorik tersebut diproses/dianalisis sesuai pengetahuan yang dimiliki peserta didik tentang objek yang diamatinya, kemudian menentukan identitas pada objek tersebut.
- 2) Mengelompokkan masalah, adalah kemampuan menghubungkan objek berdasarkan ciri-ciri persamaan atau perbedaan. Mengelompokkan masalah dilakukan melalui kegiatan membuat persepsi, menganalisis dan menetapkan kelompok.
- 3) Menyimpulkan masalah, yaitu gagasan yang tercapai pada akhir proses. Menyimpulkan masalah dilakukan melalui kegiatan mengaitkan skema, menganalisis dan menyimpulkan. Skema yang dimaksud adalah kategori pengetahuan yang membantu peserta didik dalam menginterpretasi dan memahami objek yang diamati. Menurut Marshall (2005) pembentukan skema melibatkan perhatian dan pemrosesan secara selektif, dan pengaitannya diproses secara simultan dan berurutan.

IV. PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN *MATHEMATICAL PROBLEM* DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Secara skematis sintaks model pembelajaran berbasis *mathematical problem* yang dapat meningkatkan kemampuan berpikir matematis peserta didik ditunjukkan pada Gambar 4.



Gambar 4. Sintaks Model Pembelajaran Berbasis *Mathematical Problem*

Uraian teknis pelaksanaan model tersebut dalam pembelajaran matematika sebagai berikut:

Tabel 2. Sintaks Penerapan dalam Pembelajaran Matematika

Fase	Indikator	Aktifitas / Kegiatan Guru	
		Guru	Peserta didik
1	Orientasi peserta didik pada masalah	Guru menjelaskan tujuan pembelajaran, menjelaskan logistik yang diperlukan, pengajuan masalah atau mendemonstrasikan cerita untuk memunculkan masalah, memotivasi peserta didik terlibat dalam aktivitas pemecahan masalah yang dipilih	Peserta didik menyimak penjelasan guru, dan membangun motivasi diri untuk terlibat selama proses pembelajaran matematika berlangsung, sehingga aktivitas pemecahan masalah dapat dipilih dengan tepat
2	Mengorganisasi peserta didik untuk belajar	<ul style="list-style-type: none"> • Guru membantu peserta didik mendefinisikan dan mengorganisasikan tugas belajar yang berhubungan dengan masalah tersebut. • Pada tahap ini guru mendistribusikan <i>worksheet</i> sebagai perangkat yang akan digunakan untuk memecahkan masalah matematika 	Peserta didik memosisikan diri dengan percaya diri dan mengorganisasikan tugas belajar sesuai dengan <i>worksheet</i> yang diterima.
3	Membimbing penyelidikan individual maupun kelompok.	Guru mendorong peserta didik untuk mengumpulkan informasi yang sesuai, melaksanakan eksperimen, untuk mendapat penjelasan pemecahan masalah.	<ul style="list-style-type: none"> • Peserta didik mengeksplorasi masalah matematika pada <i>worksheet</i> dengan cara mengumpulkan berbagai informasi yang terkait dengan masalah matematika yang akan diselesaikannya. • Pada tahap ini, peserta didik dapat menggunakan berbagai sumber bacaan/referensi terkait dengan masalah yang akan dipecahkan • Pada tahap ini, peserta didik memulai penyelidikan masalah matematika, sehingga melibatkan kemampuan berpikir matematisnya
4	Mengembangkan dan menyajikan hasil karya.	Guru membantu peserta didik dalam merencanakan dan menyiapkan karya yang sesuai seperti laporan, video, model dan membantu mereka untuk berbagai tugas dengan temannya	Setelah melakukan pengumpulan data/informasi yang relevan dengan masalah matematika pada <i>worksheet</i> , selanjutnya peserta didik menyiapkan langkah strategis untuk menyajikan hasil pemecahan masalahnya, dapat disajikan dalam bentuk laporan atau mengumpulkan lembar-lembar <i>worksheet</i> dalam bentuk jurnal belajar
5	Menganalisis dan mengevaluasi proses pemecahan masalah.	Guru membantu peserta didik melakukan refleksi atau evaluasi terhadap penyelidikan masalah dalam proses-proses yang digunakan.	Peserta didik melakukan refleksi atau membuat kesimpulan dan mengevaluasi hasil penyelidikan terhadap langkah-langkah penyelesaian masalah yang telah digunakan

Penerapan model pembelajaran berbasis *mathematical problem* dalam pembelajaran matematika dapat diilustrasikan sebagai berikut:

a. Fase Orientasi

Kegiatan yang dilakukan pada fase ini adalah orientasi peserta didik pada masalah matematika yang akan dibahas. Kegiatan orientasi diarahkan pada persiapan penjelasan tujuan pembelajaran, penjelasan perangkat pembelajaran yang dibutuhkan (termasuk tugas-tugas yang akan diberikan ke peserta didik), pengajuan fenomena atau demonstrasi atau cerita untuk memunculkan masalah, dan upaya memotivasi peserta didik untuk terlibat dalam pemecahan masalah matematika yang dipilih.

Ilustrasi model:



Guru model memberikan penjelasan tentang tujuan pembelajaran dan hal lain yang dibutuhkan dalam pembelajaran

Gambar 5. Ilustrasi Fase Orientasi

b. Fase Organisasi

Pada fase ini, guru melakukan pendefinisian dan pengorganisasian terhadap tugas belajar peserta didik yang berhubungan dengan masalah matematika yang akan dibahas.

Ilustrasi model:



Guru model mengorganisasikan peserta didik

Keterlibatan (engagement)

Gambar 6. Ilustrasi Fase Organisasi

c. Fase Membimbing

Pada fase ini, guru memberikan bimbingan atau membimbing penyelidikan terhadap tugas-tugas yang dikerjakan peserta didik baik secara individual maupun kelompok.

Ilustrasi model:



Gambar 7. Ilustrasi Fase Membimbing

d. Tahap Mengembangkan

Pada fase ini, guru melakukan pengembangan dan menyajikan hasil karya peserta didik.

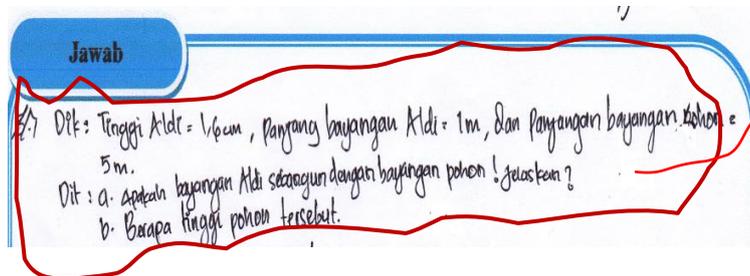
Ilustrasi model:



Gambar 8. Ilustrasi Fase Mengembangkan (Unjuk Kerja)

e. Fase Menganalisis

Pada fase ini, guru menganalisis dan mengevaluasi proses pemecahan masalah yang dilakukan peserta didik. Analisis terhadap kemampuan berpikir matematis peserta didik dieksplorasi dari sajian aktivitas *worksheet*. Berikut diuraikan kemampuan berpikir matematis pada Gambar 9.



Identifikasi masalah dilakukan dengan mengurai unsur-unsur yang diketahui pada soal dan unsur-unsur yang ditanyakan atau masalah yang akan dicarikan penyelesaiannya.

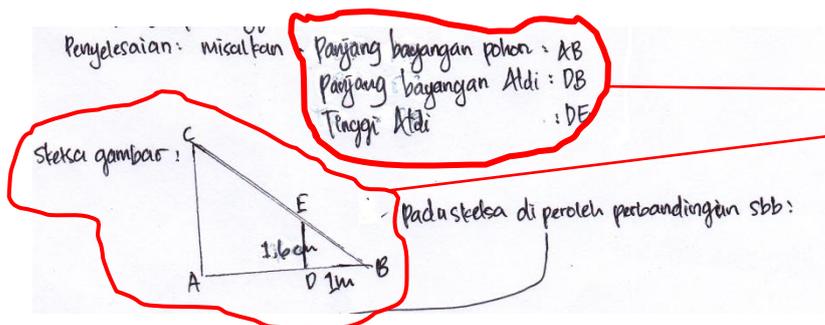
Gambar 9. Identifikasi Masalah

Proses identifikasi masalah yang dilakukan subjek diawali dengan membuat persepsi, yaitu melakukan tindakan mengenali masalah dengan cara menyusun/menafsirkan unsur-unsur yang diketahui, misalnya subjek menuliskan:

tinggi Aldi = 1,6 m

panjang bayangan Andi = 1m, sedangkan panjang bayangan pohon 5cm

Proses identifikasi yang dilakukan subjek, selanjutnya dihubungkan dengan objek gambar yang dianggap dapat memudahkan untuk menyelesaikan masalah. Cara ini termasuk dalam proses mengelompokkan, yaitu subjek berusaha menghubungkan objek dengan membuat simbol/model matematika, misalnya ditunjukkan pada Gambar 10.



Mengelompokkan menggunakan simbol, kemudian menyatakan perbandingan dalam bentuk ilustrasi gambar

Gambar 10. Pengelompokan Masalah 1

Proses pengelompokkan masalah dilakukan subjek dengan menggunakan simbol atas identifikasi yang telah dilakukan, misalnya:

tinggi Aldi → DE = 1,6 m
 panjang bayangan Aldi → DB = 1 m
 panjang bayangan pohon → AB = 5 cm

Simbol yang digunakan subjek sifatnya umum tidak terbatas, artinya subjek lain dapat saja melakukan cara yang sama tetapi dengan menggunakan simbol berbeda. Perbedaan dapat terletak pada kebiasaan subjek menyatakan masalah matematika. Selanjutnya pada ilustrasi gambar, subjek mencoba menempatkan simbol sesuai pengelompokan yang telah dilakukan. Cara ini dilakukan subjek, karena dianggap mudah mengarahkannya ke konsep kesebangunan.

Handwritten notes and calculations:

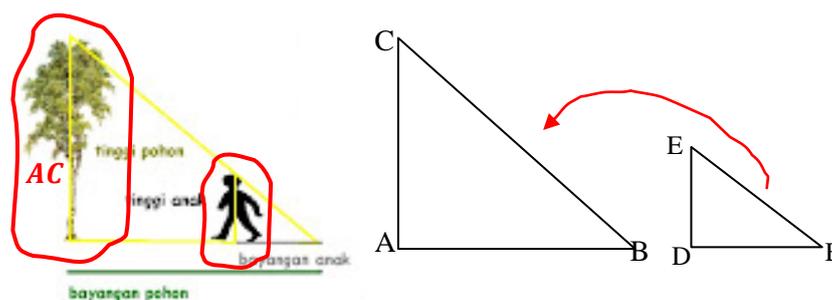
- $\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{DB}$
- $\frac{AC}{1.6} = \frac{B}{1}$
- $AC = 8$
- Because $AC = 8\text{ cm}$, $AB = 6\text{ cm}$, maka digunakan dalil Pythagoras untuk mencari pancing BC.
- $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$
- $= \sqrt{8^2 + 5^2}$
- $= \sqrt{64 + 25}$
- $= \sqrt{89}$
- Bayangan Andi sebangun dengan bayangan pohon karena perbandingan sisi yang bersesuaian.
- $\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{DB}$
- $\frac{8}{1.6} = \frac{B}{1}$
- $\frac{5}{1} = \frac{B}{1}$
- tinggi pohon adalah 8 cm

Red annotations and arrows:

- Arrow pointing to $AC = 8$ and $AB = 6$ with text: "subjek menyatakan perbandingan sisi yang bersesuaian untuk menuntun menyatakan bahwa bayangan Andi sebangun dengan bayangan pohon"
- Arrow pointing to the Pythagorean theorem calculation with text: "Bayangan Andi sebangun dengan bayangan pohon karena perbandingan sisi yang bersesuaian."

Gambar 11. Pengelompokan Masalah 2

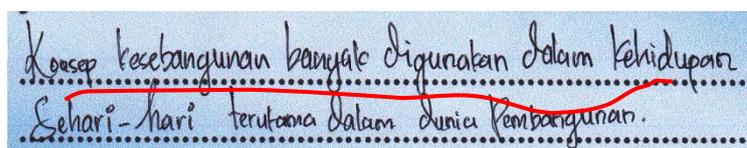
Pada segitiga ABC, tidak terdapat penjelasan subjek tentang AC tetapi berdasarkan lembar worksheet AC dianggap sebagai tinggi pohon yang selanjutnya dikonstruksi dengan cara perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian. Jika disajikan dalam kehidupan sehari-hari, ilustrasi gambar subjek ditunjukkan sebagai berikut:



Gambar 12. Ilustrasi Masalah Kesebangunan

Konstruksi Gambar 12 diperoleh AC (tinggi pohon) bersesuaian dengan DE tinggi Andi, dan AB (bayangan pohon) bersesuaian dengan DB (bayangan Andi), sehingga diperoleh $\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{DB}$ artinya terjadi kesebangunan. Selanjutnya untuk menentukan tinggi pohon yang sebenarnya dapat menggunakan dalil pythagoras.

Pada proses akhir, subjek membuat kesimpulan tentang penerapan konsep kesebangunan dalam penyelesaian masalah seperti Gambar 13.



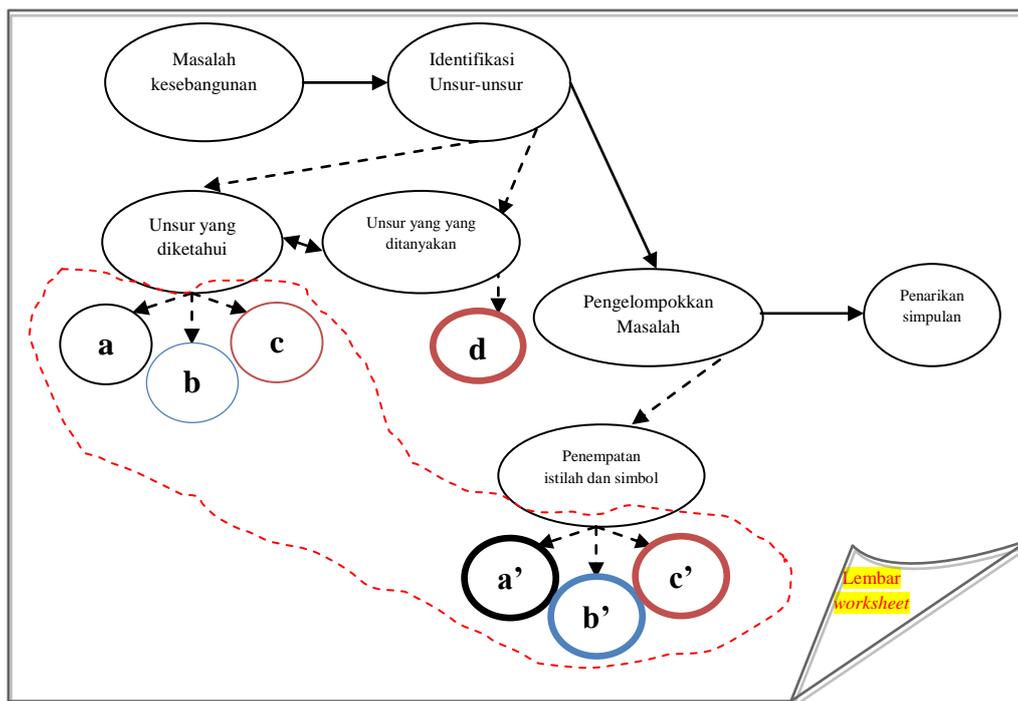
Konsep kesebangunan banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari terutama dalam dunia pembangunan.

Gambar 13. Kesimpulan

Kesimpulan yang dibuat subjek tentang kesebangunan diarahkan pada penerapannya dalam kehidupan sehari-hari. Hal ini didasari pada masalah yang telah diselesaikan, yaitu mengonstruksi masalah tinggi bayangan manusia dengan bayangan benda-benda disekitarnya (misalnya pohon). Proses penyelesaian masalah yang dilakukan peserta didik tersebut dalam lembar *worksheet* mengindikasikan adanya proses berpikir matematis yang secara eksplisit menunjukkan kemampuan peserta didik dapat membuat abstraksi terhadap masalah matematika. Tall (2002) mengungkap bahwa jika seorang peserta didik mengembangkan kemampuannya secara sadar membuat abstraksi dari situasi matematika, maka peserta didik tersebut telah mencapai tingkat lanjutan dari pemikiran matematis. Pencapaian kemampuan dalam membuat abstraksi ini menjadi tujuan yang paling penting dari pendidikan matematika. Abstraksi merupakan proses konstruksi yang utama dalam membangun struktur mental dari struktur matematika (Tall, 2002).

Selanjutnya, kemampuan berpikir matematis yang dilakukan peserta didik sejalan yang diungkap Mustafa (2015). Dalam mengidentifikasi masalah, peserta didik melakukan dengan cara menentukan terlebih dahulu unsur-unsur yang diketahui, memberi istilah atau simbol matematika, kemudian merancang penyelesaiannya. Pada tahap pengelompokkan, peserta didik menempatkan beberapa istilah dan membuat penyajian dalam bentuk sederhana, misalnya membuat ilustrasi gambar sehingga lebih menuntun peserta didik ke arah penyelesaian masalah. Pada tahap ini, peserta didik dapat mengonstruksi gambar dengan membawa masalah ke kehidupan sehari-hari. Tahap akhir penyelesaian masalah yang dilakukan peserta didik adalah membuat kesimpulan. Kesimpulan merupakan gagasan akhir yang diperoleh peserta didik berdasarkan langkah-langkah penyelesaian masalah yang telah dilakukan.

Struktur kemampuan berpikir matematis peserta didik dengan menggunakan lembar *worksheet* digambarkan sebagai berikut:



Gambar 14. Ilustrasi Struktur Berpikir Matematis Masalah Kesebangunan

Keterangan:

a = tinggi Andi

b = panjang/tinggi bayangan Andi

c = panjang/tinggi bayangan pohon

$a' = DE = 1,6 m$

$b' = DB = 1m$

$c' = AB = 5cm$

Kemampuan berpikir matematis peserta didik dieksplorasi sesuai hasil pekerjaan yang dilakukan pada lembar *worksheet*. Lembar *worksheet* berisi tahapan penyelesaian masalah yang dilakukan peserta didik memuat semua ide/gagasan pengetahuan yang telah dimiliki sebelumnya. Peserta didik memiliki kebebasan untuk mengungkap pengetahuan yang dimilikinya ke dalam lembar *worksheet*, dan apabila dianggap perlu untuk mendalami maka dilakukan *interview*. *Interview* dilakukan untuk mendapatkan informasi tambahan mengenai langkah-langkah penyelesaian masalah yang dilakukan peserta didik, sehingga diperoleh keakuratan data pada kemampuan berpikir matematis peserta didik.

Uraian di atas merupakan salah satu contoh analisis terhadap hasil pekerjaan peserta didik pada lembar *worksheet*. Cara ini dapat dilakukan guru untuk memahami kemampuan berpikir matematis peserta didik. Sebagai langkah awal guru dapat menerapkan langkah-langkah model pembelajaran berbasis *mathematical problem*. Model pembelajaran ini akan membantu guru mengamati aktivitas peserta didik selama proses pembelajaran berlangsung

V. MASALAH MATEMATIKA

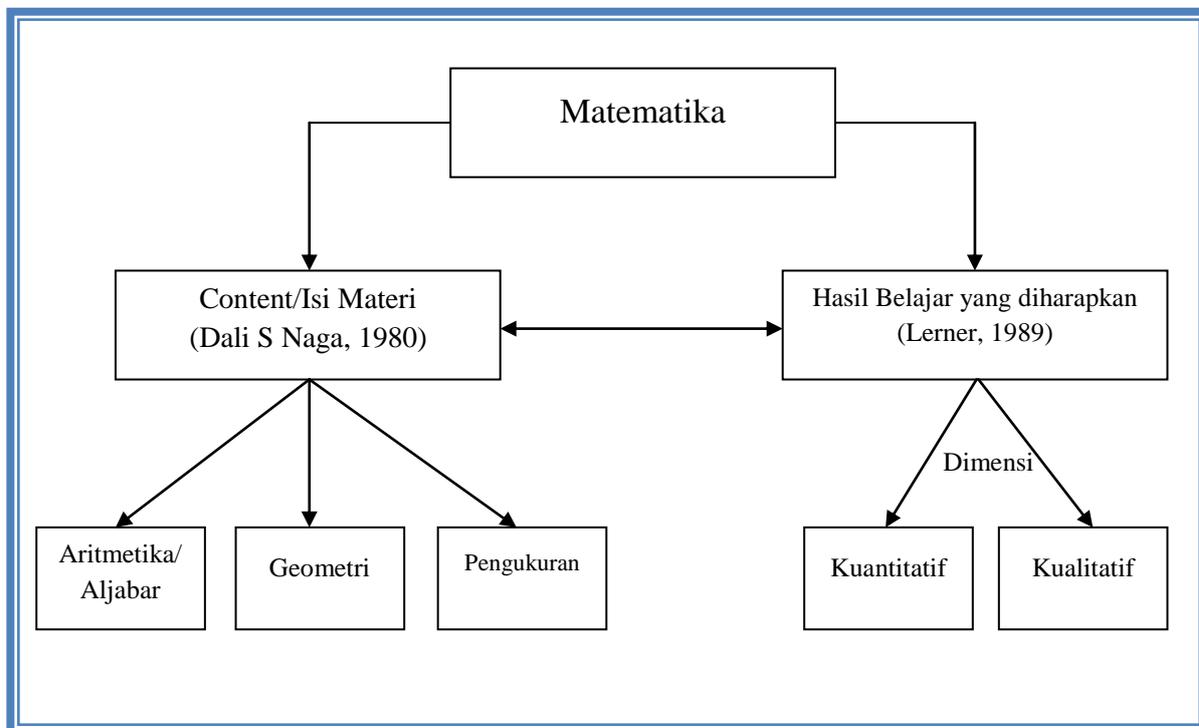
Pada bab ini diuraikan materi ajar matematika. Untuk memudahkan membaca dan memahami pembahasan tersebut, maka disajikan petunjuk yang merupakan inti dari isi bab tersebut. Adapun isi pembahasan terdiri atas beberapa bagian sebagai berikut:



Gambar 15. Petunjuk Istilah

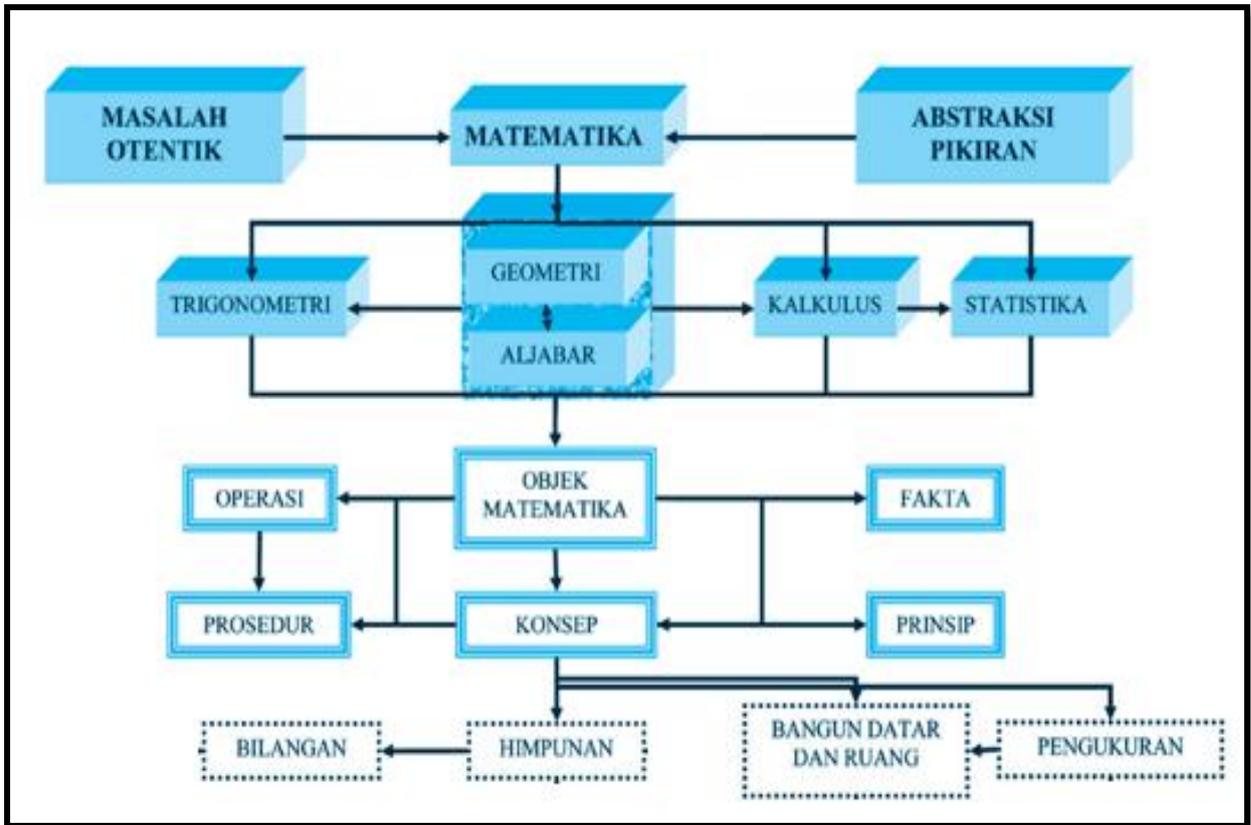
Ruang Lingkup Pembelajaran Matematika

(Sriyanti Mustafa, 2016)

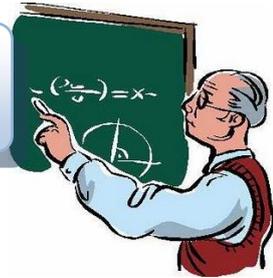


Gambar 16. Ruang Lingkup Pembelajaran Matematika

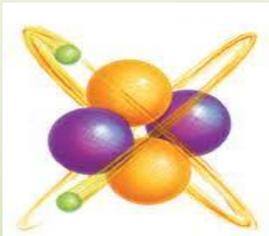
PETA KONSEP MATEMATIKA SMA (Buku Peserta didik Kelas X)



Gambar 17. Peta Konsep Matematika



A. Bentuk Pangkat



Apakah Kamu tahu berapa kecepatan cahaya dan massa sebuah atom hidrogen??????

Kecepatan cahaya besarnya = 3×10^8 m/s sedangkan
Massa sebuah atom hidrogen = $1,67 \times 10^{-27}$ kg

Nah Coba kamu tuliskan !!!

3×10^8 =

$1,67 \times 10^{-27}$ =

Wah, panjang sekali ya !!!!

Jadi untuk menyederhanakan penulisannya kita bisa menggunakan notasi pangkat (eksponen).

Ide dasar perpangkatan adalah perkalian berulang sebuah bilangan dengan bilangan itu sendiri. Misalnya:

3^2 (baca: tiga pangkat dua) sama artinya dengan 3×3 ,
 3^3 (baca: tiga pangkat tiga) sama artinya dengan $3 \times 3 \times 3$,
 3^4 (baca: tiga pangkat empat) sama artinya dengan $3 \times 3 \times 3 \times 3$.

Dalam perpangkatan terdapat bilangan pokok dan pangkat. Penulisan 3^2 dibaca tiga pangkat dua, bilangan 3 disebut bilangan pokok, dan bilangan 2 disebut pangkat atau eksponen.

Perpangkatan bilangan terbagi atas dua bagian besar yaitu:

1. Bilangan dengan pangkat sebenarnya;

Bilangan ini hanya memuat bilangan yang berpangkat bilangan bulat positif.

- 4) Bilangan dengan pangkat tak sebenarnya;

Bilangan ini memuat:

- a). Pangkat bilangan bulat negatif

- b). Pangkat Nol
- c). Bilangan Pecahan berpangkat bilangan bulat
- d). Bilangan bulat berpangkat pecahan.

Perhatikan!!!

Secara umum, perpangkatan dapat ditulis:

a^n , a merupakan bilangan pokok dan n merupakan pangkat.

Pada perpangkatan, pangkat atau eksponen tidak hanya berupa bilangan bulat positif tetapi dapat pula berupa bilangan pecahan atau desimal, bilangan nol, dan bilangan bulat negatif.

Hal ini dapat kita lihat pada pembahasan berikut ini.

1. Pangkat Bilangan Bulat Positif

Misalkan perkembangan suatu bakteri setiap hari jumlahnya menjadi dua kali lipat dari jumlah pada hari sebelumnya. Jika sekarang populasi bakteri tersebut sama dengan satu juta maka bakteri tersebut pada:

satu hari berikutnya $= 2 \times 1 \text{ juta} = 2^1 \times 1 \text{ juta}$

dua hari berikutnya $= 2 \times 2 \times 1 \text{ juta} = 2^2 \times 1 \text{ juta}$

tiga hari berikutnya $= 2 \times 2 \times 2 \times 1 \text{ juta} = 2^3 \times 1 \text{ juta}$

empat hari berikutnya $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \text{ juta} = 2^4 \times 1 \text{ juta}$, dan seterusnya.

Contoh di atas memperlihatkan bentuk perpangkatan, yaitu: $2^1, 2^2, 2^3, 2^4$. Bentuk-bentuk tersebut merupakan perpangkatan dengan bilangan bulat positif. Perpangkatan dengan pangkat bilangan bulat positif dapat diperoleh dari perkalian berulang suatu bilangan.

Perhatikan ilustrasi berikut:

$$2 = 2^1$$

$$2 \times 2 = 2^2$$

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$$

atau

atau

atau

atau

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

Secara umum jika $a \in R$ (bilangan real) dan n bilangan bulat positif maka:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ faktor}}$$

Amati angka satuan sebuah bilangan berpangkat.

$$3^0 : \text{angka satuan} = 1$$

$$3^1 : \text{angka satuan} = 3$$

$$3^2 : \text{angka satuan} = 9$$

$$3^3 : \text{angka satuan} = 7$$

$$3^4 : \text{angka satuan} = 1$$

Setiap pangkat dari bilangan 3 bertambah 4, angka satuannya pasti sama, yaitu angka satuan dari:

$$3^0 = 3^4 = 3^8 = \dots = 1$$

$$3^1 = 3^5 = 3^9 = \dots = 3$$

$$3^2 = 3^6 = 3^{10} = \dots = 9$$

$$3^3 = 3^7 = 3^{11} = \dots = 7$$

Contoh 1

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

$$4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

$$(-6)^4 = (-6) \times (-6) \times (-6) \times (-6) = 1.296$$

Contoh 2:

Tuliskan bilangan 256 dalam bentuk bilangan bulat berpangkat bulat positif.

Jawab:

Untuk menjawab soal ini kita lakukan pembagian terus menerus hingga hasil bagi terakhir adalah 1

$$\begin{aligned} 256 &= 2^8 && \text{atau} \\ 256 &= 4^4 && \text{atau} \\ 256 &= 16^2 && \text{atau} \\ 256 &= (-16)^2 && \text{atau} \\ 256 &= (-4)^4 && \text{atau} \\ 256 &= (-2)^8 \end{aligned}$$

Ingat:

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 256} \\ \underline{2 } \\ 128 \\ \underline{2 } \\ 64 \\ \underline{2 } \\ 32 \\ \underline{2 } \\ 16 \\ \underline{2 } \\ 8 \\ \underline{2 } \\ 4 \\ \underline{2 } \\ 2 \\ \underline{2 } \\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \overline{) 256} \\ \underline{4 } \\ 64 \\ \underline{4 } \\ 16 \\ \underline{4 } \\ 4 \\ \underline{4 } \\ 1 \end{array}$$

 **Activity:***Cek Pemahaman!!!!*

● $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

Bilangan 2 dipangkatkan 3, artinya adalah bilangan 2 dikalikan dengan dirinya sendiri sebanyak 3 kali.

● $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

Bilangan -3 dipangkatkan 2, artinya adalah bilangan -3 dikalikan dengan dirinya sendiri sebanyak 2 kali.

Ayo coba soal berikut: Hitunglah bilangan-bilangan berpangkat di bawah ini:

- $2^5 - 3^3$
- $2^3 + 3^2 + 5^2$
- $3^4 - 2^4 + 5^3 - 7^2$
- $2^3 + 4^3 - 5^2 - 7^2$

Jawab:

-
-
-
-

2. Pangkat Bilangan Bulat Negatif

Bilangan dengan pangkat bulat negatif bukan merupakan bilangan berpangkat yang sebenarnya, misalnya 4^{-2} tidak dapat diartikan sebagai perkalian faktor-faktornya. Oleh karena itu bilangan dengan pangkat negatif sering disebut sebagai bilangan dengan pangkat tak sebenarnya.

Untuk menyatakan bilangan yang berpangkat bilangan bulat negatif dapat digunakan formula berikut ini:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ dengan } a \neq 0$$

Tidak semua pangkat bernilai positif. Beberapa pangkat adalah bulat negatif. Perhatikan pola bilangan berikut untuk menemukan nilai 10^{-1} dan 10^{-2} . Dengan memperluas pola yang ada, maka hasil yang dapat diperoleh adalah $10^{-1} = \frac{1}{10}$ dan $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$. Pada pola tersebut, apabila kamu kalikan bilangan pokok, pangkatnya akan naik satu. Sebagai contoh $10^3 \times 10 = 10^4$, sedangkan apabila kamu bagi dengan bilangan pokok, pangkatnya turun satu. Sebagai contoh, $10^{-2} : 10 = 10^{-3}$ Untuk setiap $a \in R$ dan $a \neq 0$ berlaku:

Jika analog dengan pembahasan bilangan berpangkat bulat positif kita dapat menyesuaikan bilangan bulat berpangkat bulat negatif seperti pada ilustrasi berikut ini:

3^{-2} (baca: tiga pangkat minus dua), berarti $(3^{-1}) \times (3^{-1})$
 3^{-3} (baca: tiga pangkat minus tiga), berarti $(3^{-1}) \times (3^{-1}) \times (3^{-1})$
 3^{-4} (baca: tiga pangkat minus empat), berarti $(3^{-1}) \times (3^{-1}) \times (3^{-1}) \times (3^{-1})$

Pada ilustrasi di atas, karena $(3^{-1}) = \frac{1}{3}$, maka penulisan dapat diubah sebagai berikut:

$$3^{-2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

$$3^{-4} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$$

Penulisan formula $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dengan $a \neq 0$ sering digunakan untuk mengubah bilangan bulat berpangkat positif menjadi negatif maupun sebaliknya.

Contoh 3:

Hitunglah bilangan-bilangan berpangkat di bawah ini:

- a. 5^{-2}
- b. 4^{-3}
- c. $(-7)^{-2}$
- d. $(-5)^{-3}$

Jawab:

Untuk menghitung bilangan berpangkat negatif, kita kita gunakan formula:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dengan $a \neq 0$

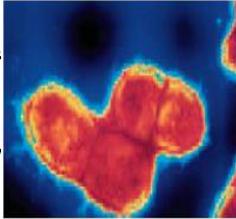
a. $5^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$
 $= \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

b. $4^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$
 $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

$$\begin{aligned} \text{c. } (-7)^{-2} &= \left(-\frac{1}{7}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{1}{7}\right) \times \left(-\frac{1}{7}\right) \\ &= \frac{1}{49} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } (-5)^{-3} &= \left(-\frac{1}{5}\right)^3 \\ &= \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right) \\ &= -\frac{1}{125} \end{aligned}$$

Activity:
Cek Pemahaman!



Sumber: Dit. PSMP, 2006

Ayo coba soal berikut:
Bakteri E.coli memiliki lebar 10-3 milimeter. Jarum pentul memiliki diameter 1 milimeter. Berapa banyak bakteri E.coli yang dapat mengisi diameter jarum tersebut.

Penyelesaian:

.....

.....

.....

.....

3. Bilangan Bulat Berpangkat Nol

Perhatikan pola bentuk pangkat berikut:

$$2^3 = 8$$

$$2^2 = 4$$

$$2^1 = 2$$

Berapakah 2^0 ?

Pada ruas kiri dari atas ke bawah, pangkatnya berkurang satu. Pada ruas kanan dari atas ke bawah selalu dibagi 2. Hal yang sama untuk pola bilangan berikut:

$$2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Berapakah 2^0 ?

Pada ruas kiri dari atas ke bawah, pangkatnya bertambah satu dan ruas kanan dari atas ke bawah selalu dikali 2.

Dengan demikian $2^0 = 1$.

Untuk menyatakan bilangan yang berpangkat nol dapat digunakan formula berikut ini:

Perhatikan kembali bentuk berikut:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Jika pada bentuk tersebut nilai m sama dengan nilai n maka $m - n = 0$ dan a^{m-n} merupakan bilangan berpangkat nol. Dengan demikian akan menghasilkan formula sebagai berikut:

$$a^0 = 1$$

dengan a bilangan real dan $a \neq 0$

Contoh 4:

Hitunglah bilangan-bilangan berpangkat di bawah ini:

- 5^0
- $(4)^{3-3}$
- $(-7)^0$
- $(-5)^{1+2-3}$

Jawab:

Dengan menggunakan formula bilangan bulat berpangkat nol, maka diperoleh:

- $5^0 = 1$
- $(4)^{3-3} = 4^0 = 1$
- $(-7)^0 = 1$
- $(-5)^{1+2-3} = (-5)^0 = 1$



Tugas Untukmu:

Buatlah masing-masing tiga contoh untuk setiap sifat bilangan berpangkat negatif dan berpangkat nol di buku latihanmu.

Bandingkan hasilnya dengan temanmu, kemudian laporkan hasilnya!

Refleksi:

- Biasanya penulisan bilangan yang cukup besar akan menjadi sederhana apabila ditulis dalam bentuk perpangkatan, misalnya 2.000.000 dapat ditulis sebagai 2×10^6 .
- Bagaimana suatu bilangan berpangkat bilangan negatif atau berpangkat nol, seperti 10^{-2} atau 7^0 ?

Gagasan-gagasan yang muncul dari sifat-sifat perpangkatan dengan pangkat bilangan bulat positif dapat digunakan untuk mengungkapkan arti pangkat bilangan negatif ataupun pangkat nol.

5) Bilangan Pecahan Berpangkat Bilangan Bulat

Pada bagian sebelumnya, kamu telah mempelajari bilangan bulat berpangkat bulat. Sekarang kamu akan mempelajari bilangan pecahan berpangkat bilangan bulat. Sifat-sifat yang berlaku pada bilangan bulat berpangkat bulat berlaku juga pada bilangan pecahan berpangkat bulat.

Perhatikan bentuk-bentuk pecahan berpangkat bulat berikut:

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{4}\right)^0 &= 1 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^3 &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} &= \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8} \\ \left(\frac{4}{3}\right)^3 &= \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} &= \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}\end{aligned}$$

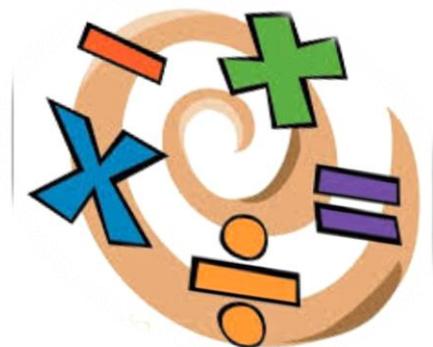
Berdasarkan uraian tersebut, bentuk pangkat dapat ditulis sebagai berikut:

1. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \dots \times \frac{a}{b}}_{\text{sebanyak } n \text{ buah}} = \frac{a^n}{b^n}$, dengan $a \neq 0, b \neq 0$ dan $n > 0$
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \underbrace{\frac{b}{a} \times \frac{b}{a} \times \dots \times \frac{b}{a}}_{\text{sebanyak } n \text{ buah}} = \frac{b^n}{a^n}$, dengan $a \neq 0, b \neq 0$ dan $n > 0$
3. $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$, dengan $a \neq 0$ dan $b \neq 0$

Contoh 5:

Hitunglah hasil dari perpangkatan bilangan-bilangan di bawah ini:

- a. $\left(\frac{2}{5}\right)^4$
- b. $\left(\frac{3}{10}\right)^4$
- c. $(0,2)^3$
- d. $\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}$



Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } \left(\frac{2}{5}\right)^4 &= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{16}{625} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \left(\frac{3}{10}\right)^4 &= \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{10 \times 10 \times 10 \times 10} \\ &= \frac{81}{10.000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } (0,2)^3 &= \left(\frac{2}{10}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \\ &= \frac{1 \times 1 \times 1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{125} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \left(\frac{1}{10}\right)^{-3} &= \frac{10}{1} \times \frac{10}{1} \times \frac{10}{1} \\ &= \frac{1.000}{1} \\ &= 1.000 \end{aligned}$$

5. Bilangan Bulat Berpangkat Pecahan

Jika kita memisalkan perkembangan jumlah bakteri konsisten dua kali lipat dari hari sebelumnya, maka jika suatu hari jumlah bakteri sama dengan 1 maka setelah n hari jumlah bakteri sama dengan $2^n \times 1 = 2^n$. Ini berarti bahwa setelah 1 hari banyak bakteri sama dengan 2^1 , setelah 2 hari sama dengan 2^2 , setelah empat hari sama dengan 2^4 . Bagaimana jika kita melihatnya setelah $\frac{1}{4}$ hari, $\frac{1}{2}$ hari, dan $\frac{3}{4}$ hari?

Berdasarkan rumusan bahwa setelah n hari banyak bakteri sama dengan 2^n , tentu dapat kita nyatakan bahwa setelah $\frac{1}{4}$ hari banyak bakteri sama dengan $2^{\frac{1}{4}}$, setelah $\frac{1}{2}$ hari banyak bakteri sama dengan $2^{\frac{1}{2}}$, dan setelah $\frac{3}{4}$ hari banyak bakteri sama dengan $2^{\frac{3}{4}}$.

Hal di atas menunjukkan adanya bilangan berpangkat pecahan. Lalu bagaimana nilai dari pangkat pecahan tersebut? Kalau Anda, mempunyai kalkulator yang mempunyai fasilitas (tombol) x^y , Anda dapat mencoba menghitung nilai dari $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{4}}$ dan $2^{\frac{3}{4}}$

Pangkat pecahan sering dilambangkan dengan tanda akar, yaitu $\sqrt{\quad}$

Jadi $4^2 \times 4^3 = 4^{2+3} = 4^5 = 1024$

Untuk perkalian bilangan berpangkat yang bilangannya pokoknya sama, berlaku sifat berikut:



Sifat 5.1:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

dengan a bilangan real dan m, n bilangan bulat positif

Agar kamu lebih memahami Sifat 5.1, pelajailah contoh soal berikut:

Contoh 7:

Sederhanakan bentuk-bentuk perkalian berikut:

1. $6^3 \times 6^4$
2. $(-4) \times (-4)^2$
3. $5^2 \times 3^3 \times 2$
4. $7a^3 \times b^4 \times 3a^2 \times b$

Jawab:

1. $6^3 \times 6^4 = 6^{3+4} = 6^7$
2. $(-4) \times (-4)^2 = (-4)^{1+2} = (-4)^3$
3. Oleh karena bilangannya pokoknya tidak sama, perkalian $5^2 \times 3^3 \times 2$ tidak dapat disederhanakan.
4. $7a^3 \times b^4 \times 3a^2 \times b = 7a^3 \times 3a^2 \times b^4 \times b$
 $= 21a^3 \times 3a^2 \times b^4 \times b$
 $= 21a^5b^5$

b. Sifat Pembagian Bilangan Berpangkat

Selain sifat perkalian bilangan berpangkat, sifat pembagian bilangan berpangkat juga telah kamu pelajari. Coba ingat kembali materi tersebut dan jelaskan dengan kata-katamu sendiri.

Perhatikan ilustrasi berikut:

$$\begin{aligned} \frac{5^6}{5^4} &= \frac{\overbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}^{6 \text{ faktor}}}{\underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5}_{4 \text{ faktor}}} \\ &= \underbrace{5 \times 5}_{2 \text{ faktor}} \\ &= 5^{6-4} \\ &= 5^2 \end{aligned}$$

Jadi $\frac{5^6}{5^4} = 5^{6-4} = 5^2$

Untuk Pembagian bilangan berpangkat, perhatikan sifat berikut:

Sifat 5.2:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

dengan a bilangan real yang tidak nol, dan m, n bilangan bulat positif yang memenuhi $m > n$

Contoh 8:

Sederhanakan pembagian-pembagian berikut:

- $\frac{6^{12}}{6^{10}}$
- $\frac{(-7)^8}{(-7)^3}$
- $24a^8 : 12a^3$
- $\frac{9^3}{6^2}$

Jawab:

Sederhanakan pembagian-pembagian berikut:

- $\frac{6^{12}}{6^{10}} = 6^{12-10} = 6^2$
- $\frac{(-7)^8}{(-7)^3} = (-7)^{8-3} = (-7)^5$



Tugas Untukmu:

- Panjang rusuk sebuah kubus adalah 5 cm, kemudian panjang rusuk kubus tersebut diperpanjang lagi menjadi 5 kali panjang rusuk semula. Berapa liter volume kubus yang baru?
- Sederhanakanlah $\left(\frac{m^{-4}}{n^3}\right)^{-2}$ dan nyatakan hasilnya dalam bentuk pangkat positif.

- c. $24a^8 : 12a^3 = \frac{24a^8}{12a^3} = 2a^{8-3} = 2a^5$
- d. $\frac{9^3}{6^2}$ Oleh karena bilangan pokoknya tidak sama, maka pembagian $\frac{9^3}{6^2}$ tidak dapat disederhanakan

c. Sifat Perpangkatan Bilangan Berpangkat

Masih ingatkah sifat perpangkatan bilangan berpangkat yang telah kamu pelajari? Coba jelaskan kembali olehmu.

Perhatikan Ilustrasi berikut:

$$\begin{aligned} (2^2)^3 &= \underbrace{(2^2) \times (2^2) \times (2^2)}_{3 \text{ faktor}} \\ &= \underbrace{(2 \times 2)}_{2 \text{ faktor}} \times \underbrace{(2 \times 2)}_{2 \text{ faktor}} \times \underbrace{(2 \times 2)}_{2 \text{ faktor}} \\ &= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{(3 \times 2) \text{ faktor}} \end{aligned}$$

Jadi, $(2^2)^3 = 2^{2 \times 3} = 2^{3 \times 2}$.

Sifat 5.3

$$(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{n \times m}$$

dengan a bilangan real dan m, n bilangan bulat positif

Contoh 9:

Sederhanakan perpangkatan-perpangkatan berikut.

- a. $(5^4)^2$
- b. $[(-6^3)]^5$
- c. $\frac{2^5 \times \{2^3\}^2}{2^4}$

Jawab:

- a. $(5^4)^2 = 5^{4 \times 2} = 5^8$
- b. $[(-6^3)]^5 = (-6)^{3 \times 5} = (-6)^{15}$
- c. $\frac{2^5 \times \{2^3\}^2}{2^4} = \frac{2^5 \times 2^6}{2^4}$
 $= \frac{2^{5+6}}{2^4}$
 $= \frac{2^{11}}{2^4}$

$$= 2^{11-4}$$

$$= 2^7$$

d. Sifat Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Berpangkat

Pelajari penjumlahan bilangan berpangkat berikut:

- $2^4 + 2^6 = 2^4 + 2^{4+2}$
 $= 2^4 + 2^4 \cdot 2^2$ (menggunakan Sifat 5.1)
 $= 2^4 (1 + 2^2)$ (menggunakan sifat distributif)
- $(-5)^6 + (-5)^9 = (-5)^6 + (-5)^{6+3}$
 $= (-5)^6 + (-5)^6 \cdot (-5)^3$ (menggunakan Sifat 5.1)
 $= (-5)^6 (1 + (-5)^3)$ (menggunakan sifat distributif)

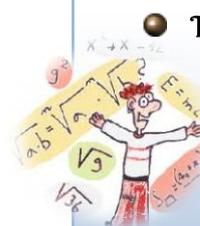
Kedua contoh tersebut memperjelas sifat penjumlahan bilangan berpangkat dengan bilangan pokok yang sama, yaitu sebagai berikut.

Sifat 5.4

$$a^m + a^n = a^n (1 + a^{m-n})$$

dengan a bilangan real dan m, n bilangan bulat positif yang memenuhi $m \geq n$.

Jika Tugas disamping kamu kerjakan dengan benar, diperoleh sifat pengurangan bilangan berpangkat dengan bilangan pokok yang sama, yaitu sebagai berikut:



Tugas Untukmu:

Diskusikan dengan teman sebangkumu, bagaimana sifat pengurangan bilangan berpangkat yang memiliki bilangan pokok yang sama.

Laporkan hasilnya di depan kelas!

Sifat 5.5

$$a^n - a^m = a^n (1 - a^{m-n}) \text{ atau } a^m - a^n = a^n (a^{m-n} - 1)$$

dengan a bilangan bulat dan m, n bilangan bulat positif yang memenuhi $m \geq n$.

Agar kamu lebih memahami Sifat 5.4 dan 5.5, pelajilah contoh soal berikut:

Contoh 10:

Sederhanakan perpangkatan-perpangkatan berikut.

- a. $a^5 + a^6$
- b. $b^{12} - b^8$

Jawab:

- a. $a^5 + a^6 = a^5 + a^{5+1} = a^5 + a^5 \cdot a = a^5 (1 + a)$
- b. $b^{12} - b^8 = b^{8+4} - b^8 = b^8 \cdot b^4 - b^8 = b^8 (b^4 - 1)$

**Diskusikan
dengan temanmu**

1. Tulis dalam bentuk paling sederhana dan nyatakan dalam pangkat positif:

a. $\frac{3^3}{3^{-2}}$, b. $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$, c. $\left(\frac{2^{-1}x}{y^3}\right)^{-2}$, d. $\frac{x^4 y}{x^3 y^{-2}}$

Jawab:

.....

.....

.....



2. Ketinggian suatu benda dapat ditentukan dengan menggunakan rumus gerak jatuh bebas, yaitu $h = \frac{1}{2}gt^2$. Dalam hal ini h = ketinggian benda, g = percepatan gravitasi bumi, dan t = waktu benda sampai jatuh ke tanah.

Sebuah benda dijatuhkan dari puncak sebuah gedung. Hasil pengukuran menunjukkan bahwa waktu benda sampai jatuh ke tanah adalah 4,9 detik. Jika percepatan gravitasi bumi di tempat itu $9,8 \text{ m/det}^2$, berapa meterkah tinggi gedung tersebut?

Jawab:

.....

.....

3. Sebuah bak mandi berbentuk kubus dan mempunyai panjang rusuk 9,2 dm. Berapa mililiter volume bak mandi tersebut?

Jawab:

.....

.....

B. Bentuk Akar

Pada pembahasan yang lalu, kita telah membahas tentang bentuk-bentuk perpangkatan dan operasi-operasinya. Dalam pembahasan ini akan dibahas bentuk-bentuk akar yang berhubungan dengan perpangkatan pecahan yang menggunakan semua sifat operasi perpangkatan tersebut.

BENTUK AKAR



1. Pengertian Bentuk Akar

- Untuk memahami pengertian bentuk akar, pelajari perhitungan-perhitungan berikut ini:

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$$

$$\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$$

Berapakah $\sqrt{49}$, $\sqrt{64}$, dan $\sqrt{81}$?

Perhitungan akar pangkat bilangan tersebut memenuhi definisi 5.1 berikut:

Definisi 5.1:

$$\sqrt{a^2} = a$$

jika $a \geq 0$, dan $-a$ jika $a < 0$

- Amatilah contoh-contoh berikut:

1. Misalkan $a = 2$ ($a > 0$)

$$\text{Nilai } \sqrt{a^2} = \sqrt{2^2} = 2$$

2. Misalkan $a = -2$ ($a < 0$)

$$\text{Nilai } \sqrt{a^2} = \sqrt{(-2)^2} = -(-2) = 2$$

Akar pangkat bilangan yang tidak memenuhi definisi dinamakan *bentuk akar*, seperti $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, dan $\sqrt{8}$. Bentuk akar tersebut merupakan *bilangan irrasional*. Bentuk akar adalah akar dari

Kegiatan:

Cek Pemahaman!!!!

Bentuk akar hanyalah sebagian kecil dari anggota-anggota himpunan bilangan irrasional. Contoh Bilangan irrasional yang bukan bentuk akar, yaitu:

.....
.....
.....
.....

suatu bilangan yang hasilnya bukan bilangan rasional.

2. Menyederhanakan Bentuk Akar

Sebuah bentuk akar dapat disederhanakan menjadi perkalian dua buah akar pangkat bilangan, dengan salah satu akar pangkat bilangan memenuhi definisi 5.1. Amati dan pelajari contoh berikut:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Perhatikan ilustrasi berikut:

Sebuah kolam berbentuk lingkaran memiliki diameter $6\sqrt{7}$ m. Jika Andi berlari mengelilingi kolam tersebut sebanyak 12 kali

Berapakah jarak yang ditempuh Andi?

Penyelesaian:

Jarak yang ditempuh Andi adalah 12 x keliling kolam, yaitu: $12 \times 3,14 \times 6\sqrt{7} = 37,68 \times 6\sqrt{7}$



Perhatikan sifat 5.6 berikut:

Sifat 5.6:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b},$$

dengan a dan b adalah bilangan bulat positif

Contoh 1:

Sederhanakan bentuk $\sqrt{72}$ ke bentuk akar sederhana.

Jawab:

Menyederhanakan bentuk akar kuadrat berarti kita menarik akar kuadrat. Untuk menarik akar

Ingat:

$$72 = 36 \times 2,$$

36 = bilangan kuadrat

kuadrat, maka bilangan di bawah tanda akar harus bilangan kuadrat.

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$



Diketahui Balok ABCD.EFGH. Panjang AB = 10cm, BC = 6cm, dan CG = 6cm. Hitunglah panjang diagonal sisi AC dan diagonal ruang AG dalam bentuk akar yang paling sederhana.

Jawab:

.....

.....

.....

.....

.....

3. Sifat-sifat Perpangkatan dalam Bentuk Akar

Beberapa sifat perpangkatan dapat kita tuliskan dalam bentuk akar yang akan digunakan untuk menyederhanakan bentuk akar rumit ke bentuk akar sederhana melalui sifat-sifat berikut:

Sifat 5.7:

Untuk m dan n bilangan bulat positif, berlaku:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, dengan $a, b \geq 0$
2. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, dengan $a \geq 0$
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, dengan $a \geq 0, b > 0$



Contoh 2:

Sederhanakanlah $\sqrt[4]{64a^7 \cdot b^8}$

Jawab:

Menyederhanakan akar pangkat 4, berarti kita menarik akar pangkat 4. Untuk menarik akar pangkat 4, bilangan atau huruf didalam tanda akar harus berpangkat 4.

Perhatikan:
 $64 = 2^6 = 2^4 \cdot 2^2$,
 $a^7 = a^4 \cdot a^3$
 $b^8 = b^4 \cdot b^4$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{64a^7 \cdot b^8} &= \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2 \cdot a^4 \cdot a^3 b^4 \cdot b^4} \\ &= 2 \cdot a \cdot b \cdot b \cdot \sqrt[4]{2^2 \cdot a^3} \\ \text{Jadi } \sqrt[4]{64a^7 \cdot b^8} &= 2ab^2 \sqrt[4]{4a^3} \end{aligned}$$

Diskusikan dengan temanmu



Dodi membuat kubus dari tanah liat. Banyak tanah liat yang digunakan Dodi untuk membuat kubus 4.913 cm^3 . Berapa ukuran panjang sisi kubus yang dibuat Dodi?

Jawab: Sisi kubus $= \sqrt[3]{4.913} = 17 \text{ cm}$ Jadi, panjang sisi kubus yang dibuat Dodi adalah

1. Sebuah tangki minyak berbentuk kubus. Tangki itu penuh berisi minyak dengan volume 512.000 liter. Berapa m panjang sisi tangki itu?

Jawab:

2. Sebuah aquarium berbentuk kubus berisi air setinggi $1/3$ -nya. Volume air dalam aquarium tersebut 1.125 liter. Berapa dm panjang rusuk aquarium?

Jawab:

4. Operasi Aljabar pada Bentuk Akar

a. Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Akar

Pada waktu kelas VII, kamu telah mempelajari penjumlahan dan pengurangan bentuk aljabar, misalnya:

$$4x + 6x = (4 + 6)x = 10x \dots (1)$$

$$7y - 3y = (7 - 3)y = 4y \dots (2)$$

Konsep tersebut berlaku juga untuk bentuk akar, misalnya:

$$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (2 + 3)\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \dots (3)$$

$$4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (4 - 2)\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \dots (4)$$

Penjumlahan dan pengurangan pada bentuk akar dapat dilakukan jika memiliki suku-suku yang sejenis.

Sifat 5.8:

jika a, c bilangan Rasional dan $b \geq 0$, maka berlaku :

$$a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = (a + c)\sqrt{b}$$

$$a\sqrt{b} - c\sqrt{b} = (a - c)\sqrt{b}$$

Contoh 3:

Hitunglah:

- $4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$
- $4\sqrt{8} + 5\sqrt{18}$
- $3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$

Jawab:

- $4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (4 + 5 - 2)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$
- $$4\sqrt{8} + 5\sqrt{18} = 4\sqrt{4 \cdot 2} + 5\sqrt{9 \cdot 2}$$

$$= 4 \cdot 2\sqrt{2} + 5 \cdot 3\sqrt{2}$$

$$= 8\sqrt{2} + 15\sqrt{2}$$

$$= (8 + 15)\sqrt{2}$$

$$= 23\sqrt{2}$$
- $3\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$ tidak dapat dioperasikan (dijumlahkan) karena tidak memenuhi sifat aturan penjumlahan

● **Tugas Untukmu:**

Sederhanakanlah:

- $2p^3\sqrt{32} + \sqrt[3]{81p^3} - 4p^3\sqrt{2}$
- $\frac{\sqrt{q^3}}{12} + \sqrt{27a^3} + \sqrt{\frac{27}{q^3}}$

b. Perkalian Bentuk Akar

Untuk melakukan operasi perkalian bentuk akar dapat digunakan sifat operasi bentuk akar berikut ini:

Sifat 5.9:

jika a, b, c, d bilangan Rasional dan $b \geq 0$, dan $d \geq 0$, maka berlaku :

$$a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$$

atau $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Perhatikan ilustrasi berikut:

1. $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$
2. $3\sqrt{3} \times 5\sqrt{2} = 3 \times 5 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} = 15\sqrt{6}$
3. $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{6 \times 2} = \sqrt[3]{12}$
4. $4\sqrt[3]{6} \times 6\sqrt[3]{2} = (4 \times 6)\sqrt[3]{6 \times 2} = 24\sqrt[3]{12}$

c. Pembagian Bentuk Akar

Untuk memahami pembagian bentuk akar, amati dan pelajarilah uraian berikut:

$$\sqrt{100} : \sqrt{4} = 10 : 2$$
$$= 5$$

$$\text{atau dengan cara } \sqrt{100:4} = \sqrt{25} = 5$$

Perhitungan tersebut menggambarkan sifat pembagian bentuk akar:

Sifat 5.10:

jika a, b bilangan Rasional dan $a \geq 0$, dan $b > 0$, maka berlaku :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ atau } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Perhatikan ilustrasi berikut:

1. $\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{42}{7}} = \sqrt{6}$
2. $\frac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{2} \sqrt{\frac{15}{5}} = 2\sqrt{3}$

Tugas Untukmu:



Selesaikan:

- a. $\frac{4\sqrt{10x}}{3\sqrt{2x^2}}$
- b. $\frac{\sqrt{18x^3}}{x^2}$, c. $\frac{\sqrt{3m^2}}{21m^2}$

5. Merasionalkan Penyebut Suatu Pecahan

Perhatikan pecahan bentuk akar berikut:

$\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{5+\sqrt{3}}$, $\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ penyebut-penyebut tersebut dapat diubah menjadi bilangan rasional.

Cara Cara merasionalkan setiap penyebut berlainan, tetapi prinsip dasarnya sama yaitu mengalikan penyebut-penyebut tersebut dengan pasangan bentuk akar sekawannya, sehingga diperoleh penyebut bilangan rasional.

Berikut ini perkalian bentuk akar dengan pasangan sekawannya yang menghasilkan bilangan rasional.

- a. $\sqrt{b} \times \sqrt{b} = (\sqrt{b})^2 = b$
- b. $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - (\sqrt{b})^2 = a^2 - b$
- c. $(\sqrt{b} + \sqrt{d})(\sqrt{b} - \sqrt{d}) = (\sqrt{b})^2 - (\sqrt{d})^2 = b - d$

Dengan b , $a^2 - b$ dan $b - d$ adalah bilangan rasional

Contoh 4:

Sederhanakan penyebut pecahan-pecahan berikut dengan merasionalkan penyebutnya:

- a. $\frac{15}{\sqrt{5}}$
- b. $\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

Jawab:

- a. $\frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$
- b. $\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4-2}$
 $= \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$
 $= 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$



Sederhanakanlah: $\frac{\sqrt{y}-4\sqrt{z}}{\sqrt{y}-\sqrt{z}}$

Jawab:

6. Pangkat Pecahan

Perhatikan bentuk perkalian berikut:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

Pada bagian sebelumnya kita sudah belajar tentang bilangan berpangkat, apakah perkalian tersebut dapat dipikirkan sebagai perkalian bilangan berpangkat?

Misalkan kita nyatakan perkalian di atas sebagai:

$$2^p \times 2^p = 2^1$$

Sesuai aturan sifat perkalian bilangan berpangkat di atas, kita nyatakan sebagai:

$$2^p \times 2^p = 2^{p+p}$$

$$= 2^{2p} = 2^1$$

Ini berarti $2p = 1$ atau $p = \frac{1}{2}$

Dengan demikian dapat dinyatakan bahwa $\sqrt{2} = 2^{1/2}$

Dapat disimpulkan: Akar kuadrat dari suatu bilangan adalah bilangan berpangkat dengan eksponen $\frac{1}{2}$, disimbolkan: $\sqrt{a} = a^{1/2}$

Perhatikan!!!

Secara umum, jika $a^n = p$ dengan a, p adalah bilangan real dan n adalah bilangan bulat, $n > 0$ maka $a = p^{1/n}$. Definisikan $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ (dibaca "a adalah akar pangkat n dari p"). Pada definisi tersebut berlaku:

- p merupakan bilangan real positif dan nol untuk n bilangan genap
- p merupakan semua bilangan real untuk n bilangan ganjil

Contoh 5:

Jika $125^k = 5$, maka:

$$(5^3)^k = 5 = 5^{3k} = 5^1$$

$$3k = 1$$

$$k = 1/3$$

Jadi $125^{1/3} = 5$ atau $\sqrt[3]{125} = 5$

Secara umum, untuk bilangan berpangkat pecahan. Berlaku sifat berikut:

Sifat 5.11:

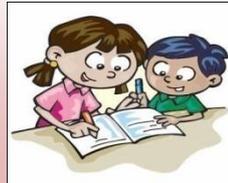
$$(p^{1/m})^{1/n} = p^{\frac{1}{m \times n}}$$

Sifat 5.13:

$$p^{\frac{m}{n}} = p^{\frac{1}{n} \times m} = (p^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{p})^m$$

Sifat 5.12:

$$p^{\frac{m}{n}} = p^{m \times \frac{1}{n}} = (p^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p^m}$$



2. Sifat-sifat Logaritma

Ada 7 sifat pada logaritma ini yang akan membantu kamu dalam memecahkan masalah yang berkaitan dengan logaritma, yaitu :

Sifat 1

$${}^a\log x + {}^a\log y = {}^a\log xy$$

Contoh:

Sederhanakanlah !

a. ${}^2\log 4 + {}^2\log 8$

b. ${}^3\log (1/9) + {}^3\log 81$

c. ${}^2\log 2\sqrt{2} + {}^2\log 4\sqrt{2}$

Jawab :

a. ${}^2\log 4 + {}^2\log 8 = {}^2\log 4 \cdot 8 = {}^2\log 32 = 5$

b. ${}^3\log (1/9) + {}^3\log 81 = {}^3\log (1/9) \cdot 81 = {}^3\log 9 = 2$

c. ${}^2\log 2\sqrt{2} + {}^2\log 4\sqrt{2} = {}^2\log 2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = {}^2\log 16 = 4$

Sifat 2

$${}^a\log x - {}^a\log y = {}^a\log (x/y)$$

Contoh:

Sederhanakanlah!

a. ${}^2\log 16 - {}^2\log 8$

b. $\log 1.000 - \log 100$

c. ${}^3\log 18 - {}^3\log 6$

Jawab :

a. ${}^2\log 16 - {}^2\log 8 = {}^2\log (16/8) = {}^2\log 2 =$

1

b. $\log 1.000 - \log 100 = \log (1000/100) =$

$\log 10 = 1$

Ingat :

1. $\log {}^2x = \log x \cdot \log x = (\log x)^2$

$\log x^2 = 2 \log x$

Jadi $\log {}^2x \neq \log x^2$

2. $\text{Log } {}^{-1}x = (1/\log x)$

$\text{Log } x^{-1} = \log (1/x) = -\log x$

Jadi $\log {}^{-1}x \neq \log x^{-1}$

$$c. {}^3\log 18 - {}^3\log 6 = {}^3\log (18/6) = {}^3\log 3 = 1$$

Sifat 3

$${}^a\log x^n = n \cdot {}^a\log x$$

Contoh :

Sederhanakan!

a. $2 \log 3 + 4 \log 3$

b. $2 \log a + 2 \log b$

Jawab:

a. $2 \log 3 + 4 \log 3 = \log 3^2 + \log 3^4$

$$= \log 9 + \log 81$$

$$= \log 9 \cdot 81$$

$$= \log 729$$

b. $2 \log a + 2 \log b = \log a^2 + \log b^2$

$$= \log a^2 \cdot b^2$$

$$= \log (ab)$$

Big Activity Book

Worksheet For Mathematic Class

Kelas X SMA

Semester Gazal

(Pertama)

Bentuk Pangkat, Akar, & Logaritma

STUDENT WORKSHEET I

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan Bentuk Pangkat, Akar, dan Logaritma
Class/Semester :
Name :

Activity 1:



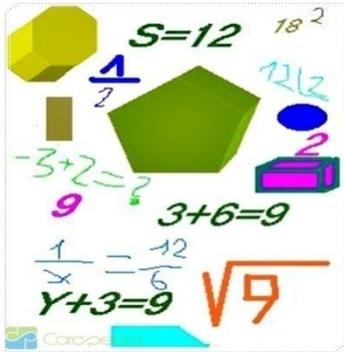
Bakteri setiap minggu membelah menjadi 2. Pada minggu pertama hanya ada 2 bakteri. Pada minggu kedua tentu saja ada 4 bakteri. Pada minggu ke 7 setengah kolam sudah terisi bakteri. Pada minggu ke berapakah kolam tersebut penuh dengan bakteri?

Kesimpulan:

STUDENT WORKSHEET 2

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan Bentuk Pangkat, Akar, dan Logaritma
Class/Semester :
Name :

Activity 2:



1. Sederhanakan bentuk eksponen berikut:

a. $\frac{a^6 b^6 c^6}{a^2 b^3 c^4}$
b. $\frac{a^6 b^6 c^6}{a^{-2} b^{-3} c^{-4}}$

2. Tentukan nilai dari: $\left(\frac{x^4 y^5}{z^6}\right)^5 : \frac{x^4}{z^{-6}}$

Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 3

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan Bentuk Pangkat, Akar, dan Logaritma
Class/Semester :
Name :

Activity 3:

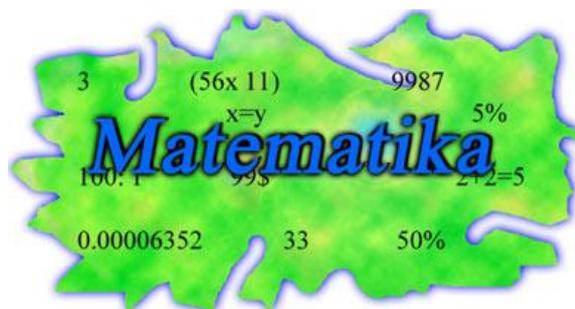
Tentukan himpunan penyelesaian persamaan berikut :

a. $5^{x+3} = 25^{x-2}$

b. $\sqrt{4^{2x+1}} = 64$

c. $\sqrt{16^{2x+4}} = (0,25)^{-3x-3}$

d. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = \sqrt[3]{2^{3x+1}}$



Kesimpulan :

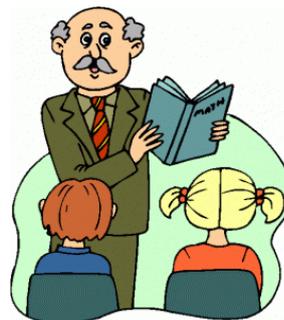
STUDENT WORKSHEET 4

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan Bentuk Pangkat, Akar, dan Logaritma
Class/Semester :
Name :

Activity 4:

Rasionalkan penyebut bentuk pecahan!

$$\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}$$



Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 5

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan Bentuk Pangkat, Akar, dan Logaritma
Class/Semester :
Name :

Activity 5:

Diketahui segitiga ABC sama kaki dengan $AB = AC = 8\sqrt{2}$
dan $B = 8$.

Tentukan :

- tinggi segitiga dari titik sudut A
- Luas segitiga tersebut



Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 6

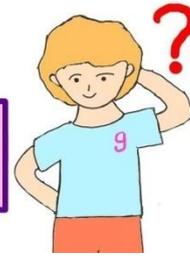
Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan Bentuk Pangkat, Akar, dan Logaritma
Class/Semester :
Name :

Activity 6:

Diketahui ${}^2\log 3 = x$ dan ${}^5\log 2 = y$
Nyatakan dengan x dan y bentuk-bentuk berikut:

- ${}^5\log 15$
- ${}^2\log 45$
- ${}^{18}\log 20$

$$\begin{aligned} {}^2\log 3 &= a \\ {}^3\log 5 &= b \\ {}^6\log 75 &= ? \end{aligned}$$



Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 7

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan Bentuk Pangkat, Akar, dan Logaritma
Class/Semester :
Name :

Activity 7:

Jika nilai $\log 3 = a$ dan $\log 5 = b$, tentukan nilai:

- $\log 75$
- $\log 1.500$



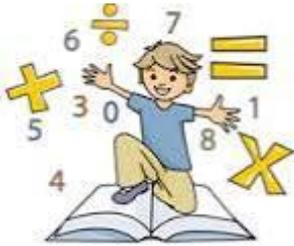
Kesimpulan:

STUDENT WORKSHEET 8

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan Bentuk Pangkat, Akar, dan Logaritma
Class/Semester :
Name :

Activity 8:

Persamaan ${}^x \log 2 + {}^x \log (3x - 4) = 2$ mempunyai dua persamaan, yaitu x_1 dan x_2 . Hitunglah harga $x_1 + x_2$!!



Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 10

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan Bentuk Pangkat, Akar, dan Logaritma
Class/Semester :
Name :

Activity 10:



Jika ${}^a\log 3 = {}^b\log 27$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, maka hitunglah ${}^a\log b$

Kesimpulan:

Fungsi, Persamaan, dan Pertidaksamaan Kuadrat

STUDENT WORKSHEET 11

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan fungsi, persamaan, dan fungsi kuadrat serta pertidaksamaan kuadrat
Class/Semester :
Name :

Activity 11:



Jika akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 4x + a - 4 = 0$ rasional dan a bilangan cacah. Tentukan nilai a

Kesimpulan :

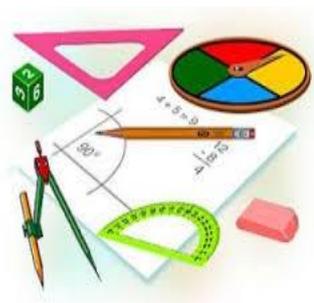
STUDENT WORKSHEET 12

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan fungsi, persamaan, dan fungsi kuadrat serta pertidaksamaan kuadrat

Class/Semester :

Name :

Activity 12:



Tentukanlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya dua kali dari akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 8x + 10 = 0$

Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 13

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan fungsi, persamaan, dan fungsi kuadrat serta pertidaksamaan kuadrat

Class/Semester :

Name :

Activity 13:

Jika akar-akar persamaan $3x^2 + 8x + 4 = 0$ adalah p dan q , maka tentukanlah persamaan kuadrat yang mempunyai akar-akar p^2 dan q^2



Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 14

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan fungsi, persamaan, dan fungsi kuadrat serta pertidaksamaan kuadrat

Class/Semester :

Name :

Activity 14:



Berapakah nilai k harus diambil supaya

$f(x) = kx^2 + 16x + 4k$ selalu mempunyai nilai positif?

Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 15

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan fungsi, persamaan, dan fungsi kuadrat serta pertidaksamaan kuadrat

Class/Semester :

Name :

Activity 15:



Agar ungkapan $(t + 1)x^2 - 2tx + (t - 4)$ bernilai negatif untuk semua x , maka berapakah seharusnya nilai t ?

Kesimpulan:

STUDENT WORKSHEET 16

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan fungsi, persamaan, dan fungsi kuadrat serta pertidaksamaan kuadrat

Class/Semester :

Name :

Activity 16:

Jika x_1 dan x_2 adalah akar – akar persamaan $x^2 + px + q = 0$,

maka tentukanlah $\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2$



Kesimpulan:

STUDENT WORKSHEET 17

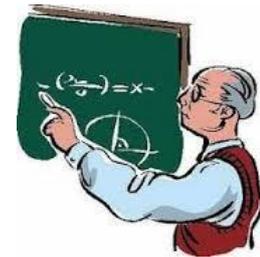
Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan fungsi, persamaan, dan fungsi kuadrat serta pertidaksamaan kuadrat

Class/Semester :

Name :

Activity 17:

Jika fungsi $f(x) = px^2 - (p - 1)x - 6$ mencapai nilai tertinggi untuk $x = -1$, maka hitunglah nilai $p = \dots$



Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 18

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan fungsi, persamaan, dan fungsi kuadrat serta pertidaksamaan kuadrat

Class/Semester :

Name :

Activity 18:

Jika salah satu akar persamaan kuadrat $x^2 - 3x - 2p = 0$
tiga lebih besar dari salah satu akar $x^2 - 3x + p = 0$,
maka tentukan bilangan asli p



Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 19

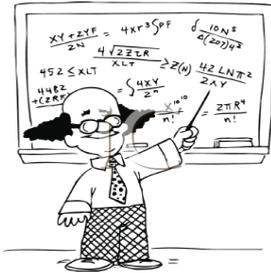
Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan fungsi, persamaan, dan fungsi kuadrat serta pertidaksamaan kuadrat

Class/Semester :

Name :

Activity 19:

Himpunan penyelesaian pertidaksamaan:



a. $2x^2 - x - 3 > 0$ untuk $x \in R$

b. $x^2 + 4x - 12 \leq 0, x \in R$

Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 20

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan fungsi, persamaan, dan fungsi kuadrat serta pertidaksamaan kuadrat

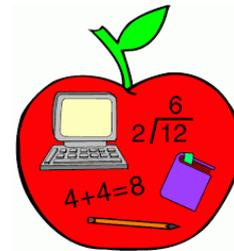
Class/Semester :

Name :

Activity 20:

Pertidaksamaan $2x - a > \frac{x - 1}{2} + \frac{ax}{3}$

mempunyai penyelesaian $x > 5$. Hitunglah Nilai a !



Kesimpulan :

Sistem Persamaan Linear dan Pertidaksamaan Satu Variabel

STUDENT WORKSHEET 21

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dan pertidaksamaan satu variabel

Class/Semester :

Name :

Activity 21:

Jika x dan y memenuhi sistem persamaan :
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$$

Tentukan nilai $x + y$!!



Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 22

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dan pertidaksamaan satu variabel

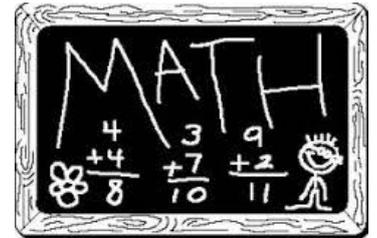
Class/Semester :

Name :

Activity 22:

Himpunan penyelesaian sistem persamaan: $\begin{cases} 7x + 5y = 2 \\ 5x + 7y = -2 \end{cases}$

adalah $\{x_0, y_0\}$. Nilai $x_0 - y_0 = \dots$



Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 23

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dan pertidaksamaan satu variabel

Class/Semester :

Name :

Activity 23:

Di sebuah toko, Aprilia membeli 4 barang A dan 2 barang B dengan harga Rp 4.000, -. Julia membeli 10 barang A dan 4 barang B dengan harga Rp 9.500, -.

Apabila Januar ingin membeli sebuah barang A dan sebuah barang B, maka hitunglah harga barang yang dibeli Januar!



Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 24

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dan pertidaksamaan satu variabel

Class/Semester :

Name :

Activity 24:

Sistem persamaan linier:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x - y + 2z = 12 \\ 3x + 2y - z = 8 \end{cases} \text{ mempunyai himpunan penyelesaian } \{(x, y, z)\}.$$

Hitunglah hasil kali antara x , y , dan z

Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 25

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dan pertidaksamaan satu variabel

Class/Semester :

Name :

Activity 25:

Himpunan penyelesaian:

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ y + 2z = 4 \\ x + y + 2z = 5 \end{cases} \text{ adalah } \{(x, y, z)\}. \text{ Tentukan nilai dari } x + z$$

Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 26

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dan pertidaksamaan satu variabel

Class/Semester :

Name :

Activity 26:

Dua kali umur Aprilio ditambah tiga kali umur Julian adalah 61 tahun, sedangkan empat kali umur Julia dikurangi tiga kali umur Aprilio adalah 19 tahun.

Umur Aprilio dijumlahkan dengan umur Julian adalah ...



Kesimpulan:

STUDENT WORKSHEET 27

Basic Competence : Memecahkan masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dan pertidaksamaan satu variabel

Class/Semester :

Name :

Activity 27:

Dengan persediaan kain polos 20m dan kain bergaris 10m, seorang penjahit akan membuat 2 model pakaian jadi. Model I memerlukan 1m kain polos dan 1,5 m kain bergaris. Mode II memerlukan 2m kain polos dan 0,5m kain bergaris . Bila kain tersebut dijual, setiap model I memperoleh untung Rp 15.000,00 dan model II memperoleh untung Rp 10.000,00. Hitunglah Laba maksimum yang diperoleh



Kesimpulan :

Semester Genap

(Kedua)

Logika Matematika

STUDENT WORKSHEET 1

Basic Competence : Menggunakan logika matematika dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor

Class/Semester :

Name :

Activity 1:

Jika $x = -(3^6)$ dan $y = (-3)^6$,

manakah pernyataan berikut yang benar?

- A. $x > y$
- B. $x < y$
- C. $x = y$
- D. x dan y tak bisa ditentukan
- E. $xy > y$

Buktikan pilihan Anda!



Kesimpulan:

STUDENT WORKSHEET 3

Basic Competence : Menggunakan logika matematika dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor

Class/Semester :

Name :

Activity 3:

Jika p sembarang bilangan, $\{x = -3p^2 + 5\}$, dan $\{y = -2p^2 + 7\}$,

manakah pernyataan berikut yang benar?

- A. $x > y$
- B. $x < y$
- C. $x = y$
- D. x dan y tak bisa ditentukan
- E. $2x > 2y$



Buktikan pilihan Anda!

Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 4

Basic Competence : Menggunakan logika matematika dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor

Class/Semester :

Name :

Activity 4:

Jika sudut – sudut sebuah segitiga adalah $\{x, 2x, \text{ dan } 3x\}$ derajat dan $\{y = 30\}$ derajat, manakah pernyataan berikut yang benar?

- A. $x > y$
- B. $x < y$
- C. $x = y$
- D. x dan y tak bisa ditentukan
- E. $2x > 2y$



Buktikan pilihan Anda!

Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 5

Basic Competence : Menggunakan logika matematika dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor

Class/Semester :

Name :

Activity 5:

Jika $\{x = \text{harga } 1 \text{ kg semen}\}$ dan $\{y = \text{harga } 1 \text{ kg paku}\}$, manakah pernyataan berikut yang benar?

- A. $x > y$
- B. $x < y$
- C. $x = y$
- D. x dan y tak bisa ditentukan
- E. $2x > 2y$



Buktikan pilihan Anda!

Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 6

Basic Competence : Menggunakan logika matematika dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor

Class/Semester :

Name :

Activity 6:



Jika $4 < x < 6$ dan $5 < y < 7$,

manakah pernyataan berikut yang benar?

- A. $x > y$
- B. $x < y$
- C. $x = y$
- D. x dan y tak bisa ditentukan
- E. $2x > 2y$

Buktikan pilihan Anda!

Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 7

Basic Competence : Menggunakan logika matematika dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor

Class/Semester :

Name :

Activity 7:

Tentukan pernyataan majemuk hasil penggabungan pasangan-pasangan pernyataan berikut dengan menggunakan operasi konjungsi (DAN):

- a) p : Hari ini Jakarta hujan
q : Hari ini Jakarta banjir
- b) p : Iwan memakai topi
q : Iwan memakai dasi
- c) p : Mahesa anak jenius.
q : Mahesa anak pemalas.



Kesimpulan:

STUDENT WORKSHEET 8

Basic Competence : Menggunakan logika matematika dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor

Class/Semester :

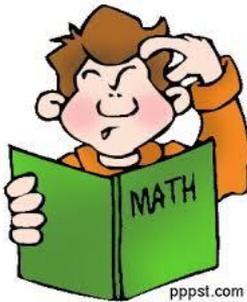
Name :

Activity 8:

Perhatikan pernyataan berikut:

"Jika cuaca mendung maka Charli membawa payung"

Tentukan konvers, invers dan kontraposisi dari pernyataan di atas!



Kesimpulan:

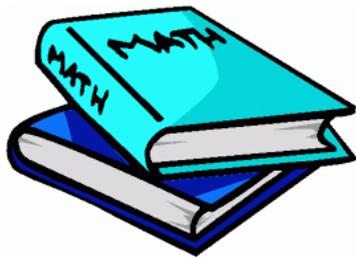
STUDENT WORKSHEET 9

Basic Competence : Menggunakan logika matematika dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor

Class/Semester :

Name :

Activity 9:



Penarikan kesimpulan dengan menggunakan modus tolens didasarkan atas suatu pernyataan majemuk yang selalu berbentuk tautologi untuk setiap kasus. Pernyataan yang dimaksud adalah

- $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
- $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$
- $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow (p \wedge q)$
- $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \rightarrow \sim (q \rightarrow r)$

Kesimpulan:

STUDENT WORKSHEET 10

Basic Competence : Menggunakan logika matematika dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor

Class/Semester :

Name :

Activity 10:



Buktikan pilihan Anda!

Kontraposisi dari pernyataan majemuk $p \rightarrow (p \vee \sim q)$ adalah

....

- $(p \vee \sim q) \rightarrow \sim p$
- $(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim p$
- $(p \vee \sim q) \rightarrow p$
- $(\sim p \vee q) \rightarrow \sim p$
- $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$

Kesimpulan:

Trigonometri

STUDENT WORKSHEET 11

Basic Competence : menggunakan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri dalam pemecahan masalah

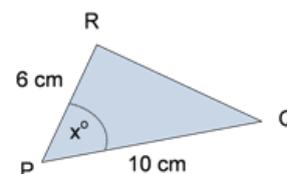
Class/Semester :

Name :

Activity 11:



Segitiga PQR diperlihatkan gambar berikut.



Jika luas segitiga PQR adalah 24 cm^2 tentukan nilai $\sin x$

Kesimpulan :

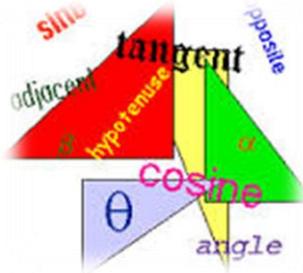
STUDENT WORKSHEET 12

Basic Competence : menggunakan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri dalam pemecahan masalah

Class/Semester :

Name :

Activity 12:



Sebuah kipas angin berputar dengan kecepatan 36 putaran per menit. Nyatakan kecepatan putaran kipas angin tersebut ke dalam satuan radian per detik!

Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 13

Basic Competence : menggunakan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri dalam pemecahan masalah

Class/Semester :

Name :

Activity 13:

Hitunglah jari-jari suatu lingkaran jika panjang busurnya 10 cm dan sudut pusatnya 36° !



Kesimpulan:

STUDENT WORKSHEET 14

Basic Competence : menggunakan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri dalam pemecahan masalah

Class/Semester :

Name :

Activity 14:

Suatu garis OP dengan $O (0,0)$ dan $P (12,5)$ membentuk sudut α terhadap sumbu X positif. Tentukan perbandingan trigonometrinya!



Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 15

Basic Competence : menggunakan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri dalam pemecahan masalah

Class/Semester :

Name :

Activity 15:

Jika α, β , dan γ adalah sudut-sudut dalam segitiga ABC , tunjukkanlah bahwa :

- $\sin(\beta + \gamma) = \sin \alpha$
- $\cos(\beta + \gamma) = -\cos \alpha$
- $\tan(\beta + \gamma) = -\tan \alpha$



Kesimpulan:

STUDENT WORKSHEET 16

Basic Competence : menggunakan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri dalam pemecahan masalah

Class/Semester :

Name :

Activity 16:

Buktikan bahwa $\sec^4 \alpha - \sec^2 \alpha = \tan^4 \alpha + \tan^2 \alpha$.



Kesimpulan:

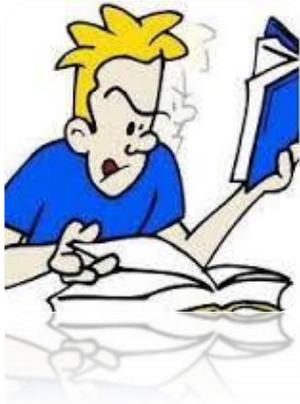
STUDENT WORKSHEET 17

Basic Competence : menggunakan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri dalam pemecahan masalah

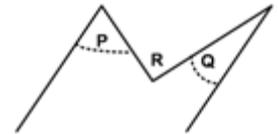
Class/Semester :

Name :

Activity 17:



Sudut P pada soal berikut besarnya adalah 45° dan sudut Q adalah 25° .



Tentukan besar sudut R jika garis kanan dan kiri adalah sejajar!

Kesimpulan:

STUDENT WORKSHEET 18

Basic Competence : menggunakan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri dalam pemecahan masalah

Class/Semester :

Name :

Activity 18:

Sebuah kapal berlayar di pelabuhan dengan arah 60° . Kecepatan rata-rata 45 mil/jam . Setelah 4 jam berlayar, hitunglah jarak kapal terhadap arah timur pelabuhan.



Kesimpulan:

STUDENT WORKSHEET 19

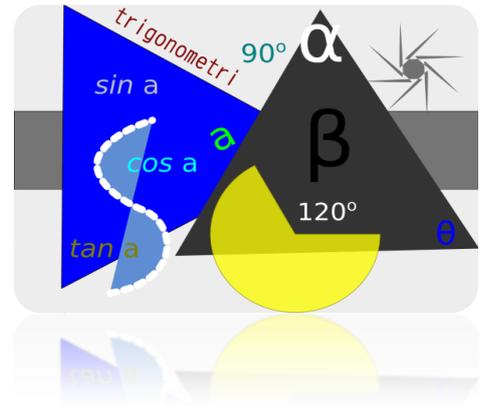
Basic Competence : menggunakan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri dalam pemecahan masalah

Class/Semester :

Name :

Activity 19:

Sebuah perahu berlayar dengan arah 240° dengan kecepatan 10 km/jam selama 6 jam. Maka posisi dalam koordinat cartesius adalah



Kesimpulan :

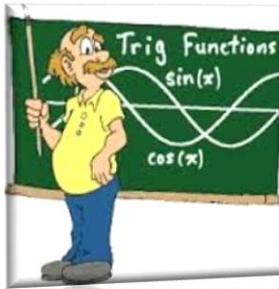
STUDENT WORKSHEET 20

Basic Competence : menggunakan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri dalam pemecahan masalah

Class/Semester :

Name :

Activity 20:



Dari segitiga $\triangle ABC$ diketahui panjang $AC = 10 \text{ cm}$, $AB = 6 \text{ cm}$ besarnya $\angle BCA = 60^\circ$. Hitunglah panjang BC ?

Kesimpulan :

Geometri

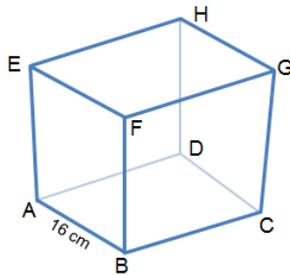
STUDENT WORKSHEET 21

Basic Competence : Menentukan kedudukan, jarak, dan besar sudut yang melibatkan titik garis, dan bidang dalam ruang dimensi tiga

Class/Semester :

Name :

Activity 21:



Kubus $ABCD.EFGH$ memiliki panjang rusuk 16 cm . Titik N terletak di tengah garis CG dan titik M terletak di tengah garis AE .
Tentukan jarak dari titik M ke bidang BDN .

Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 22

Basic Competence : Menentukan kedudukan, jarak, dan besar sudut yang melibatkan titik garis, dan bidang dalam ruang dimensi tiga

Class/Semester :

Name :

Activity 22:



Kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang sisi 12 cm . Titik P adalah perpotongan diagonal bidang $ABCD$. Tentukan jarak titik P ke titik G

Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 24

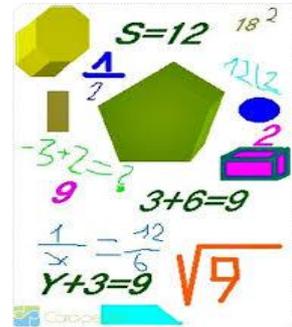
Basic Competence : Menentukan kedudukan, jarak, dan besar sudut yang melibatkan titik garis, dan bidang dalam ruang dimensi tiga

Class/Semester :

Name :

Activity 24:

Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk $\sqrt{3}$ cm dan T pada AD dengan panjang $AT = 1$ cm.
Hitunglah Jarak A pada BT



Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 25

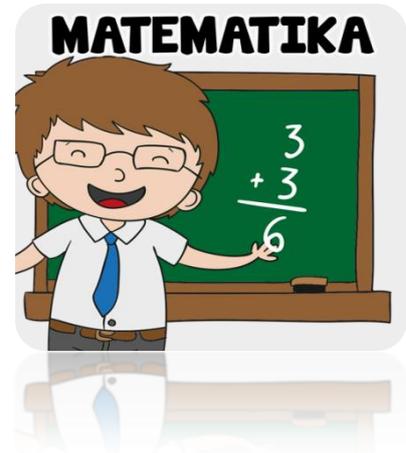
Basic Competence : Menentukan kedudukan, jarak, dan besar sudut yang melibatkan titik garis, dan bidang dalam ruang dimensi tiga

Class/Semester :

Name :

Activity 25:

Diketahui limas segiempat beraturan $T.ABCD$ dengan panjang rusuk 12 cm . Panjang sisi tegaknya juga 12 cm . Titik P, Q, R dan S masing-masing berada ditengah rusuk AB, BC, CD dan AD . Tentukan nilai $\sin T$ terhadap bidang $PQRS$?



Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 26

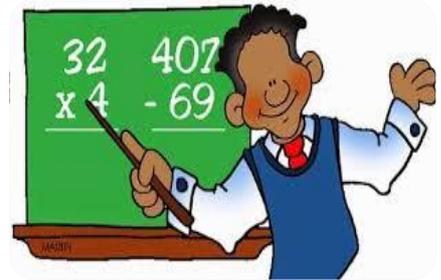
Basic Competence : Menentukan kedudukan, jarak, dan besar sudut yang melibatkan titik garis, dan bidang dalam ruang dimensi tiga

Class/Semester :

Name :

Activity 26:

Pada kubus $ABCD.EFGH$, jika θ adalah sudut antara bidang ACF dan $ACGE$, maka hitunglah $\sin \theta$!



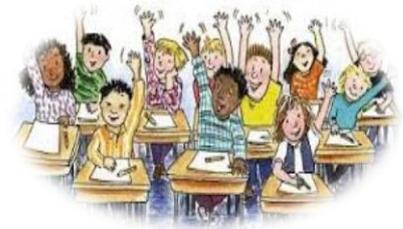
Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 27

Basic Competence : Menentukan kedudukan, jarak, dan besar sudut yang melibatkan titik garis, dan bidang dalam ruang dimensi tiga
Class/Semester :
Name :

Activity 27:

Pada kubus $ABCD.EFGH$, titik P pada AD dan titik Q pada EH sehingga $AP = EQ = 12 \text{ cm}$. Jika panjang rusuk $12\sqrt{3} \text{ cm}$ maka hitunglah jarak A ke $BPQF$



Kesimpulan:

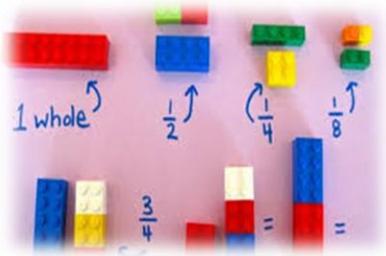
STUDENT WORKSHEET 28

Basic Competence : Menentukan kedudukan, jarak, dan besar sudut yang melibatkan titik garis, dan bidang dalam ruang dimensi tiga

Class/Semester :

Name :

Activity 28:



Prisma segi – 4 beraturan $ABCD.EFGH$ dengan rusuk 6 cm dan tinggi prisma 8 cm . Jika titik potong diagonal AC dan BD adalah T , maka tentukanlah jarak titik D ke TH !

Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 29

Basic Competence : Menentukan kedudukan, jarak, dan besar sudut yang melibatkan titik garis, dan bidang dalam ruang dimensi tiga

Class/Semester :

Name :

Activity 29:



Diketahui panjang rusuk kubus $ABCD.EFGH$ adalah 6 cm . Jika S adalah titik potong EG dan FH , maka hitunglah jarak DH ke AS !

Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 30

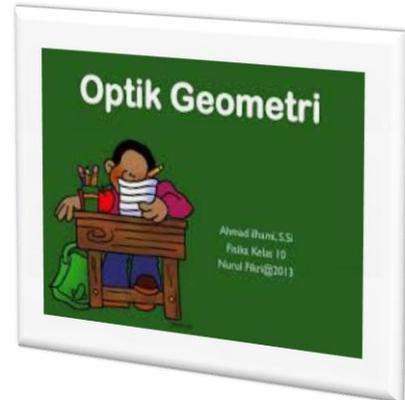
Basic Competence : Menentukan kedudukan, jarak, dan besar sudut yang melibatkan titik garis, dan bidang dalam ruang dimensi tiga

Class/Semester :

Name :

Activity 30:

Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan rusuk 4 cm , Jika α adalah sudut antara BF dan bidang BEG , maka berapakah nilai $\sin \alpha$?



Kesimpulan :

STUDENT WORKSHEET 2 (Uji Coba)

Basic Competence : Menggunakan Perbandingan, Fungsi, Persamaan, dan Identitas Trigonometri dalam Pemecahan Masalah

Class/Semester :

Name :

Activity 1:

Tentukan besar sudut terkecil (dalam ukuran derajat) yang dibentuk oleh jarum pendek (penunjuk jam) dan jarum panjang (penunjuk menit) ketika jam menunjukkan:

- a. Pukul 08:00
- b. Pukul 15:00
- c. Pukul 14:30
- d. Pukul 18:30

Penyelesaian:

Kesimpulan:

STUDENT WORKSHEET 2 (Uji Coba)

Basic Competence : Menggunakan Perbandingan, Fungsi, Persamaan, dan Identitas Trigonometri dalam Pemecahan Masalah

Class/Semester :

Name :

Activity 2:

Segitiga ABC siku-siku di C dan α^0 menyatakan besar sudut A . Carilah perbandingan trigonometri sudut α^0 , jika diketahui panjang sisi-sisinya sebagai berikut:

a. $a = 3$ dan $c = 3\sqrt{2}$

b. $a = 8$ dan $b = 15$

Penyelesaian:

Kesimpulan:

REFERENSI

- Amir, M. Taufiq. 2009. *Inovasi Pendidikan Melalui Problem Based Learning*. Jakarta: Media Group.
- Damanik, Ericson. 2016. Pengertian dan Ciri-ciri Model Pembelajaran. (Online), <http://ariplie.blogspot.co.id/2015/03/pengertian-dan-ciri-ciri-model.html>, diakses 18 April 2016).
- Fransworth, D. 2009. *Math Performance as a Function of Math Anxiety and Arousal Performance Theory*. (Online), (<http://eric.ed.gov/?id=ED513894>, diakses 15 April 2015)
- Hiszu Ho, DA., Lam, J M., Zimmer, SH, & Yukari Okamoto. 2000. The Affective and Cognitive Dimensions of Math Anxiety: a Cross-National Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, (Online), Vol. 31, No. 3.
- Holt, John. 2012. *Bagaimana Peserta didik Belajar*. Jakarta: Erlangga.
- Joyce & Weil. 1986. *Models of Teaching, 9th Edition*. USA: Prentice-Hall.
- Mason, J., Burton L. & Stacey, K. 2010. *Thinking Mathematically*. Inggris: Pearson Education Limited.
- Murphy, Melissa. 2012. Process versus Product: A Glimpse into Students' Mathematical Thinking. *Rising Tide*. (Online), Vol. 5 (<http://web1.smcm.edu/educationstudies/pdf/rising-tide/volume-5/Murphy.pdf>, diakses 6 Februari 2013).
- Ostroff, Wendy L. 2013. *Memahami Cara Anak-anak Belajar*. Jakarta: PT.Indeks.
- Scusa, Toni. 2008. *Five Processes of Mathematical Thinking*. (Online). (<http://digitalcommons.unl.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1030&context=mathmidsummative>, diakses 4 Februari 2013).
- Silver, Harvey F. 2013. *Pengajaran Matematika*. Jakarta: PT.Indeks.
- Solso, Robert L. 2008. *Psikologi Kognitif*. Jakarta: Erlangga.
- Stacey, Kaye. 2009. *What Is Mathematical Thinking And Why Is It Important?* (Online). http://www.apecknowledgebank.org/resources/files/12_3-4_06_1_Stacey.pdf , diakses 12 Februari 2014).
- Sunaryo Kuswana, Wowo. 2013. *Taksonomi Berpikir*. Bandung: PT.Remaja Rosdakarya
- Tall, David. 2009. *The Development of Mathematical Thinking: Problem-Solving and Proof*. (Online).

<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.377.3174&rep=rep1&type=pdf>, diakses 3 Juni 2014).

- Slavin, Robert E. 2009. *Cooperative Learning (Teori, Riset, Praktik)*. Bandung: Nusa Media.
- Trianto. 2007. *Model-model Pembelajaran Inovatif Berorientasi Konstruktivistik*. Jakarta: Prestasi Pustaka.
- Trianto, 2009, *Model-Model Pembelajaran Inovatif -Progresif*, Surabaya: Prenada Media Group.
- Trianto, 2010, *Mengembangkan Model Pembelajaran Tematik*, Jakarta: PT Prestasi Pustaka.
- Vacc, N. , & Bright, G. 1999. Elementary preservice teachers' changing beliefs and instructional use of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, (Online), Vol. 30, No. 1.
- Wardani, Sri. 2009. *Aktivitas Pemecahan Masalah Dan Pengajuan Masalah Matematik Dalam Pembelajaran Inkuiri Silver Untuk Mengembangkan Kreativitas Matematik Peserta didik*. <http://onengdalilah.blogspot.com/2009/02/aktivitas-pemecahan-masalah-dan.html?zx=1c852f90362c3a52>. Diakses 18 April 2009.
- Sanjaya, Wina. 2008. *Strategi Pembelajaran Berorientasi Standar Proses Pendidikan*. Jakarta: Prenada Media Group.
- Ward (2002); Stepien, dkk. (1993). Tersedia Dalam: www.lubisgrafura.wordpress.com.