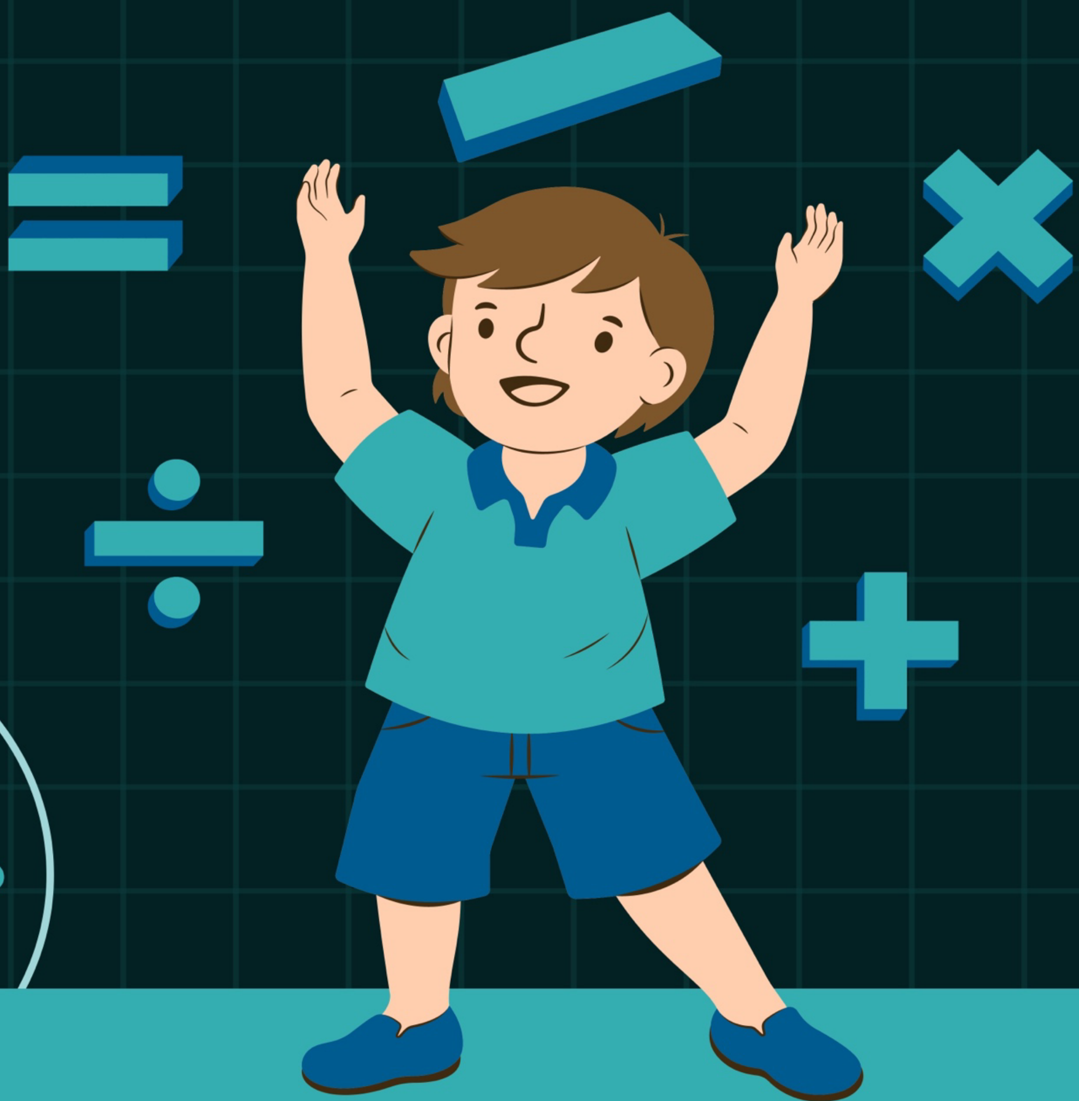
Modul Ajar

PENGANTAR DASAR MATEMATIKA



Andi Ardhillah Wahyudi, S. Pd., M. Si.

1. DESKRIPSI MATA KULIAH

Mata kuliah ini menyajikan topik-topik dasar dalam matematika, yaitu hakikat matematika, logika, himpunan, dan fungsi. Topik-topik ini perlu dipahami oleh mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika sebagai dasar dalam mempelajari mata kuliah matematika yang lain.

2. CAPAIAN PEMBELAJARAN LULUSAN (CPL)

Capaian Pembelajaran Lulusan (CPL) mata kuliah Pengantar Dasar Matematika, yaitu:

1. Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius (S1),
2. Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri (S9)
3. Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur (KU2)
4. Mampu mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis informasi dan data (KU5)
5. Mampu menyelenggarakan pembelajaran matematika yang mendidik (KK3)
6. Mampu memanfaatkan teknologi informasi dan komunikasi untuk kepentingan pembelajaran matematika dan pengembangan diri (KK8)
7. Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan matematika (P3)

3. CAPAIAN PEMBELAJARAN MATA KULIAH (CPMK)

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK) Pengantar Dasar Matematika, yaitu:

1. Memahami pengertian, karakteristik, dan objek kajian matematika
2. Memahami pengertian logika, klasifikasikan kalimat, dan tabel kebenaran
3. Memahami perangkai logika dan penyajian tabel kebenaran
4. Memahami ekuivalensi, tautologi, kontradiksi, dan kontingensi
5. Memahami pernyataan berkuantor dan negasinya
6. Memahami argumen dan validitas pembuktian
7. Memahami konsep dasar himpunan
8. Memahami relasi himpunan dan menggambarkan diagram Venn
9. Memahami operasi himpunan

4. BAHAN KAJIAN (MATERI AJAR MATA KULIAH)

Bahan kajian mata kuliah Pengantar Dasar Matematika adalah:

1. Hakikat matematika

2. Pengantar logika
3. Perangkai logika
4. Ekuivalensi, tautologi, kontradiksi, dan kontingensi
5. Kuantor
6. Argumen dan kevalidannya
7. Konsep dasar himpunan
8. Relasi himpunan
9. Operasi himpunan

5. SKEMA (RENCANA) PERKULIAHAN

Skema perkuliahan mata kuliah Pengantar Dasar Matematika adalah *blended* learning, yaitu perkuliahan yang memadukan pembelajaran tatap muka dan dalam jaringan (daring). Pembelajaran daring menggunakan aplikasi SPADA Unismuh Makassar. Mahasiswa dapat belajar secara mandiri melalui halaman mata kuliah sebelum pertemuan tatap muka dengan dosen.

6. RENCANA ASESMEN

Penilaian hasil belajar mata kuliah Pengantar Dasar Matematika mengacu pada proses dan aktivitas perkuliahan mahasiswa yang dilakukan secara tatap muka dan daring. Instrumen penilaian yang digunakan adalah:

1. Kuis daring
2. Forum diskusi daring
3. Tugas daring dan pemaparan tugas secara tatap muka
4. Aktivitas kehadiran tatap muka dan daring
5. Tes formatif
6. Tes sumatif

7. REFERENSI

1. Pengantar Dasar Matematika Logika dan Teori Himpunan oleh Dra. Theresia M. H Tirta Seputro M. Pd. 2021. Jakarta: Erlangga
2. A First Course in Mathematical Logic and Set Theory oleh Michael L. O'Leary. 2015. John Wiley & Sons.

BAGIAN II: MATERI AJAR 1

TOPIK I:

HAKIKAT MATEMATIKA

1. PENGANTAR TOPIK MATERI AJAR

Sapaan

Assalaamu alaikum wa rohmatullaahi wa barokaatuh

Apa kabar mahasiswa hebat? Semoga tetap semangat dalam menuntut ilmu sebagai bagian dari ibadah kepada Allah Rabbul Alamiin. Mari kita awali kegiatan belajar ini dengan membaca doa

رَضِيْتُ بِاللهِ رَبًّا وَبِالْاِسْلاَمِ دِيْنًا وَبِمُحَمَّدٍ نَبِيًّا وَرَسُوْل رَبِّى زِدْنِيْ عِلْمًا نافِعًا وَرْزُقْنِيْ فَهْمًا

Rodhiitu billaahi robbaa, wa bil islaami diinaaa, wa bi muhammadin nabiyyaw wa rosuulaa. Robbii zidnii 'ilman naafi'aan warzuqnii fahmaa

Artinya: Aku ridho Allah sebagai tuhanku, Islam sebagai agamaku, dan Nabi Muhammad sebagai nabi dan rasul. Ya Allah, tambahkanlah kepadaku ilmu yang bermanfaat dan berilah aku karunia untuk dapat memahaminya.

Pernahkah Anda memikirkan apa matematika itu dan mengapa kita mempelajarinya? Mari mengingat kembali apa yang selama ini Anda ketahui tentang matematika. Silahkan pelajari materi pada Topik I: Hakikat Matematika, kemudian hubungkan materi tersebut dengan pengetahuan Anda sebelumnya, serta diskusikan dengan dosen pengampu mata kuliah Pengantar Dasar Matematika dan teman kelas Anda.

Deskripsi Materi Ajar

Topik I: Hakikat Matematika ini mencakup pembahasan mengenai pengertian matematika, karakteristik matematika, dan objek kajian matematika.

Sub Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

Memahami pengertian, karakteristik, dan objek kajian matematika.

Indikator Capaian Pembelajaran

1. Mengemukakan berbagai pendapat ahli mengenai matematika
2. Menjelaskan karakteristik matematika
3. Menjelaskan objek kajian matematika

Skenario Pembelajaran

Pembelajaran Topik I: Hakikat Matematika ini diselesaikan dalam 1 kali pertemuan daring. Pengalaman belajar diharapkan diperoleh mahasiswa melalui aktivitas mempelajari materi ajar secara mandiri, berdiskusi dengan dosen dan teman kelas pada forum diskusi, dan menyelesaikan tugas baik secara individu maupun berkelompok.

2. MATERI AJAR TOPIK I: HAKIKAT MATEMATIKA

A. Pendahuluan

Istilah matematika berasal dari bahasa Yunani "*mathein*" atau "*manthenein*" yang berarti "mempelajari". Berdasarkan asal katanya, maka perkataan matematika berarti ilmu pengetahuan yang didapat dengan berpikir (bernalar). Matematika lebih menekankan kegiatan dalam dunia rasio (penalaran), bukan menekankan dari hasil eksperimen atau hasil observasi. Matematika terbentuk karena pikiran-pikiran manusia yang berhubungan dengan ide, proses, dan penalaran (Russeffendi ET, 1980).

Terdapat berbagai macam definisi tentang matematika. Rumusan definisi yang berbeda-beda itu terjadi karena perbedaan sudut pandang para ahli mengenai matematika. James dan James (Karso,1994) mengemukakan bahwa matematika adalah ilmu tentang logika mengenai bentuk, susunan, besaran dan konsep-konsep yang saling berhubungan. Matematika tercipta karena pikiran-pikiran manusia yang berhubungan dengan ide, proses dan penalaran. Matematika mencakup aritmetika, aljabar, geometri, dan analisis, dengan aritmetika mencakup teori bilangan dan statistika.

Johnson dan Rising (Karso,1994) berpendapat bahwa matematika adalah pola berpikir, pola mengorganisasikan pembuktian yang logik, matematika itu adalah bahasa yang menggunakan istilah yang didefinisikan dengan cermat, jelas dan akurat, representasinya dengan simbol dan padat, matematika adalah pengetahuan struktur yang terorganisasikan, sifat-sifat atau teori-teori itu dibuat secara deduktif berdasarkan kepada unsur-unsur yang didefinisikan atau tidak didefinisikan, aksioma-aksioma, sifat-sifat, atau teori-teori yang telah dibuktikan kebenarannya dan matematika itu adalah ilmu tentang pola, keteraturan pola atau ide.

James dan James mengemukakan bahwa matematika adalah ilmu tentang logika, mengenai bentuk, susunan, besaran, dan konsep-konsep yang berhubungan satu dengan lainnya. Matematika terbagi dalam tiga bagian besar yaitu aljabar, analisis dan geometri. Tetapi ada pendapat yang mengatakan bahwa matematika terbagi menjadi empat bagian yaitu aritmatika, aljabar, geometris dan analisis dengan aritmatika mencakup teori bilangan dan statistika.

Pendapat lain mendefinisikan matematika sebagai ilmu tentang struktur yang bersifat deduktif aksiomatik, akurat, abstrak, ketat, dan dikembangkan untuk matematika itu sendiri, sedangkan penerapannya tidak dipersoalkan. Kline menyatakan sebaliknya, bahwa matematika bukan pengetahuan yang menyendiri dan sempurna dengan dirinya sendiri, tetapi keberadaannya untuk membantu manusia dalam memahami dan menguasai permasalahan sosial, ekonomi, dan alam.

Berikut beberapa pengertian tentang matematika.

1) Matematika adalah cabang ilmu pengetahuan eksak dan terorganisir secara sistematik.
2) Matematika adalah pengetahuan tentang bilangan dan kalkulasi.
3) Matematika adalah pengetahuan tentang penalaran logik dan berhubungan dengan bilangan.
4) Matematika adalah pengetahuan tentang fakta-fakta kuantitatif dan masalah tentang ruang dan bentuk.
5) Matematika adalah pengetahuan tentang struktur-struktur yang logik.
6) Matematika adalah pengetahuan tentang aturan-aturan yang ketat.

Dari berbagai pengertian tentang matematika sebagaimana telah diuraikan itu, sampai saat ini belum ada yang diterima secara mutlak. Pengertian-pengertian yang dikemukakan para ahli adalah benar berdasarkan sudut pandang masing-masing.

B. Karakteristik Matematika

Meskipun tidak terdapat definisi tunggal tentang matematika yang disepakati, akan tetapi ada karakteristik yang dapat merangkum pengertian matematika secara umum. Soedjadi (2000) mengemukakan karakteristik matematika, yaitu:

1) Memiliki objek kajian yang abstrak
2) Bertumpu pada kesepakatan
3) Berpola pikir deduktif
4) Memiliki simbol yang kosong dari arti
5) Memperhatikan semesta pembicaraan
6) Konsisten dalam sistemnya

Berikut uraian dari karakteristik matematika tersebut.

1) Memiliki objek kajian yang abstrak

Objek yang dipelajari dalam matematika bersifat abstrak, sering juga disebut objek mental. Sebagai contoh, bilangan "tiga" merupakan sesuatu yang abstrak, tidak teraba oleh panca indera. Berbeda dengan benda konkret seperti buku, bola, atau batu yang nyata, bilangan "tiga" hanya ada dalam pikiran. 3 hanya simbol yang merepresentasikan bilangan "tiga". Jika di atas meja diletakkan tiga buah buku, maka pikiran mengolah informasi sehingga dipahami bahwa di atas meja terdapat tiga buku. Tiga itu sendiri tidak konkret, yang konkret adalah buku.

2) Bertumpu pada kesepakatan

Matematika dipenuhi dengan kesepakatan-kesepakatan yang memberi batasan-batasan agar suatu prosedur atau pernyataan dapat dinyatakan benar atau tidak benar. Kesepakatan dasar dalam matematika adalah aksioma dan konsep primitif yang disebut juga pernyataan pangkal (*undefined term*). Sebagai contoh, 3 disepakati sebagai simbol untuk bilangan "tiga", bangun geometri yang dikonstruk oleh dua sinar berpangkal sama disepakati sebagai sudut, dan sebagainya.

3) Berpola pikir deduktif

Pola pikir deduktif adalah pemikiran yang berpangkal dari hal yang bersifat umum, kemudian diarahkan pada hal yang bersifat khusus. Berbeda dengan pola pikir deduktif, pola pikir induktif berpangkal dari hal yang bersifat khusus kemudian digeneralisasi. Pola pikir induktif biasanya diterapkan dalam sains. Sebagai contoh, berbagai jenis unggas dan burung berkembang biak dengan bertelur sehingga disimpulkan bahwa hewan vertebrata dengan filum aves merupakan hewan ovivar.

Matematika dikenal sebagai ilmu deduktif, karena proses mencari kebenaran atau generalisasi dalam matematika berbeda dengan ilmu pengetahuan alam dan ilmu pengetahuan yang lain. Metode pencarian kebenaran yang dipakai adalah metode deduktif, bukan dengan cara induktif. Walaupun dalam matematika mencari kebenaran itu dapat dimulai dengan cara induktif, tetapi seterusnya generalisasi yang benar untuk semua keadaan harus dapat dibuktikan dengan cara deduktif. Dalam matematika suatu generalisasi dari sifat, teori atau dalil itu dapat diterima kebenarannya sesudah dibuktikan secara deduktif.

Jika pernyataan "jumlah dua bilangan ganjil sama dengan suatu bilangan genap" dibuktikan dengan menunjukkan kasus-kasus khusus misalnya $1 + 3 = 4$, $3 + 7 = 10$, $5 + 9 = 14$, dan sebagainya kemudian disimpulkan berlaku untuk semua kasus, maka ini merupakan pola pikir induktif.

Berikut ini diuraikan pembuktian secara deduktif.
Diketahui bahwa bilangan genap adalah bilangan bulat yang dapat dibagi habis oleh dua dan bilangan ganjil adalah bilangan bulat yang bila dibagi dua selalu bersisa satu.

Misalkan m dan n bilangan bulat sebarang, maka
$2m$ dan $2n$ adalah bilangan genap, $2m + 1$ dan $2n + 1$ adalah bilangan ganjil.

Misalkan $2m + 1 = a$ dan $2n + 1 = b$, maka

$a + b = (2m + 1) + (2m + 1)$

$a + b = 2m + 1 + 2m + 1$

$a + b = 2m + 2m + 1 + 1$

$a + b = 2m + 2m + 2$

$a + b = 2\ (m + n + 1)$

$a + b = 2p$, dengan $p = m + n + 1$

Diketahui himpunan bilangan bulat bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, sehingga p adalah bilangan bulat dan $2p$ adalah bilangan genap. a dan b ,bilangan ganjil sebarang, yang dijumlahkan menghasilkan bilangan genap, sehingga dapat disimpulkan bahwa jumlah dua bilangan ganjil sama dengan bilangan genap.

Dalam pembelajaran matematika di sekolah, pembuktian secara induktif dapat dilakukan dengan tujuan agar siswa mudah memahami materi.

4) Memiliki simbol yang kosong dari arti

Bahasa matematika dipenuhi dengan simbol-simbol baik berupa huruf maupun bukan huruf. Simbol belum mempunyai arti jika belum diketahui semesta pembicaraan dari simbol tersebut. Rangkaian simbol-simbol dapat membentuk kalimat matematika yang disebut model matematika. Secara umum simbol dan model matematika sebenarnya kosong dari arti. Suatu simbol atau model matematika tidak ada artinya bila tidak dikaitkan dengan konteks tertentu. Contoh: symbol x tidak ada artinya. Bila kemudian dinyatakan bahwa x adalah bilangan bulat, maka x menjadi bermakna, artinya x mewakili suatu bilangan bulat. Pada model matematika $x + y = 40$, x dan y tidak berarti, kecuali bila kemudian dinyatakan konteks dari model itu, misalnya x dan y mewakili panjang suatu sisi bangun datar tertentu, atau x dan y masing-masing mewakili banyaknya barang jenis A dan B yang dijual di suatu toko. Sifat kosong arti dari simbol-simbol ini menjadi akses bagi matematika untuk memasuki bidang-bidang lain seperti fisika, kimia, bahasa, dan sebagainya.

5) Memperhatikan semesta pembicaraan

Semesta pembicaraan memegang peranan penting dalam matematika. $3 + 4 = 7$ merupakan rangkaian simbol yang masih kosong dari arti jika belum ditentukan semesta pembicaraan yang mewadahinya. Rangkaian simbol ini bisa bernilai benar atau bernilai salah tergantung pada semesta pembicaraannya. Bila dijumpai model matematika $4x = 10$, kemudian akan dicari nilai x, maka penyelesaiannya bergantung pada semesta pembicaraan. Bila semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat maka tidak ada penyelesaiannya. Mengapa? Karena tidak ada bilangan bulat yang bila dikalikan 4 hasilnya 10. Bila semesta pembicaraannya bilangan rasional maka penyelesaian dari permasalahan adalah $x = \frac{10}{4}$.

6) Konsisten dalam sistemnya

Terdapat dua jenis kebenaran, yaitu:

a. kebenaran mutlak yang hanya terdapat dalam Al Qur'an dan hadits shahih
b. kebenaran relatif

Kebenaran dalam ilmu pengetahuan tergolong dalam kebenaran relatif. Kebenaran relatif terbagi tiga, yaitu kebenaran konsistensi, kebenaran korelasional, dan kebenaran pragmatis. Matematika dijiwai oleh kebenaran konsistensi. Hakim dalam matematika adalah strukturnya. Struktur adalah suatu sistem yang memuat hubungan hierarkis dari elemen-elemen sistem itu. Dengan kata lain, suatu sistem aksioma beserta teorema-teorema yang diturunkan dari aksioma-aksioma tersebut membentuk suatu struktur. Dalam suatu struktur matematika yang lengkap terdapat konsep primitif, aksioma-aksioma, konsep yang didefinisikan, dan teorema-teorema.

Secara umum struktur matematika adalah sebagai berikut

a. Konsep primitif
   Konsep primitif atau biasa juga disebut pernyataan pangkal adalah konsep yang tidak didefinisikan, disepakati dan diterima sebagai suatu kebenaran. Konsep primitif diperlukan untuk menghindari lingkaran pendefinisian.
   Misal: titik, garis, lengkungan, bidang, bilangan. Unsur-unsur ini ada, tetapi tidak dapat didefinisikan.
b. Unsur-unsur yang didefinisikan
   Unsur-unsur yang didefinisikan terbentuk dari unsur-unsur yang tidak didefinisikan. Misal: sudut, persegi panjang, segitiga, balok, lengkungan tertutup sederhana, bilangan ganjil, pecahan, FPB dan KPK.
c. Aksioma dan postulat
   Dari unsur-unsur yang tidak didefinisikan dan unsur-unsur yang didefinisikan dapat dibuat asumsi-asumsi yang dikenal dengan aksioma atau postulat. Aksioma adalah pernyataan pangkal yang disepakati dan diterima sebagai suatu kebenaran. Aksioma diperlukan untuk menghindari lingkaran pembuktian. Suatu sistem aksiomatik harus memenuhi syarat independen (bebas), konsisten (anti kontradiksi), dan lengkap. Suatu teorema dinyatakan benar dan dapat diterima jika telah dibuktikan kebenarannya berdasarkan aksioma atau teorema lain yang telah terbukti kebenarannya. Suatu teorema dinyatakan benar dan dapat diterima jika telah dibuktikan kebenarannya

berdasarkan aksioma atau teorema lain yang telah terbukti kebenarannya. Misal:

i. Melalui 2 titik sembarang hanya dapat dibuat satu garis
ii. Semua sudut siku-siku satu dengan lainnya sama besar
iii. Melalui satu titik hanya dapat dibuat satu garis yang tegak lurus ke satu garis yang lain.

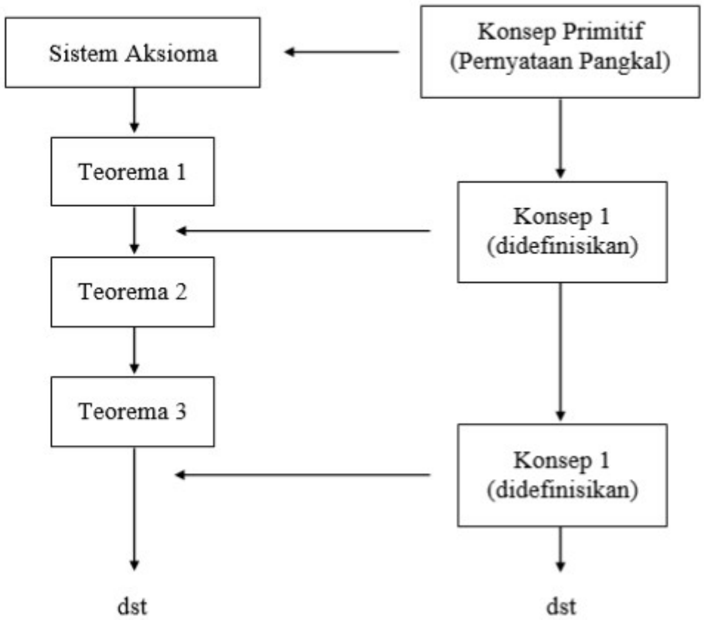
d. Dalil dan teorema

Dari unsur-unsur yang tidak didefinisikan dan aksioma disusun teorema-teorema atau dalil-dalil yang kebenarannya harus dibuktikan dengan cara deduktif. Misal:

i. Jumlah 2 bilangan ganjil adalah genap
ii. Jumlah ketiga sudut pada suatu segitiga sama dengan 180^0
iii. Jumlah kuadrat sisi siku-siku pada suatu segitiga siku-siku sama dengan kuadrat sisi miringnya.

Dalam matematika terdapat banyak sistem. Ada sistem-sistem yang dapat dipandang saling lepas, misalnya sistem aljabar dan sistem geometri. Ada juga sistem-sistem yang mempunyai keterkaitan satu sama lain, misalnya sistem aksioma grup dan sistem aksioma ring, kedua sistem ini berada dalam sistem aljabar. Dalam sistem atau struktur tertentu boleh jadi terdapat pernyataan yang kontradiktif dengan pernyataan dalam sistem atau struktur lain. Sebagai contoh, dalam sistem geometri Euclides terdapat teorema "jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah $180°$ ". Pernyataan ini kontradiktif dengan teorema dalam sistem geometri non-Euclides, yaitu "jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga lebih besar dari $180°$ ". Tetapi kedua teorema tersebut benar dalam masing-masing sistem dan strukturnya.

Skema berikut menunjukkan struktur matematika secara umum.



Gambar 1.1 Struktur Matematika

C. Objek Belajar Matematika

Objek belajar matematika adalah segala sesuatu yang dipelajari dalam matematika baik langsung maupun tidak langsung (Bell,1981). Objek langsung yang juga merupakan kategori pengelompokan isi matematika ada 4, yaitu:

1) Fakta

Fakta dalam matematika merupakan konvensi-konvensi (kesepakatan) yang mencakup simbol-simbol matematika. Contohnya 2 adalah simbol untuk bilangan "dua", + merupakan simbol untuk operasi penjumlahan, sinus sebagai nama yang diberikan untuk salah satu fungsi khusus dalam trigonometri.

2) Konsep

Konsep dalam matematika adalah ide abstrak yang memungkinkan seseorang mengklasifikasikan suatu objek sebagai contoh atau non-contoh dari ide abstrak tersebut. Himpunan, himpunan bagian, persamaan, pertidaksamaan, segitiga, kubus, jari-jari, merupakan contoh-contoh konsep.

Definisi adalah ungkapan yang membatasi suatu konsep.

3) Operasi

Operasi adalah aturan untuk memperoleh satu elemen dari satu atau lebih elemen yang diketahui. Contoh operasi yaitu penjumlahan bilangan, perkalian pecahan, penentuan gabungan atau irisan dua himpunan, dan sebagainya. Jenis operasi dibedakan berdasarkan banyak elemen yang dioperasikan. Komplemen dalam himpunan merupakan operasi unair, karena hanya satu elemen yang dioperasikan. Penjumlahan bilangan merupakan operasi biner, karena ada dua elemen yang dioperasikan untuk menghasilkan satu elemen lain

4) Prinsip

Prinsip merupakan objek yang paling kompleks dalam matematika. Prinsip ialah konsep-konsep yang berhubungan beserta keterkaitan di antara konsep-konsep tersebut. Pernyataan "dua segitiga dikatakan sama dan sebangun, jika dua sisi dan sudut yang diapit oleh sisi pada segitiga pertama sama dengan dua sisi dan sudut yang diapit oleh sisi pada segitiga kedua" adalah contoh prinsip. Untuk mengetahui prinsip segitiga yang sama dan sebangun ini, peserta didik harus telah mengetahui konsep segitiga, sudut, dan sisi.

Objek tak langsung matematika antara lain:

1) Mengalihkan belajar (*transfer of learning*)
2) Kemampuan menyelidiki (*inquiry*)
3) Kemampuan pemecahan soal (*problem solving*)
4) Disiplin diri (*self-diciplіne*)
5) Apresiasi terhadap struktur matematika (*appreciation for the structure of mathematics*).

3. BAGIAN EVALUASI (PENGALAMAN BELAJAR)

Forum Diskusi: Hakikat Matematika

Mahasiswa hebat, setelah mempelajari materi ajar Topik I: Hakikat Matematika, silahkan berdiskusi dengan teman mengenai kasus yang disajikan pada Forum Diskusi dan berlatih dengan menyelesaikan soal pada Kuis.

A. Forum Diskusi

Ali berdebat dengan Uti mengenai hasil dari satu ditambah satu. Ali menyatakan hasil penjumlahan itu adalah 2, sedangkan Uti menyatakan hasilnya 10 (dibaca satu nol).

Bagaimana pendapat Anda mengenai perdebatan mereka? Kaitkan pendapat Anda dengan karakteristik matematika yang telah diuraikan pada bagian materi ajar! Diskusikan pendapat Anda dengan dosen pengampu mata kuliah dan teman kelas!

B. Kuis

1. Jelaskan dua pendapat ahli mengenai matematika!
2. Jelaskan satu di antara enam karakteristik matematika!
3. Kemukakan satu prinsip matematika beserta konsep-konsep yang terlibat dalam prinsip itu!

BAGIAN II: MATERI AJAR 2

TOPIK II:

PENGANTAR LOGIKA

1. PENGANTAR TOPIK MATERI AJAR

Sapaan

Assalaamu alaikum wa rohmatullaahi wa barokaatuh

Apa kabar mahasiswa hebat? Semoga tetap semangat dalam menuntut ilmu sebagai bagian dari ibadah kepada Allah Rabbul Alamiin. Mari kita awali kegiatan belajar ini dengan membaca doa

رَضِيْتُ بِاللهِ رَبًّا وَبِالْإِسْلاَمِ دِيْنًا وَبِمُحَمَّدٍ نَبِيًّا وَرَسُوْل رَبِّىْ زِدْنِيْ عِلْمًا نَافِعًا وَرْزُقْنِيْ فَهْمًا

Rodhiitu billaahi robbaa, wa bil islaami diinaaa, wa bi muhammadin nabiyyaw wa rosuulaa. Robbii zidnii 'ilman naafi'aan warzuqnii fahmaa

Artinya: Aku ridho Allah sebagai tuhanku, Islam sebagai agamaku, dan Nabi Muhammad sebagai nabi dan rasul. Ya Allah, tambahkanlah kepadaku ilmu yang bermanfaat dan berilah aku karunia untuk dapat memahaminya.

Logika adalah dasar dan alat berpikir dalam matematika. Logika disebut juga sebagai bahasa matematika. Dengan demikian logika memiliki peran penting dalam matematika, bahkan digunakan juga dalam bidang-bidang lain di luar matematika. Silahkan pelajari materi pada Topik II: Pengantar Logika untuk memperoleh wawasan mengenai logika sebagai bahasa matematika. Diskusikan dengan dosen pengampu mata kuliah Pengantar Dasar Matematika dan teman kelas Anda mengenai apa yang Anda pahami dan temukan dalam materi ajar ini.

Deskripsi Materi Ajar

Topik II: Pengantar Logika ini mencakup pembahasan mengenai pengertian logika, klasifikasi kalimat, dan tabel kebenaran.

Sub Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

Memahami pengertian logika, klasifikasikan kalimat, dan tabel kebenaran.

Indikator Capaian Pembelajaran

1. Menjelaskan pengertian logika
2. Membedakan jenis-jenis kalimat beserta contohnya
3. Menjelaskan komponen dan fungsi tabel kebenaran

Skenario Pembelajaran

Pembelajaran Topik II: Pengantar Logika ini diselesaikan dalam 1 kali pertemuan daring. Pengalaman belajar diharapkan diperoleh mahasiswa melalui aktivitas mempelajari materi ajar secara mandiri, berdiskusi dengan dosen dan teman kelas pada forum diskusi, dan menyelesaikan tugas baik secara individu maupun berkelompok.

2. MATERI AJAR

A. Pendahuluan

Logika adalah bagian dari matematika, tetapi pada saat yang sama juga merupakan bahasa matematika. Pada akhir abad ke-19 dan awal abad ke-20, ada kepercayaan bahwa semua hal dalam matematika bisa direduksi menjadi logika simbolik dan bisa dibuat menjadi formal sepenuhnya. Kepercayaan ini, walaupun masih dipegang dalam bentuk modifikasinya sekarang ini, telah digoyahkan oleh K. Godel pada tahun 1930. Godel menunjukkan bahwa selalu ada sejumlah kebenaran yang tidak bisa diturunkan dalam sistem formal apapun. Studi tentang logika simbolik dapat dibagi menjadi beberapa bagian. Bagian pertama dan paling mendasar adalah logika proposisi atau pernyataan. Selanjutnya logika predikat yang merupakan bahasa matematika. Logika yang dibahas dalam Topik II: Pengantar Logika ini adalah logika proposisi.

Logika adalah dasar dan alat berpikir yang logis dalam matematika dan pelajaran-pelajaran lainnya, sehingga dapat membantu dan memberikan bekal tambahan untuk mempelajari bidang yang lain.

B. Pengertian Logika

Logika adalah ilmu untuk berpikir dan menalar dengan benar. Secara bahasa, logika berasal dari kata "logos" yang artinya "kata", "uraian pikiran" atau "teori". Istilah logika secara etimologis dapat diartikan "ilmu tentang uraian pikiran". Secara istilah, logika adalah cabang ilmu yang mempelajari penurunan-penurunan kesimpulan yang valid (benar) dan yang tidak valid (tidak benar). Salah satu tokoh matematika dalam bidang logika matematika adalah Augustus De Morgan. Sumbangsih terbesarnya dalam logika matematika dikenal dengan hukum De Morgan.

Logika merupakan cabang filsafat yang bersifat praktis berpangkal pada penalaran, sekaligus juga sebagai dasar filsafat dan sebagai sarana ilmu. Dengan fungsi sebagai dasar filsafat dan sarana ilmu maka logika merupakan "jembatan penghubung" antara filsafat dan ilmu. Secara terminologis logika didefinisikan sebagai "teori tentang penyimpulan yang sah". Penyimpulan pada dasarnya bertitik tolak dari suatu pangkal-pikir tertentu yang kemudian ditarik suatu kesimpulan. Penyimpulan yang sah, artinya sesuai dengan pertimbangan akal dan runtut sehingga dapat dilacak kembali yang sekaligus juga benar, yang berarti dituntut kebenaran bentuk sesuai dengan isi.

Logika sebagai teori penyimpulan, berlandaskan pada suatu konsep yang dinyatakan dalam bentuk kata atau istilah, dan dapat diungkapkan dalam bentuk himpunan, sehingga setiap konsep mempunyai himpunan, mempunyai keluasan. Dengan dasar himpunan maka semua unsur penalaran dalam logika pembuktiannya menggunakan diagram himpunan, dan ini merupakan pembuktian secara formal jika diungkapkan dengan diagram himpunan sah dan tepat maka sah dan tepat pula penalaran tersebut.

Berdasarkan proses penalarannya dan juga sifat kesimpulan yang dihasilkannya, logika dibedakan antara logika deduktif dan logika induktif. Logika deduktif adalah sistem penalaran yang menelaah prinsip-prinsip penyimpulan yang sah berdasarkan bentuknya serta kesimpulan yang dihasilkan sebagai kemestian diturunkan dari pangkal- pikirnya. Dalam logika ini yang utama ditelaah adalah bentuk dari kerjanya akal jika telah runtut dan sesuai dengan pertimbangan akal yang dapat dibuktikan tidak ada kesimpulan lain maka proses penyimpulannya adalah tepat dan sah. Logika deduktif karena berbicara tentang hubungan bentuk-bentuk pernyataan saja yang utama terlepas isi apa yang diuraikan maka logika deduktif disebut pula logika formal.

Logika induktif adalah sistem penalaran yang menelaah prinsip-prinsip penyimpulan yang sah dari sejumlah hal khusus sampai pada suatu kesimpulan umum yang bersifat boleh jadi. Logika ini sering disebut juga logika material, yaitu berusaha menemukan prinsip-prinsip penalaran yang bergantung kesesuaiannya dengan kenyataan. Oleh karena itu, kesimpulannya hanyalah kebolehjadian, dalam arti selama kesimpulannya itu tidak ada bukti yang menyangkalnya maka kesimpulan itu benar, dan tidak dapat dikatakan pasti.

C. Klasifikasi Kalimat

Perhatikan kalimat-kalimat berikut:

1) Unismuh Makassar adalah singkatan dari Universitas Muhammadiyah Makassar
2) 7 adalah bilangan genap
3) Pergilah ke pasar
4) Apakah Zainal sudah makan?
5) $x \geq 7$

Dapatkah Anda membedakan dan mengelompokkan kalimat-kalimat tersebut?

Suatu kalimat dapat digolongkan menjadi kalimat yang mempunyai arti dan kalimat yang tidak mempunyai arti. Kalimat yang mempunyai arti adalah kalimat yang daripadanya dapat diperoleh suatu pengertian yang bermakna dalam pikiran. Kalimat "x adalah bilangan real yang lebih dari dua" atau secara simbolik $x > 2$, $x \in R$ merupakan kalimat yang mempunyai arti. Dari kalimat itu dapat dipahami bahwa x adalah variabel yang dapat diganti dengan suatu konstanta berupa bilangan real dengan syarat bilangan tersebut harus lebih dari dua. Sebaliknya, kalimat "real adalah lebih dua dari bilangan yang x" merupakan kalimat yang tidak mempunyai arti. Kalimat yang mempunyai arti dapat digolongkan menjadi penyataan dan bukan penyataan.

1. Kalimat Terbuka

Kalimat terbuka adalah kalimat yng belum dapat ditentukan nilai kebenarannya. Ciri dasar kalimat terbuka adalah mengandung peubah atau variabel. **Variabel** adalah lambang yang belum menunjuk anggota tertentu dari semesta pembicaraan. Lambang yang menunjuk tepat satu anggota semesta pembicaraan disebut **konstanta**. Kalimat terbuka meliputi persamaan dan pertidaksamaan. Persamaan adalah kalimat terbuka yang mengandung relasi sama dengan (=), sedangkan pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang mengandung relasi tidak sama ($\neq$, $<$, $>$, $\leq$, atau $\geq$).

$3 + x = 5$, $x \in R$, merupakan kalimat terbuka dengan variabel x. Jika x diganti dengan 7, diperoleh $3 + 7 = 5$ yang merupakan kalimat bernilai salah. Jika x diganti dengan 2, diperoleh $3 + 2 = 5$ yang merupakan kalimat bernilai benar. Jadi jika variabel pada suatu kalimat terbuka diganti dengan suatu konstanta, maka kalimat terbuka tersebut berubah menjadi pernyataan. Konstanta yang mengakibatkan suatu kalimat terbuka menjadi pernyataan bernilai benar disebut **penyelesaian** dari kalimat terbuka itu. Himpunan yang terdiri dari semua penyelesaian suatu kalimat terbuka disebut **himpunan penyelesaian** dari kalimat itu. Dalam semesta pembicaraan himpunan bilangan bulat, tidak ada konstanta yang dapat mengakibatkan $2x + 4 = 5$ bernilai benar. Jadi himpunan penyelesaian untuk kalimat terbuka itu adalah himpunan kosong ($\varnothing$). Tetapi dalam semesta pembicaraan himpunan bilangan real, kalimat tersebuat menjadi pernyataan bernilai benar jika variabel x diganti dengan konstanta $\frac{1}{2}$. Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

2. Pernyataan atau Proposisi

Dalam logika dua nilai, penyataan adalah kalimat yang mempunyai nilai logika (kebenaran) benar saja atau salah saja, tetapi tidak sekaligus keduanya. "Unismuh adalah singkatan dari Universitas Muhammadiyah" merupakan pernyataan yang bernilai benar, sedangkan dalam semesta pembicaraan himpunan bilangan real, $2 + 3 = 7$ merupakan pernyataan yang bernilai salah. Istilah-istilah lain dari pernyataan adalah kalimat matematika tertutup, kalimat tertutup, kalimat deklaratif, statement atau proposisi.

Kalimat yang tergolong bukan pernyataan adalah kalimat yang mempunyai arti tapi tidak mempunyai nilai benar atau salah. Kalimat bukan pernyataan meliputi kalimat perintah, kalimat tanya, dan kalimat terbuka.

Contoh 2.1

Suatu pernyataan dan nilai kebenarannya.

1) Bangun datar segiempat memiliki empat titik sudut. (benar)
2) 2 adalah bilangan prima (benar)
3) $5 - 7 = 2$ (salah)
4) Segitiga sama sisi memiliki tiga sudut yang sama besar. (benar)

Bukan pernyataan

1) Bukalah pintu itu!
2) x lebih besar dari 3 (x adalah variabel yang menunjukkan bilangan).
3) Apakah Mila sudah makan?

Secara umum, keberanaran suatu pernyataan dapat ditentukan melalui:

1. Pengamatan

   Nilai kebenaran suatu pernyataan didasarkan pada fakta yang diamati pada waktu dan tempat tertentu.

Contoh 2. 2

- Unismuh adalah singkatan dari Universitas Muhammadiyah
- Jakarta adalah ibu kota Indonesia

2. Aturan hukum/Kaidah yang Berlaku

   Nilai kebenaran suatu pernyataan didasarkan pada aturan hukum atau kaidah yang sudah diakui kebenarannya. Jadi nilai mutlak tidak terikat oleh waktu dan tempat.

   Contoh 2. 3

   - Jumlah dua bilangan genap adalah bilangan genap
   - Menjiplak hasil karya orang lain merupakan Tindakan melanggar hukum

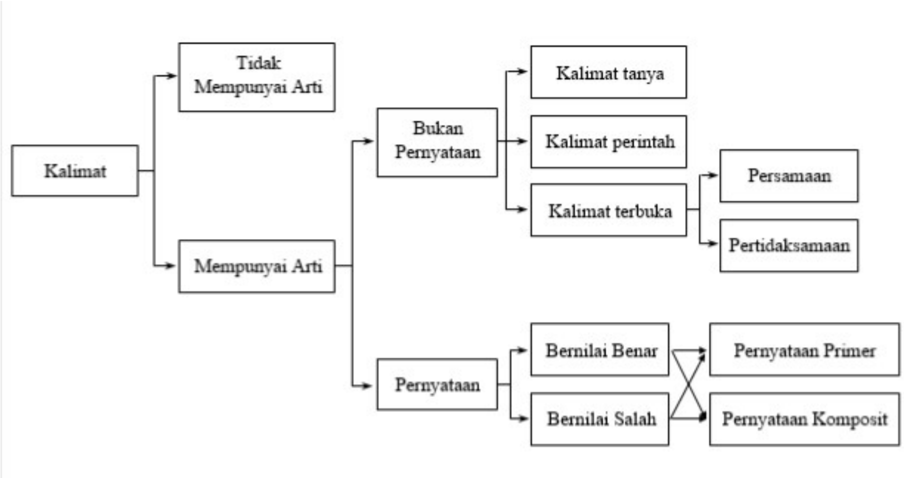
Suatu pernyataan biasa disimbolkan dengan huruf kecil seperti p, q, r, dan sebagainya.

Contoh 2. 4

- p: Hasil kali dua bilangan genap adalah genap
- jumlah semua besar sudut dalam segitiga adalah 180^0

Pernyataan yang tidak mengandung perangkai logika disebut **pernyataan primer**. Kombinasi satu atau lebih pernyataan primer dengan satu atau lebih perangkai logika menghasilkan pernyataan baru yang disebut **pernyataan komposit**. Pernyataan komposit biasa juga disebut proposisi majemuk. Perangkai logika meliputi kata “tidak”, “dan”, ”atau”, ”jika ... maka ...”, serta ”jika dan hanya jika”. Dalam kalimat yang kompleks bisa saja terjadi penyimpangan dari pengertian pernyataan primer. Bagian per bagian dari suatu kalimat kompleks dapat dipandang sebagai pernyataan primer, meskipun bagian itu mengandung perangkai logika.

Skema berikut menyajikan pengklasifikasian kalimat.



Gambar 2.1 Klasifikasi Kalimat

D. Tabel Kebenaran

Tabel kebenaran adalah suatu tabel yang memuat nilai kebenaran pernyataan-pernyataan tunggal atau pernyataan-pernyataan majemuk. Cara membuat tabel kebenaran diperlukan untuk mencapai tujuan atau fungsi yaitu mencari tahu apakah ekspresi proposisi sudah bernilai benar semua inputnya yang valid secara logis. Dalam hal ini satu proposisi dapat dikombinasikan dengan proposisi baru.

Dalam logika matematika, tabel kebenaran akan digunakan untuk melihat nilai benar atau salah dari suatu premis. Selain untuk melihat nilai kebenaran, fungsi lainnya adalah melihat apakah argument yang dinyatakan valid atau tidak valid. Jadi, bisa dikatakan sebagai bentuk validasi dari sebuah argument yang disampaikan.

Oleh sebab itu, cara membuat tabel kebenaran diperlukan untuk mengetahui nilai dari semua *logical* operasi bilangan.

Untuk melengkapi tabel kebenaran pernyataan, harus diketahui dulu berapa banyak pernyataan yang termuat yang berlainan dalam tabel tersebut. Langkah ini diperlukan agar tidak ada kemungkinan komposisi nilai kebenaran yang mungkin tidak tertuliskan.

Contoh 2.5

Jika terdapat dua pernyataan berlainan, maka kemungkinan-nya adalah:

1. Pernyataan pertama benar, pernyataan kedua benar
2. Pernyataan pertama benar, pernyataan kedua salah
3. Pernyataan pertama salah, pernyataan kedua benar
4. Pernyataan pertama salah, pernyataan kedua salah

Berarti ada empat komposisi pernyataan jika terdiri dari dua pernyataan yang berlainan. Dalam bentuk tabel kebenaran sebagai berikut:

p	q
B	**B**
B	**S**
S	**B**
S	**S**

Jika diperhatikan, ternyata dua pernyataan mempunyai 4 kemungkinan komposisi. Jadi, banyaknya komposisi itu tergantung pada banyaknya pernyataan yang akan digabungkan. Secara umum berlaku jika banyaknya pernyataan ada n, maka banyaknya komposisi adalah 2^n. Jika ada 3 pernyataan yang akan digabungkan maka banyaknya pernyataan yang dapat dibuat adalah $2^3 = 8$.

Cara melengkapi tabel kebenaran dilakukan dengan menyesuaikan aturan bernalar dari operator logika matematika. Tabel kebenaran adalah sebuah tabel yang memuat semua nilai kebenaran dari kombinasi nilai-nilai kebenaran suatu preposisi. Langkah-langkah dalam membuat tabel kebenaran adalah sebagai berikut.

1. Isilah kolom pertama dengan huruf B sebanyak 2^{n-1} (dibaca dua pangkat n minus 1), mulai dari baris pertama berurut ke bawah. Kemudian, diikuti dengan huruf S sebanyak 2^{n-1} berturut-turut pula ke bawah.
2. Isilah kolom kedua mulai dari baris pertama dengan huruf B sebanyak 2^{n-2} berturut-turut, diikuti dengan huruf S sebanyak 2^{n-2} pula. Untuk baris setelahnya yang masih kosong diisi dengan pola huruf B dan S yang telah ada sebelumnya, sampai semua baris terisi.
3. Isilah kolom ketiga mulai baris pertama dengan huruf B sebanyak 2^{n-3}, dilanjutkan dengan huruf S sebanyak 2^{n-3} pula. Demikian seterusnya untuk baris-baris setelahnya, diisi sama dengan pola B dan S yang telah ada sebelumnya

Langkah di atas terus dilakukan sampai semua kolom pernyataan tunggal terisi. Setelah itu, lakukan pengisian kolom-kolom pernyataan majemuk.

3. BAGIAN EVALUASI (PENGALAMAN BELAJAR)

Forum Diskusi: Pengantar Logika

Mahasiswa yang berbahagia, setelah mempelajari materi silahkan Anda lanjutkan dengan berdiskusi bersama teman-teman mahasiswa lainnya untuk memecahkan masalah berikut.

Kelompokkan kalimat-kalimat berikut, mana yang merupakan pernyataan dan mana yang bukan pernyataan serta jelaskan alasannya.

1. Tugas logika wajib dikumpulkan pada pertemuan pekan depan
2. Matahari terbit dari timur
3. Jumlah dua bilangan ganjil merupakan bilangan
4. $2a + 5 = 16$
5. x^2 merupakan bilangan prima
6. $10 + 2 < 6 + 7$

BAGIAN II: MATERI AJAR 3

TOPIK III:

PERANGKAI LOGIKA

1. PENGANTAR TOPIK MATERI AJAR

Sapaan

Assalaamu alaikum wa rohmatullaahi wa barokaatuh

Apa kabar mahasiswa hebat? Semoga tetap semangat dalam menuntut ilmu sebagai bagian dari ibadah kepada Allah Rabbul Alamiin. Mari kita awali kegiatan belajar ini dengan membaca doa

رَضِيْتُ بِاللهِ رَبًّا وَبِالْاِسْلاَمِ دِيْنًا وَبِمُحَمَّدٍ نَبِيًّا وَرَسُوْل رَبِّىْ زِدْنِيْ عِلْمًا نَافِعًا وَرْزُقْنِيْ فَهْمًا

Rodhiitu billaahi robbaa, wa bil islaami diinaaa, wa bi muhammadin nabiyyaw wa rosuulaa. Robbii zidnii 'ilman naafi'aan warzuqnii fahmaa

Artinya: Aku ridho Allah sebagai tuhanku, Islam sebagai agamaku, dan Nabi Muhammad sebagai nabi dan rasul. Ya Allah, tambahkanlah kepadaku ilmu yang bermanfaat dan berilah aku karunia untuk dapat memahaminya.

Deskripsi Materi Ajar

Perangkai logika atau kata hubung yang dapat digunakan untuk menyusun suatu pernyataan komposit meliputi kata "tidak", "dan", "atau", "jika ... maka ...", serta "jika dan hanya jika". Kebenaran suatu pernyataan komposit ditentukan oleh kebenaran setiap pernyataan primernya dan cara pernyataan-pernyataan primer itu dihubungkan. Suatu pernyataan dapat bernilai benar saja atau salah saja, tetapi tidak mungkin sekaligus benar dan salah. Nilai benar dapat disimbolkan T (singkatan dari *true*) atau 1, sedangkan nilai salah dapat disimbolkan F (singkatan dari *false*) atau 0, tetapi pada pembahasan selanjutnya dalam buku ini digunakan simbol B untuk benar dan S untuk salah. Topik ini akan membahas secara detail mengenai masing-masing perangkai logika serta contoh-contohnya. Selain itu, topik ini juga akan membahas cara untuk membuat table kebenaran dari masing-masing perangkai.

Sub Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

1. Memahami perbedaan dari setiap perangkai logika
2. Menyajikan tabel kebenaran

Indikator Capaian Pembelajaran

1. Memahami definsi perangkai logika (negasi, kongjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi) serta menyebutkan contohnya
2. Mampu membuat table kebenaran dari masing-masing perangkai logika.

Skenario Pembelajaran

Topik III ini akan kita bahas selama 2 kali pertemuan tatap muka (offline) ataupun secara daring (online). Setelah mempelajari materi ini, ada beberapa tagihan pembelajaran sebagai bentuk pengelaman belajar bagi Anda. Tagihan pembelajaran berupa forum diskusi, tugas, ataupun bentuk evaluasi lainnya. Oleh karena itu diharapkan kepada Anda untuk mempersiapkan diri dalam mempelajari materi ini. Anda dapat melakukan aktivitas pembelajaran secara mandiri dengan cara mengakses materi ajar maupun berkolaborasi dengan teman yang lain.

2. MATERI AJAR

A. Pendahuluan

Salam berbahagia semua, bahan belajar mandiri yang anda pelajari ini adalah bahan belajar mandiri kedua dari mata kuliah Pengantar Dasar Matematika. Pada topik sebelumnya telah dibahas mengenai mengenai pernyataan atau proposisi dimana proposisi dibedakan menjadi proposisi primer (tunggal) dan proposisi komposit (majemuk). Dua pernyataan tunggal atau lebih dapat kita gabungkan menjadi sebuah kalimat baru yang merupakan pernyataan majemuk, sedangkan tiap pernyataan bagian dari pernyataan majemuk itu disebut komponen-komponen pernyataan majemuk. Komponen-komponen dari pernyataan majemuk itu tidak selamanya harus pernyataan tunggal, tetapi mungkin saja.

Untuk menggabungkan pernyataan-pernyataan tunggal menjadi pernyataan majemuk dapat dipakai kata hubung atau kata perangkai logika matematika. Adapun perangkai logika yang dapat membentuk pernyataan majemuk yang kita kenal adalah berikut ini.

1. Negasi atau ingkaran atau sangkalan, dengan kata penyangkalan "tidaklah benar".
2. Konjungsi, dengan kata perangkai "dan".
3. Disjungsi dengan kata perangkai "atau".
4. Implikasi atau kondisional, dengan kata perangkai "jika … maka …".
5. Biimplikasi atau bikondisional, dengan kata perangkai "… jika dan hanya jika …".

Pengetahuan Awal

Operasi-operasi ini akan Anda jumpai penjelasannya secara lebih lanjut dalam bagian-bagian mendatang, sedangkan untuk lebih memahami pernyataan-pernyataan majemuk dapatlah kita perhatikan beberapa contoh berikut ini.

1. Bunga mawar berwarna merah dan bunga melati berwarna putih.
2. Ani dan Ana anak kembar.
3. Cuaca cerah atau udara panas.
4. Jika $x > 0$, maka $\sqrt{x^2} = x$
5. Suatu segitiga adalah sama sisi jika dan hanya jika ketiga sudutnya sama.
6. Tidaklah benar bahwa 15 adalah bilangan prima.

Setelah mengamati pernyataan diatas, jawablah pertanyaan berikut.

a. Apakah semua pernyataan di atas merupakan pernyataan majemuk?
b. Jika ada yang bukan pernyataan majemuk, jelaskan alasanmu!
c. Sebutkan kata penghubung dari pernyataan majemuk tersebut!

B. Negasi

Negasi dari suatu pernyataan adalah pernyataan komposit yang dibentuk dengan menambahkan perangkai logika "tidak benar bahwa" sebelum pernyataan itu atau menyisipkan kata "tidak". Ingkaran dari pernyataan p dinotasikan ~ p dibaca "bukan p" atau "tidak p". Misalkan p simbol untuk pernyataan "empat habis dibagi dua", maka negasi dari p adalah “tidak benar bahwa empat habis dibagi dua” atau “empat tidak habis dibagi dua”, dan disimbolkan $\sim p$.

Nilai kebenaran negasi suatu pernyataan selalu berlawanan dengan nilai kebenaran pernyataan itu sendiri. Berikut tabel kebenaran negasi.

p	~p
B	S
S	B

Misalkan p : hari tidak hujan

berarti ~p : **tidak benar** bahwa hari hujan

: hari **tidak** hujan

Untuk lebih memahami definisi negasi, coba perhatikan contoh berikut

Contoh 3. 1

1. p : Ibu pergi ke pasar

   ~ p : Ibu tidak pergi ke pasar
2. q : $3 + 4 = 7$

   ~ q : Tidaklah benar $3 + 4 = 7$ atau ~ q: $3 + 4 \neq 7$
3. r : Semua bilangan prima adalah bilangan ganjil

   ~ r : Tidaklah benar semua bilangan prima adalah bilangan ganjil

   Atau : Beberapa bilangan prima bukan bilangan ganjil

C. Konjungsi

Konjungsi adalah pernyataan komposit yang dibentuk dari dua pernyataan yang dirangkai oleh kata “dan”. Pernyataan-pernyataan tunggal yang digabungkan menjadi konjungsi disebut konjung-konjung (komponen-komponen). Perangkai konjungsi dilambangkan dengan “ $\wedge$ “.

Misalkan p pernyataan “Jakarta ibukota Indonesia”, dan q pernyataan “Kuala Lumpur ibukota Malaysia”. Konjungsi dari kedua pernyataan itu adalah “Jakarta ibukota Indonesia dan Kuala Lumpur ibukota Malaysia”, disimbolkan $p \wedge q$.

Konjungsi dari dua pernyataan hanya bernilai benar jika kedua pernyataan yang menyusunnya bernilai benar. Jika salah satu atau kedua pernyataan yang menyusunnya bernilai salah, maka konjungsi itu bernilai salah.

Berikut tabel kebenaran konjungsi

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Misalkan p : pensil

q : kertas

berarti $p \wedge q$: pensil **dan** kertas

Contoh 3. 2

p : diagonal-diagonal persegi saling berpotongan tengak lurus.

q : diagonal persegi sama panjang

$p \wedge q$: diagonal-diagonal persegi saling berpotongan tengak lurus dan diagonal persegi sama panjang

Pernyataan $p \wedge q$ bernilai benar sebab p bernilai benar dan q bernilai benar.

D. Disjungsi

Disjungsi merupakan pernyataan majemuk dengan kata penghubung “atau”. Masing-masing dari kedua pernyataan tunggal disebut “disjung-disjung” (*alternative*). Perangkai disjungsi dilambangkan dengan “ $\vee$ “.

Misalkan p pernyataan “dua bilangan genap”, dan q pernyataan “tiga bilangan prima”. Disjungsi dari kedua pernyataan itu adalah “dua bilangan genap atau tiga bilangan prima”, disimbolkan $p \vee q$.

Berikut tabel kebenaran disjungsi

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Misalkan p : pensil

q : kertas

berarti $p \vee q$: pensil **atau** kertas

Terdapat dua jenis disjungsi, yaitu disjungsi inklusif dan disjungsi eksklusif. Sebuah **disjungsi inklusif** bernilai benar jika paling sedikit satu komponennya benar, dan sebuah **disjungsi eksklusif** bernilai benar jika paling sedikit satu komponennya benar, tetapi tidak dua-duanya. Contoh disjungsi eksklusif sebagai berikut.

Contoh 3. 3

p : Rizal lahir di kota Bali.

q : Rizal lahir di Yogyakarta

Pernyataan $p \vee q$, yaitu Rizal lahir di kota Bali atau Rizal lahir di kota Yogyakarta akan bernilai benar jika hanya salah satu (p atau q saja) yang bernilai benar

Disjungsi inklusif disimbolkan "$\vee$" dan disjungsi eksklusif disimbolkan "$\veebar$". Tabel kebenaran "atau inklusif" ($\vee$), dan "atau eksklusif" ($\veebar$) adalah, seperti tabel berikut.

Disjungsi Inklusif

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Disjungsi Ekslusif

p	q	$p \veebar q$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

E. Implikasi

Suatu pernyataan majemuk yang dibentuk dengan cara menggabungkan dua pernyataan tunggal dengan memakai kata perangkai **"jika ... maka ..."** disebut implikasi yang disimbolkan "⇒".

Misalkan p pernyataan "faktor dari lima adalah satu dan lima", dan q pernyataan "lima bilangan prima". Implikasi dari kedua pernyataan itu adalah "jika faktor dari lima adalah satu dan lima, maka lima bilangan prima", disimbolkan $p \Rightarrow q$. Dalam hal ini p disebut anteseden dan q disebut konsekuen. p merupakan syarat cukup untuk q dan q syarat perlu untuk p.

Implikasi selalu bernilai benar, kecuali jika antesedennya (p) bernilai benar tetapi konsekuennya (q) bernilai salah. Nilai kebenaran ini dapat dijelaskan sebagai berikut. Misalnya kita berjanji pada Abdul bahwa jika Abdul naik kelas,maka Abdul akan diajak liburan. Disini terdapat dua pernyataan tunggal yaitu:

p : Abdul naik kelas.

q : Abdul diajak liburan

Seandainya p bernilai benar, yaitu Abdul naik kelas dan q juga benar, yaitu Abdul diajak liburan, maka kita tidak melanggar janji kita sehingga pernyataan $p \Rightarrow q$ bernilai benar. Adapun jika p benar, tetapi q salah yaitu Abdul tidak jadi diajak liburan, maka kita telah melanggar janji, sehingga pernyataan $p \Rightarrow q$ bernilai salah.

Selanjutnya bagaimanakah apabila p bernilai salah, yaitu Abdul tidak naik kelas? Pada kasus ini kita diberi kebebasan apakah tetap akan mengajak liburan atau tidak. Oleh karena itu, apapun nilai kebenaran dari pernyataan q, maka pernyataan $p \Rightarrow q$ tetap bernilai benar.

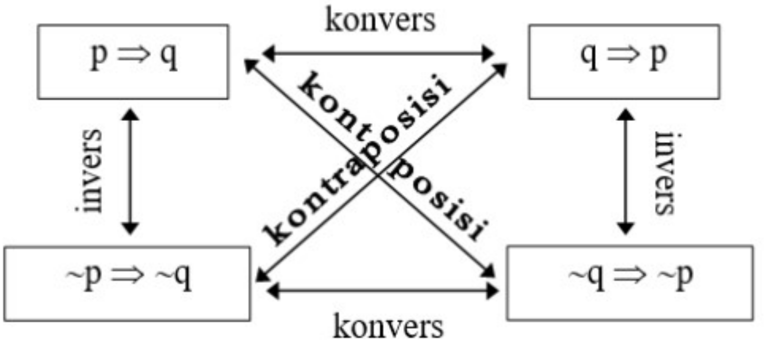
Secara ringkas tabel kebenaran implikasi disajikan sebagai berikut.

p	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Jika p ⇒ q suatu implikasi, maka

- q ⇒ p disebut k**onvers** dari implikasi p ⇒ q
- ~p ⇒ ~q disebut **invers** dari implikasi p ⇒ q
- ~q ⇒ ~p disebut **kontraposisi** dari implikasi p ⇒ q

Skema berikut menunjukkan hubungan suatu implikasi dengan konvers, invers, dan kontraposisinya.



Contoh 3. 4

Carilah konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan: "Jika ABCD adalah belah ketupat, maka kedua diagonalnya berpotongan tepat di tengah-tengah".

Jawab:

Invers	:	Jika ABCD adalah BUKAN belah ketupat, maka kedua diagonalnya TIDAK berpotongan tepat di tengah-tengah
Konvers	:	Jika segiempat ABCD kedua diagonalnya berpotongan tepat di tengah-tengah, maka ABCD adalah belah ketupat
Kontraposisi	:	Jika segiempat ABCD kedua diagonalnya TIDAK berpotongan tepat di tengah-tengah, maka segiempat ABCD BUKAN belah ketupat

F. Biimplikasi

Biimplikasi adalah pernyataan komposit yang dibentuk dari dua pernyataan dan dirangkai oleh "jika dan hanya jika". Biimplikasi merupakan implikasi dua arah. Secara simbolik pernyataan biimplikasi "p jika dan hanya jika q" dapat dinyatakan dengan "p ⇔ q" Pernyataan "p ⇔ q" dapat dibaca :

p jika dan hanya jika q atau

jika p maka q dan jika q maka p atau

p syarat cukup dan perlu untuk q atau

q syarat cukup dan perlu untuk p

Misalkan p pernyataan "empat bilangan genap", dan q pernyataan "empat habis dibagi dua". Biimplikasi dari kedua pernyataan itu adalah "empat bilangan genap jika dan hanya jika empat habis dibagi dua", disimbolkan $p \Leftrightarrow q$. p merupakan syarat cukup dan perlu untuk q.

Biimplikasi merupakan implikasi dua arah. $p \Leftrightarrow q$ adalah bentuk lain dari $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$. Biimplikasi bernilai benar jika kedua pernyataan yang menyusunnya mempunyai nilai kebenaran yang sama.

Berikut tabel kebenaran biimplikasi.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

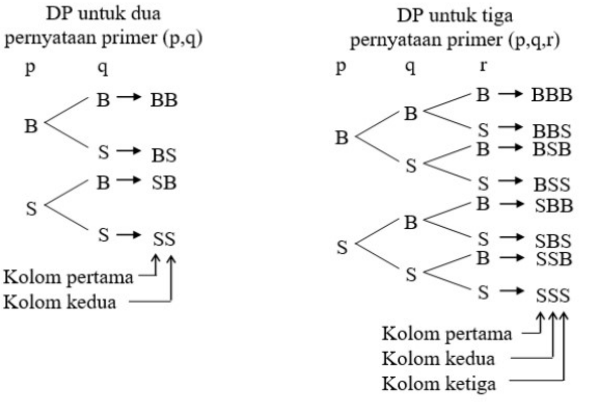
Misalkan

p : hari tidak hujan

q : matahari bersinar cerah

berarti $p \Leftrightarrow q$: hari tidak hujan **jika dan hanya jika** matahari bersinar cerah

Agar tidak terjadi kekeliruan dalam mengisi kolom-kolom kebenaran pernyataan primer pada tabel kebenaran, dapat digunakan bantuan **diagram pohon** (DP)



G. Kesepakatan Penggunaan Kata Hubung

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai kalimat yang menggunakan kata hubung lebih dari satu. Misalkan: "jika hari ini hujan atau saya memakai mantel maka saya tidak terlambat". Kalimat di atas ada yang menafsirkan "hari ini hujan atau jika saya memakai mantel maka saya tidak terlambat". Atau "hari ini hujan atau saya memakai mantel maka saya tidak terlambat".

Untuk menghindari salah tafsir dari kalimat yang menggunakan lebih dari satu kata hubung maka perlu disepakati adanya urutan pengerjaan (urutan kuat ikat). Disamping itu, jika penulisan pernyataan dilakukan secara simbolik akan diperlukan pengunaan tanda kurung kecil (…). Untuk menentukan nilai kebenaran sebuah pernyataan majemuk yang lebih dari dua pernyataan tunggal dan lebih dari satu operasi, pertama-tama dicari nilai kebenaran pernyataan-pernyataan yang terletak di dalam tanda kurung kecil (...), kemudian yang terletak di dalam tanda kurung siku [...], dan seterusnya.

Jika dalam sebuah pernyataan majemuk tidak ada tanda-tanda pengelompokan, seperti kurung kecil ( ), kurung siku [ ] maka operasi-operasi logika dikerjakan menurut urutan: (1) negasi; (2) konjungsi atau disjungsi; (3) implikasi dan (4) biimplikasi.

Contoh 3. 5

Berdasarkan kesepakatan di atas maka,

(1) $\sim p \vee q$ berarti $(\sim p) \vee q$

(2) $p \vee q \Rightarrow r$ berarti $(p \vee q) \Rightarrow r$

(3) $p \Leftrightarrow q \Rightarrow r$ berarti $p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$

3. BAGIAN EVALUASI (PENGALAMAN BELAJAR)

Forum Diskusi: Perangkai Logika

Mahasiswa yang berbahagia, kalian telah mempelajari materi terkait perangkai logika. Silahkan cermati dengan pertanyaan berikut dan diskusikan Bersama temannya pada forum diskusi.

1. Misalkan

p: Logika sangat mudah

q: Geometri sangat sukar

r: Bahasa sangat menarik

Gunakan perangkai logika yang tepat dan tanda kurung yng diperlukan untuk menerjemahkan pernyataan berikut ini menjadi pernyataan simbolik

a. Bahasa sangat menarik dan geometri sangat sukar, atau logika sangat mudah
b. Tidak benar bahwa logika sangat mudah dan geometri sangat sukar
c. Logika sangat mudah dan Bahasa ssangat menarik, hanya jika geometri sangat sukar

2. Buatlah tabel kebenaran untuk pernyataan berikut.
   a. $\sim(p \wedge q)$
   b. $(p \Rightarrow q) \vee r$
   c. $p \wedge q \Rightarrow r$

BAGIAN II: MATERI AJAR 4

TOPIK IV:

EKUIVALENSI, TAUTOLOGI, KONTRADIKSI, DAN KONTINGENSI

1. PENGANTAR TOPIK MATERI AJAR

Sapaan

Assalaamu alaikum wa rohmatullaahi wa barokaatuh

Apa kabar mahasiswa hebat? Semoga tetap semangat dalam menuntut ilmu sebagai bagian dari ibadah kepada Allah Rabbul Alamiin. Mari kita awali kegiatan belajar ini dengan membaca doa

رَضِيْتُ بِاللهِ رَبًّا وَبِالْإِسْلاَمِ دِيْنًا وَبِمُحَمَّدٍ نَبِيًّا وَرَسُوْلًا رَبِّ زِدْنِيْ عِلْمًا نَافِعًا وَرْزُقْنِيْ فَهْمًا

Rodhiitu billaahi robbaa, wa bil islaami diinaaa, wa bi muhammadin nabiyyaw wa rosuulaa. Robbii zidnii 'ilman naafi'aan warzuqnii fahmaa

Artinya: Aku ridho Allah sebagai tuhanku, Islam sebagai agamaku, dan Nabi Muhammad sebagai nabi dan rasul. Ya Allah, tambahkanlah kepadaku ilmu yang bermanfaat dan berilah aku karunia untuk dapat memahaminya.

Pada Topik III: Perangkai Logika kita telah mempelajari proposisi majemuk dan cara menentukan nilai kebenarannya menggunakan tabel kebenaran. Pada Topik IV: Ekuivalensi, Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi ini dibahas hubungan dua atau lebih proposisi serta proposisi yang memiliki nilai kebenaran tetap.

Deskripsi Materi Ajar

Sampai saat ini, proposisi majemuk yang dikenal memiliki beragam nilai kebenaran tergantung pada nilai kebenarannya. Pada bagian berikut kita akan mengenal istilah untuk proposisi-proposisi yang nilai kebenarannya tetap, yaitu tautologi dan kontradiksi. Selain itu topik ini juga akan membahas mengenai proposisi yang ekuivalen dan kontingen.

Sub Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

1. Memahami perbedaan ekuivalensi, tautologi, kontradiksi, dan kontingensi
2. Menentukan suatu pernyataan merupakan ekuivalen, tautologi, kontradiksi, atau kontingensi

Indikator Capaian Pembelajaran

1. Memahami definsi ekuivalensi, tautologi, kontradiksi, dan kontingensi
2. Membuktikan suatu pernyataan merupakan ekuivalen, tautologi, kontradiksi, atau kontingensi dengan mengunakan tabel kebenaran.

Skenario Pembelajaran

Topik IV: Ekuivalensi, Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi ini akan kita bahas selama 1 kali pertemuan tatap muka (offline) ataupun secara daring (online). Setelah mempelajari materi ini, ada beberapa tagihan pembelajaran sebagai bentuk pengelaman belajar bagi Anda. Tagihan pembelajaran berupa forum diskusi, tugas, ataupun bentuk evaluasi lainnya. Oleh karena itu diharapkan kepada Anda untuk mempersiapkan diri dalam mempelajari materi ini. Anda dapat melakukan aktivitas pembelajaran secara mandiri dengan cara mengakses materi ajar maupun berkolaborasi dengan teman yang lain.

2. MATERI AJAR

A. Ekuivalensi

Sebuah pernyataan majemuk bisa jadi memiliki lebih dari satu pernyataan yang ekuivalen. Perhatikan kembali contoh pernyataan majemuk *Jika saya pergi ke sekolah naik bus maka saya sampai sekolah tepat waktu.* Bentuk ekuivalen dari pernyataan majemuk tersebut adalah *Jika saya tidak sampai sekolah tepat waktu maka saya pergi ke sekolah tidak naik bus.* Selain itu, terdapat bentuk ekuivalen lain untuk contoh pernyataan majemuk tersebut. Contoh bentuk ekuivalen lain untuk contoh tersebut adalah *Saya pergi kesekolah tidak naik bus atau saya sampai sekolah tepat waktu.*

Dua pernyataan majemuk dikatakan ekuivalen jika untuk semua kemungkinan nilai kebenaran komponen-komponennya, pernyataan majemuk itu mempunyai nilai kebenaran yang sama. Simbol "≡" digunakan untuk menyatakan ekuivalen. Untuk melihat keabsahan dua pernyataan majemuk yang saling ekuivalen dapat dilihat melalui tabel kebenaran.

Contoh 4. 1

Tunjukkan bahwa $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$!

Jawab:

p	q	$\sim p$	$p \Longrightarrow q$	$\sim p \vee q$
B	B	S	B	B
B	S	S	S	S
S	B	B	B	B
S	S	B	B	B

Berdasarkan tabel di atas terlihat bahwa nilai kebenaran pada kolom $p \Longrightarrow q$ dan nilai kebenaran pada kolom $\sim p \vee q$ adalah sama, maka kedua pernyatan tersebut ekuivalen atau $(p \Longrightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

Hukum proposisi berikut akan bermanfaat untuk membuktikan ekuivalensi dua buah proposisi.

1. Hukum Involusi: $\sim(\sim p) \equiv p$
2. Hukum De Morgan:

   $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

   $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
3. Hukum Identitas:

   $p \vee S \equiv p$ $\quad$ $p \vee \mathrm{B} \equiv \mathrm{B}$

   $p \wedge B \equiv p$ $\quad$ $p \wedge \mathrm{S} \equiv \mathrm{S}$
4. Hukum Absorpsi:

   $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

   $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
5. Hukum Null (Dominisasi):

   $p \wedge S \equiv S$

   $p \vee B \equiv B$
6. Hukum Komutatif:

   $p \vee q \equiv q \vee p$

   $p \wedge q \equiv q \wedge p$
7. Hukum Negasi:

   $p \wedge \sim p \equiv S$

   $p \vee \sim p \equiv B$
8. Hukum Asosiatif:

   $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

9. Hukum Idempoten:

   $p \vee p \equiv p$

   $p \wedge p \equiv p$

10. Hukum Distributif:

   $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

   $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Ekuivalensi pernyataan majemuk lainnya:

1. $p \Longrightarrow q \equiv \sim p \vee q$
2. $p \Longrightarrow q \equiv \sim q \Longrightarrow \sim p$
3. $\sim(p \Longrightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
4. $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Longrightarrow r$
5. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$
6. $p \Leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
7. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
8. $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

Contoh 4. 2

Tunjukkan keekivalenan berikut adalah BENAR dengan menggunakan aturan-aturan yang sudah ada

a. $\sim(Q \wedge P) \equiv P \Rightarrow \sim Q$

b. $P \wedge [(P \wedge Q) \vee R] \equiv P \wedge (Q \vee R)$

Jawab.

Dengan aturan ekivalensi yang ada, kita peroleh

a. $\sim(Q \wedge P) \equiv \sim Q \vee \sim P$ (De Morgan)

$\equiv \sim P \vee \sim Q$ (Komutatif)

$\equiv P \Rightarrow \sim Q$ (Implikasi Material)

Jadi $\sim(Q \wedge P) \equiv P \Rightarrow \sim Q$

b. $P \wedge [(P \wedge Q) \vee R] \equiv [P \wedge (P \wedge Q)] \vee (P \wedge R)$ (Distributif)

$\equiv [(P \wedge P) \wedge Q)] \vee (P \wedge R)$ (Asosiatif)

$\equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (Idempoten)

$$\equiv P \wedge (Q \vee R) \qquad \text{(Distributif)}$$

Jadi $P \wedge [(P \wedge Q) \vee R] \equiv P \wedge (Q \vee R)$

B. Tautologi

Tautologi adalah proporsi majemuk yang selalu bernilai benar untuk semua kemungkinan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan komponennya. Sebuah Tautologi yang memuat pernyataan Implikasi disebut Implikasi Logis. Untuk membuktikan apakah suatu pernyataan Tautologi, maka ada dua cara yang digunakan. Cara pertama dengan menggunakan tabel kebenaran, yaitu jika semua pilihan bernilai B (benar) maka disebut Tautologi, dan cara kedua yaitu dengan melakukan penjabaran atau penurunan dengan menerapkan sebagian dari 12 hukum-hukum Ekuivalensi Logika.

Contoh 4. 2

Gunakanlah tabel kebenaran untuk menganalisis bahwa pernyataan $p \wedge q \Longrightarrow p$ merupakan tautologi

Jawab:

Dengan menggunakan tabel kebenaran diperoleh sebagai berikut.

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Longrightarrow p$
B	B	B	B
B	S	S	B
S	B	S	B
S	S	S	B

Pada tabel di atar terlihat bahwa nilai kebenaran pada kolom $p \wedge q \Longrightarrow p$ bernilai BENAR semua, maka pernyataan $p \wedge q \Longrightarrow p$ merupakan tautologi.

C. Kontradiksi

Kontradiksi adalah proporsi majemuk yang selalu bernilai salah untuk semua kemungkinan kombinasi nilai kebenaran dari proporsi-proporsi nilai pembentuknya. . Untuk membuktikan apakah suatu pernyataan tersebut kontradiksi, maka ada dua cara yang digunakan. Cara pertama dengan menggunakan tabel kebenaran, yaitu jika semua pilihan bernilai F atau salah maka disebut kontradiksi, dan cara kedua yaitu dengan melakukan penjabaran atau penurunan dengan menerapkan sebagian dari 12 hukum-hukum Ekuivalensi Logika.

Contoh 4. 3

Gunakanlah tabel kebenaran untuk menganalisis bahwa pernyataan $(p \wedge q) \wedge \sim p$ merupakan kontradiksi!

Jawab:

Dengan menggunakan tabel kebenaran diperoleh sebagai berikut.

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge \sim p$
B	B	S	B	S
B	S	S	S	S
S	B	B	S	S
S	S	B	S	S

Pada tabel di atas terlihat bahwa nilai kebenaran pada kolom $(p \wedge q) \wedge \sim p$ bernilai SALAH semua maka pernyataan $(p \wedge q) \wedge \sim p$ merupakan kontradiksi.

D. Kontingensi

Kontingensi adalah suatu ekspresi logika yang mempunyai nilai benar dan salah di dalam tabel kebenarannya, tanpa memperdulikan nilai kebenaran dari proposisi-proposisi yang berada di dalamnya.

Selain pengertian di atas kontingensi juga merupakan:

- Proposisi majemuk yang bukan tautologi juga bukan kontradiksi. Contoh: $p \Rightarrow (p \wedge q)$ dan $p \wedge q \Rightarrow r$ masing-masing bukan tautologi dan kontradiksi.
- Merupakan bentuk campuran dari nilai benar (B) dan nilai salah (S)

Contoh 4. 4

Gunakanlah tabel kebenaran untuk menganalisis kebenaran pernyataan

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

Jawab

Dengan menggunakan tabel kebenaran diperoleh sebagai berikut.

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow p$
B	B	B	B
B	S	S	S
S	B	S	S
S	S	S	B

Pada tabel di atas terlihat bahwa nilai kebenaran pada kolom $(p \wedge q) \Leftrightarrow p$ bukan merupakan tautologi ataupun kontradiksi, sehingga pernyataan tersebut merupakan kontingensi.

3. BAGIAN EVALUASI (PENGALAMAN BELAJAR)

Forum Diskusi: Ekuivalensi, Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi

Mahasiswa yang berbahagia, kalian telah mempelajari materi terkait ekuivalensi, tautologi, kontradiksi, dan kontingensi. Silahkan cermati dengan pertanyaan berikut dan diskusikan bersama teman pada forum diskusi.

1. Buktikan setiap pernyataan berikut ini!
   a. $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
   b. $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
2. Selidikilah pernyataan berikut ini apakah merupakan tautologi, kontradiksi, atau kontingensi!
   a. $(p \Rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$
   b. $(p \Rightarrow q \wedge (p \wedge \sim q)$

BAGIAN II: MATERI AJAR 5

TOPIK V:

KUANTOR

1. PENGANTAR TOPIK MATERI AJAR

Sapaan

Assalaamu alaikum wa rohmatullaahi wa barokaatuh

Apa kabar mahasiswa hebat? Semoga tetap semangat dalam menuntut ilmu sebagai bagian dari ibadah kepada Allah Rabbul Alamiin. Mari kita awali kegiatan belajar ini dengan membaca doa

رَضِيْتُ بِاللهِ رَبًّا وَبِالْاِسْلاَمِ دِيْنًا وَبِمُحَمَّدٍ نَبِيًّا وَرَسُوْل رَبِّىْ زِدْنِيْ عِلْمًا نافِعًا وَرْزُقْنِيْ فَهْمًا

Rodhiitu billaahi robbaa, wa bil islaami diinaaa, wa bi muhammadin nabiyyaw wa rosuulaa. Robbii zidnii 'ilman naafi'aan warzuqnii fahmaa

Artinya: Aku ridho Allah sebagai tuhanku, Islam sebagai agamaku, dan Nabi Muhammad sebagai nabi dan rasul. Ya Allah, tambahkanlah kepadaku ilmu yang bermanfaat dan berilah aku karunia untuk dapat memahaminya.

Deskripsi Materi Ajar

Quantifier atau kuantor adalah kata yang mendahului kata benda sebagai fungsi untuk menunjukkan jumlah dari benda tersebut. Sehingga, pernyataan berkuantor merupakan pernyataan yang mengandung ukuran kuantitas atau jumlah. Kata yang digunakan sebagai penunjuk kuantitas/jumlah biasanya adalah semua, beberapa, ada, dan lain sebagainya. Dalam kuantor Logika matematika terbagi menjadi dua bagian yaitu : Kuantor universal dan kuantor eksistensial. Topik ini akan membahas mengenai kedua kuantor tersebut. Sebelum membahas tentang kuantor universal dan eksistensi, terlebih dahulu akan dibahas mengenai fungsi pernyataan.

Sub Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

1. Membedakan kuantor universal dan kuantor eksistensi
2. Memahami negasi suatu pernyataan yang mengandung kuantor

Indikator Capaian Pembelajaran

1. Memahami definisi fungsi pernyataan.
2. Memahami definisi kuantor universal serta menunjukkan contohnya.
3. Memahami definisi kuantor eksistensi serta menunjukkan contohnya.
4. Mampu menentukan negasi dari suatu pernyataan yang mengandung kuantor.

Skenario Pembelajaran

Topik V ini akan kita bahas selama 1 kali pertemuan tatap muka (offline) ataupun secara daring (online). Setelah mempelajari materi ini, ada beberapa tagihan pembelajaran sebagai bentuk pengelaman belajar bagi Anda. Tagihan pembelajaran berupa forum diskusi, tugas, ataupun bentuk evaluasi lainnya. Oleh karena itu diharapkan kepada Anda untuk mempersiapkan diri dalam mempelajari materi ini. Anda dapat melakukan aktivitas pembelajaran secara mandiri dengan cara mengakses materi ajar maupun berkolaborasi dengan teman yang lain.

2. MATERI AJAR

A. Fungsi Pernyataan

Suatu fungsi pernyataan adalah suatu kalimat terbuka di dalam semesta pembicaraannya (semesta pembicaraannya diberikan secara eksplisit atau implisit). Jika A suatu himpunan, p(x) merupakan fungsi pernyataan pada A jika p(a) merupakan pernyataan untuk sebarang a ∈ A. p(x) juga dapat disebut kalimat terbuka pada A.

Sedangkan himpunan a anggota A yang membuat p(a) menjadi pernyataan yang benar disebut himpunan jawab, atau himpunan penyelesaian, atau himpunan kebenaran. Secara simbolik H = $\{ x \mid x \in A, p(x)$ benar$\}$

Contoh 5. 1

1. Misalkan $p(x)$ adalah $x >0$. Maka $p(x)$ merupakan fungsi pernyataan pada himpunan semua bilangan asli N. Sedangkan himpunan penyelesaian $H = \{x|x \in A, x > 0\} = N$
2. Misalkan $p(x)$ adalah $x^{2} + x + 1 = 0$. Maka $p(x)$ merupakan fungsi pernyataan pada himpunan semua bilangan real R. Sedangkan himpunan penyelesaian H = $\emptyset$

3. Misalkan $p(x)$ adalah $x + 5 > 10$. Maka $p(x)$ merupakan fungsi pernyataan pada himpunan semua bilangan asli N. Sedangkan himpunan penyelesaian H = {6, 7, 8, …}
4. Misalkan $p(x)$ adalah $x + 5 > 0$. Maka $p(x)$ bukan merupakan fungsi pernyataan pada himpunan semua bilangan komplek K.

Sekarang perhatikan contoh-contoh di atas. Jika p(x) suatu fungsi pernyataan yang didefinisikan pada suatu himpunan maka p(x) dapat benar untuk semua x pada himpunan tersebut, seperti yang diperlihatkan oleh contoh 1. Sedangkan pada contoh 2 tidak ada satupun anggota R yang membuat p(x) menjadi benar, tetapi pada contoh 3 p(x) benar untuk beberapa x anggota A. Selanjutnya kita tertarik untuk membicarakan p(x) yang dikaitkan dengan semua anggota, atau beberapa anggota himpunan.

B. Kuantor Universal

Kata "untuk setiap" atau "untuk semua" disebut kuantor universal dan disimbolkan dengan "∀". Sedangkan simbol "(∀x∈A). p(x)" dibaca untuk setiap x anggota A berlakulah p(x) atau jika semesta pembicaraan telah disepakati lebih dahulu dapat disingkat "(∀x). p(x)". Misalkan p(x) adalah fungsi pernyataan pada A. Maka kalimat "untuk setiap x berlakulah p(x)" merupakan suatu pernyataan.

Contoh 5. 2 :

1. "(∀x∈R). $x^2 \geq 0$" yang berarti untuk setiap x anggota R berlaku $x^2 \geq 0$ merupakan pernyataan yang bernilai benar.
2. "$(\forall x \in R).\ x^2 + 5x + 4 = 0$", yang berarti untuk setiap x anggota R berlaku $x^2 + 5x + 4 = 0$ merupakan pernyataan yang bernilai salah.

Suatu kuantor kadang-kadang tidak dinyatakan secara eksplisit. Misalkan, jika x lebih besar dari satu maka x^2 juga lebih besar 1. Pernyataan di atas dapat diartikan sebagai "(∀x). $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$"

Contoh 5. 3

Pada semesta pembicaraan semua mahasiswa Universitas Muhammadiyah Makassar, misal diberikan

q(x) : " x harus mengambil matakuliah Landasan Matematika"

r(x) : " x adalah mahasiswa Jurusan Matematika".

Ekspresikan pernyataan berikut ke dalam bentuk simbol:

a. Semua mahasiswa Jurusan Matematika harus mengambil matakuliah Landasan Matematika.
b. Semua mahasiswa harus mengambil matakuliah Landasan Matematika atau menjadi mahasiswa Jurusan Matematika.

Jawab:

a. $(\forall x)(r(x) \Rightarrow q(x))$
b. $(\forall x)(q(x) \vee r(x))$

Contoh 5. 4

Tentukan kebenaran dari pernyataan berikut.

1. $(\forall x \in N)(x + 3 > 1)$
2. $(\forall x \in R)(x + 3 > 1)$

Jawab:

a. Benar, karena bilangan asli terkecil adalah 1 sehingga untuk setiap bilangan asli yang ditambahkan 3 akan lebih dari 1.
b. Salah, karena ada bilangan real $x = -4$ sehingga berlaku $x + 3 < 1$

C. Kuantor Eksistensi

Kata "ada" atau "beberapa" atau "terdapat paling sedikit satu" disebut kuantor eksistensial dan disimbolkan dengan "∃". Sedangkan simbol "(∃x∈A). p(x)" dibaca ada x anggota A sedemikian hingga berlakulah p(x) atau jika semesta pembicaraan telah disepakati lebih dahulu dapat disingkat "(∃x). p(x)". Misalkan p(x) adalah fungsi pernyataan pada A. Maka kalimat "ada x sedemikian hingga berlakulah p(x)" merupakan suatu pernyataan. Ada beberapa pengarang yang menuliskan kuantor eksistensial dengan simbol "∃x∈A ∋ p(x)"

Contoh 5. 5

1. "(∃x∈R). $x^2 - 5x + 6 = 0$yang berarti ada x anggota R sedemikian hingga $x^2 - 5x + 6 = 0$ merupakan pernyataan yang benar.
2. "(∃x∈R) $x^2 + 1 = 0$" yang berarti ada x anggota R sedemikian hingga $x^2 + 1 = 0$ merupakan pernyataan yang salah.

Contoh 5. 6

Tentukan kebenaran dari pernyataan berikut.

1. $(\exists x \in N)(x^2 = x)$

2. $(\exists x \in N)(x^2 + 5x + 6 = 0)$

Jawab:

a. Benar, sebab terdapat setidaknya salah satu bilangan asli yang memenuhi persamaan tersebut, yaitu ketika $x = 1$.

b. Salah, sebab tidak ada bilangan asli yang memenuhi persamaan tersebut. Persamaan akan bernilai sama dengan nol ketika $x = -2$ atau $x = -3$, padahal bilangan-bilangan tersebut bukan merupakan bilangan asli sehingga pernyataan tersebut salah.

D. Negasi dari Suatu Pernyataan Yang Mengandung Kuantor

Negasi pernyataan "Semua manusia akan mati" adalah "Tidak benar bahwa semua manusia akan mati" atau "Beberapa manusia tidak akan mati". Negasi pernyataan "Beberapa manusia memakai baju putih" adalah "Tidak benar bahwa beberapa manusia memakai baju putih" atau " Semua manusia tidak memakai baju putih".

Secara umum, ingkaran kalimat: "semua x bersifat $p(x)$" adalah "Ada x yang tidak bersifat $p(x)$", atau dapat dinyatakan sebagai berikut $\sim [\ (\forall x)\ p(x)\ ] \ \equiv\ \exists\ (x) \sim p(x)$. Kesetaraan ini dikenal dengan hukum De Morgan untuk kalimat berkuantor. Tabel Hukum De Morgan untuk Kuantifikasi

Negasi	Pernyataan Setara	Kapan Negasi bernilai Benar?	Kapan Negasi bernilai Salah?
$\sim [(\exists x)\ p(x)\ ]$	$(\forall x) \sim p(x)$	Untuk setiap x, p(x) salah	Ada x dimana p(x) benar
$\sim [(\forall x)\ p(x)\ ]$	$(\exists x) \sim p(x)$	Ada x dimana p(x) salah	P(x) benar untuk setiap x

Dengan demikian, jika dituliskan secara simbolik adalah:

$\forall\ x\ \ p(x)$ negasinya $\exists x \sim p(x)$

$\exists x\ \ p(x)$ negasinya $\forall\ x \sim p(x)$

$\forall x\ \exists y\ \ p(x, y)$ negasinya $\exists x\ \forall y \sim p(x, y)$

$\exists x\ \forall y\ \ p(x, y)$ negasinya $\forall x\ \exists y \sim p(x, y)$

Contoh 5. 7

- Negasi dari pernyataan: " Semua mahasiswa tidak mengerjakan tugas " adalah " Ada mahasiswa yang mengerjakan tugas "
- Negasi dari $(\forall x)(\exists y)(x^2 + y^2) < 25)$ adalah $(\exists x)(\forall y){\sim}((x^2 + y^2) < 25)$ atau $(\exists x)(\forall y)(x^2 + y^2) \geq 25)$

Pada kenyataanya penting diketahui bahwa urutan dalam kuantor tak dapat dibalik. Misalkan, jika diberikan sebarang bilangan real x selalu dapat ditemukan bilangan y yang lebih besar dari x. Secara simbolik, $(\forall x)\ (\exists y).\, y\ >\ x$ merupakan pernyataan yang benar. Sedangkan ada bilangan y sedemikian hingga untuk setiap x berlaku bahwa y lebih dari x, secara simbolik $(\exists y)\ (\forall x).\, y\ >\ x$ merupakan pernyataan yang salah.

Contoh Penyangkal

Menurut hukum De Morgan, $\sim (\forall x\ \in\ A)\, p(x)\ \equiv\ (\exists x\ \in\ A)\ \sim p(x)$. Sehingga untuk memperlihatkan bahwa suatu pernyataan $(\forall x).\, p(x)$ salah maka akan ekuivalen dengan $(\exists x)\ \sim p(x)$ benar. Berarti harus ditunjukkan bahwa ada sebuah elemen a dengan sifat bahwa $p(a)$ salah. Sebuah elemen a seperti itu disebut contoh penyangkal (*counter example*) pada pernyataan $(\forall x).\, p(x)$.

Contoh 5. 8

Tentukan kebenaran pernyataan $(\forall x).\ |x|\ > 0$. Pernyataan tersebut salah karena untuk $x = 0$ maka $|0| = 0$

Secara umum suatu pernyataan berkuantor bernilai benar atau bernilai salah disajikan pada table berikut

Pernyataan	Kapan bernilai benar?	Kapan bernilai salah?
$(\forall x)\, p(x)$	$p(x)$ bernilai benar untuk setiap x	Ada x sehingga $p(x)$ bernilai salah
$(\exists x)\, p(x)$	Terdapat x sehingga $p(x)$ benar	$p(x)$ bernilai salah untuk setiap/semua x

3. BAGIAN EVALUASI (PENGALAMAN BELAJAR)

Forum Diskusi: Kuantor

Mahasiswa yang berbahagia, setelah mempelajari materi silahkan Anda lanjutkan dengan berdiskusi bersama teman-teman mahasiswa lainnya untuk memecahkan masalah berikut.

1. Tuliskan pernyataan-pernyataan berikut ini dalam bentuk simbolik!
   a. Semua laki-laki dapat dipercaya
   b. Setiap bilangan kuadrat lebih besar atau sama dengan nol
   c. Ada segitiga sama kaki yang bukan segitiga sama sisi
2. Tentukan nilai kebenaran pernyataan_pernyataan berikut!
   a. $(\exists x)(x + 3 = 5)$ dalam himpunan $A = \{1, 2, 3, \dots)$
   b. $(\forall x)(x^2 - 2 \geq 0)$ dalam B = {bilangan bulat}
   c. $(\exists x \in R)(x^2 > x)$; R = {bilangan Real}
3. Tentukan negasi dari pernyataan-pernyataan berikut!
   a. Semua bilangan cacah adalah bilangan real
   b. Beberapa bilangan asli adalah bilangan rasional
   c. $(\forall x)[(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1]$
   d. $(\forall n \in N)(2 + n > 5)$

BAGIAN II: MATERI AJAR 6

TOPIK VI:

ARGUMEN DAN KEVALIDANNYA

1. PENGANTAR TOPIK MATERI AJAR

Sapaan

Assalaamu alaikum wa rohmatullaahi wa barokaatuh

Apa kabar mahasiswa hebat? Semoga tetap semangat dalam menuntut ilmu sebagai bagian dari ibadah kepada Allah Rabbul Alamiin. Mari kita awali kegiatan belajar ini dengan membaca doa

رَضِيْتُ بِاللهِ رَبًّا وَبِالْاِسْلاَمِ دِيْنًا وَبِمُحَمَّدٍ نَبِيًّا وَرَسُوْل رَبِّىْ زِدْنِيْ عِلْمًا نَافِعًا وَرْزُقْنِيْ فَهْمًا

Rodhiitu billaahi robbaa, wa bil islaami diinaaa, wa bi muhammadin nabiyyaw wa rosuulaa. Robbii zidnii 'ilman naafi'aan warzuqnii fahmaa

Artinya: Aku ridho Allah sebagai tuhanku, Islam sebagai agamaku, dan Nabi Muhammad sebagai nabi dan rasul. Ya Allah, tambahkanlah kepadaku ilmu yang bermanfaat dan berilah aku karunia untuk dapat memahaminya.

Deskripsi Materi Ajar

Konklusi selayaknya diturunkan dari premis-premis atau premis-premis selayaknya mengimplikasikan konklusi. Dalam argumentasi valid, konklusi akan bernilai benar jika setiap premis yang digunakan di dalam argumen juga bernilai benar. Dalam bab ini akan diduskusikan beberapa metode dasar pembuktian, sehingga dimiliki kerangka logik untuk melakukan pembuktian yang lebih baik. Untuk menentukan apakah argumen tertentu valid atau tidak, dapat digunakan tabel kebenaran yang sesuai dengan argumen tersebut. Validitas pembuktian diklasifikasikan sebagai bukti langsung dan bukti tidak langsung. Pembuktian langsung dikonstruksi dari premisnya dengan menggunakan aturan-aturan penyimpulan (modus ponens, modus tolens, silogisme, silogisme disjungtif, dilema konstruktif, dilema destruktif, konjungsi, penambahan, serta penyederhanaan). Sedangkan pembuktian tidak langsung didasarkan pada suatu pernyataan lain yang kebenarannya sama dengan pernyataan yang akan dibuktikan (ekuivalen logis) misalnya kontrapositif dari pernyataan yang akan dibuktikan atau diluar konklusi dari pernyataan yang akan dibuktikan akan menghasilkan suatu pertentangan (kontradiksi) dengan sesuatu yang sudah dianggap benar.

Sub Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

Menyajikan metode pembuktian langsung (Validitas pembuktian), pembuktian kontrapositif dan pembuktian kontradiksi

Indikator Capaian Pembelajaran

1. Memahami definisi premis dan argument
2. Memahami bentuk-bentuk argument (Ponens, Tollenns, Silogisma, disjungstif, konjungsi, addition, dilema konstruktif, dilemma destruktif)
3. Memahami pembuktian kontrapositif
4. Memahami pembuktian kontradiksi

Skenario Pembelajaran

Topik VI: Argumen dan Kevalidannya ini akan kita bahas selama 2 kali pertemuan tatap muka (offline) ataupun secara daring (online). Setelah mempelajari materi ini, ada beberapa tagihan pembelajaran sebagai bentuk pengelaman belajar bagi Anda. Tagihan pembelajaran berupa forum diskusi, tugas, ataupun bentuk evaluasi lainnya. Oleh karena itu diharapkan kepada Anda untuk mempersiapkan diri dalam mempelajari materi ini. Anda dapat melakukan aktivitas pembelajaran secara mandiri dengan cara mengakses materi ajar maupun berkolaborasi dengan teman yang lain.

2. MATERI AJAR

A. Argumen

Himpunan pernyataan-pernyatan tunggal atau pernyataan majemuk yang ditentukan atau diasumsikan benar disebut ***premis***. Pernyataan tunggal atau pernyataan majemuk yang diturunkan dari premis-premis disebut ***kesimpulan/konklusi.*** Jadi premis inilah yang digunakan untuk menarik suatu kesimpulan. Premis dapat berupa aksioma, hipotesa, definisi, atau pernyataan yang sudah dibuktikan sebelumya. Sedangkan yang dimaksud dengan ***argumen*** adalah kumpulan kalimat yang terdiri atas satu atau lebih premis yang mengandung bukti-bukti (*evidence*) dan suatu konklusi.

Contoh 6. 1

1. Jika bilangan dan logika diperlukan maka semua mahasiswa belajar matematika
2. Bilangan dan logika diperlukan

$\therefore$ semua manusia belajar matematika

Pernyataan (1) dan (2) merupakan premis, sedangkan $\therefore$ merupakan kesimpulan dari argumen tersebut.

Suatu argumen dikatakan valid apabila untuk sembarang pernyataan-pernyataan yang ada dalam premis benar maka kesimpulannya juga benar. Sebaliknya, meskipun semua premis benar tetapi ada kesimpulan yang salah maka argument tersebut dikatakan tidak valid. Dengan kata lain, penarikan kesimpulan dikatakan valid jika kebenaran konjungsi pernyataan-pernyataan yang ada pada premis mengakibatkan secara logic kebenaran konklusi.

B. Validitas Pembuktian

Suatu pernyataan hanya mempunyai nilai benar saja atau salah saja dan tidak keduanya, maka kita dapat membuktikan validitas suatu argumen dengan menguji apakah argumen tersebut merupakan suatu tautologi. Untuk membuktikan keabsahan atau kevalidan suatu argumen, dapat dilakukan dengan menggunakan tabel kebenaran atau aturan penyimpulan. Untuk argumen sederhana atau argumen yang premis-premisnya hanya sedikit,bukti keabsahan argumen dapat menggunakan tabel kebenaran. Argumen yang premis-premisnya kompleks harus menggunakan aturan-aturan yang ada pada logika diantaranya aturan penyimpulan.

1. Pembuktian Langsung

a. Modus Ponens

Modus ponens adalah argumen yang berbentuk $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ atau dituliskan:

Premis 1: $p \Rightarrow q$

Premis 2: p

Konklusi: q

Argumen di atas dapat dibaca "Apabila diketahui jika p maka q benar, dan p benar, disimpulkan q benar (ada yang menggunakan tanda $\therefore$ untuk menyatakan konklusi, seperti $p \Rightarrow q, p \therefore q$).

Dengan tabel kebenaran, terlihat bahwa modus ponens merupakan argumen yang sah sebagai berikut.

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Contoh 6. 2

Premis 1: jika $p > 2$ bilangan prima maka p ganjil (*benar*)

Premis 2: 5 bilangan prima (*benar*)

Konklusi: 5 bilangan ganjil (*benar*)

b. Modus Tollen

Argumen modus tolen ini menyatakan bahwa suatu pernyataan konditional bernilai benar dan diketahui negasi konklusinya benar maka negasi dari hipotesisnya haruslah benar. Secara simbolik dapat dinyatakan $[(p \Rightarrow q) \wedge \backsim q] \Rightarrow \backsim p$

Premis 1: $p \Rightarrow q$

Premis 2: $\backsim q$

Konklusi: $\backsim p$

Dengan tabel kebenaran, terlihat bahwa modus ponens merupakan argumen yang sah sebagai berikut.

p	q	$\backsim p$	$\backsim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \backsim q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge \backsim q] \Rightarrow \backsim p$
B	B	S	S	B	S	B
B	S	S	B	S	S	B
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B

Contoh 6. 3

Premis 1: jika hari hujan maka saya memakai jas hujan (*benar*)

Premis 2: Saya tidak memakai jas hujan (*benar*)

Konklusi: Hari tidak hujan (*benar*)

c. Silogisme

Silogisme adalah argumen yang berbentuk $[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$ atau dituliskan

Premis 1: $p \Longrightarrow q$

Premis 2: $q \Longrightarrow r$

Konklusi: $p \Longrightarrow r$

Dengan tabel kebenaran, terlihat bahwa modus ponens merupakan argumen yang sah sebagai berikut.

p	q	r	$p \Longrightarrow q$	$q \Longrightarrow r$	$p \Longrightarrow r$	$[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$
B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	B
B	S	B	S	B	B	B
B	S	S	S	B	S	B
S	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B	B
S	S	B	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B

Contoh 6. 4

Premis 1: jika kamu benar saya bersalah (*benar*)

Premis 2: jika saya bersalah, saya minta maaf (*benar*)

Konklusi: jika kamu benar, saya minta maaf (*benar*)

d. Silogisme Disjungtif

Premis 1: $p \vee q$

Premis 2: $\backsim q$

Konklusi: p

Jika ada kemungkinan bahwa kedua pernyataan p dan q dapat *sekaligus* bernilai benar, maka argumen berikut ini tidak valid.

Premis 1: $p \vee q$

Premis 2: q

Konklusi: $\backsim p$

Tetapi jika ada kemungkinan kedua pernyataan p dan q *tidak sekaligus* bernilai benar (disjungsi eksklusif), maka silogisme disjungtif di atas adalah valid.

Contoh 6. 5

1. Premis 1: Pengalaman ini berbahaya atau membosankan (*benar*)
   Premis 2: Pengalaman ini tidak berbahaya (*benar*)
   ___
   Konklusi: Pengalaman ini membosankan (*benar*)

2. Premis 1: Air ini paanas atau dingin (*benar*)
   Premis 2: Air ini panas (*benar*)
   ___
   Konklusi: Air ini tidak dingin (*benar*)

Perhatikan bahwa pada contoh 6. 5 bagian (1), premis pertama dan kedua dapat sekaligus bernilai benar, dan pada contoh (2), premis pertama dan premis kedua tidak dapat sekaligus bernilai benar. Sedangkan pada contoh 6. 6 berikut, premis pertama dan premis kedua dapat sekaligus bernilai benar, sehingga bukan merupakan argumen yang valid.

Contoh 6. 6

1. Premis 1: Obyeknya berwarna merah atau sepatu (*benar*)
   Premis 2: Obyek ini berwarna merah (*benar*)
   ___
   Konklusi: Obyeknya bukan sepatu (*tidak valid*)

e. Dilema Konstruktif

Premis 1: $(p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow s)$

Premis 2: $p \vee r$

___

Konklusi: $q \vee s$

Dilemma konstruktif merupakan kombinasi dua argumen modus ponen (periksa argumen modus ponen)

Contoh 6. 7

Premis 1: Jika saya sedih, saya akan berdoa, dan jika saya Bahagia, saya akan mengobrol

Premis 2: Saya sedih atau saya bahagia

___

Konklusi: Saya berdoa atau saya mengobrol

f. Dilema Destruktif

Premis 1: $(p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow s)$

Premis 2: $\backsim q \vee \backsim s$

___

Konklusi: $\backsim p \vee \backsim r$

Dilema destruktif merupakan kombinasi dari dua argumen modus (perhatikan argumen modus tolens)

Contoh 6. 8

Premis 1: Jika saya memberikan pengakuan, saya akan digantung; dan jika saya tutup mulut, saya akan ditembak mati

Premis 2: Saya tidak akan digantung atau digantung

Konklusi: Saya tidak akan memberikan pengakuan atau tidak akan tutup mulut

g. Kongjungsi

Premis 1: p

Premis 2: q

Konklusi: $p \wedge q$

Pernyataan p bernilai benar dan pernyataan q juga bernilai benar. Jadi $p \wedge q$ haruslah benar.

Contoh 6. 9

Premis 1: 2 bilangan genap

Premis 2: 2 bilangan prima

Konklusi: 2 ilangan genap dan prima

h. Penambahan

Premis 1: p

Konklusi: $p \vee q$

Pernyataan p bernilai benar, maka $p \vee q$ benar (tidak peduli nilai benar atau nilai salah yang dimiliki oleh q

Contoh 6. 10

Premis 1: 15 habis dibagi 5

Konklusi: 15 habis dibagi 5 atau 15 bilangan genap

i. Penyederhanaan

Premis 1: $p \wedge q$

Konklusi: p

Pernyataan $p \wedge q$ bernilai benar, maka p tentu saja benar. Demikian halnya pernyataan q juga pasti benar. Sehingga penyederhanaan dapat juga dituliskan sebagai berikut.

Premis 1: $p \wedge q$

Konklusi: q

Contoh 6. 11

Premis 1: 5 bilangan prima dan bilangan ganjl

Konklusi: 5 bilangan prima

Sekarang kita akan membicarakan pembuktian argumen yang lebih kompleks dengan menggunakan bentuk-bentuk argumen valid di atas.

Contoh 6. 12

Diberikan argumen

$(p \wedge q) \Rightarrow [p \Rightarrow (s \wedge t)]$

$(p \wedge q) \wedge r$

$\therefore s \vee t$

Apakah argumen di atas valid?

Jawab:

Berikut ini adalah langkah-langkah pembuktian yang dilakukan:

1.	$(p \wedge q) \Rightarrow [p \Rightarrow (s \wedge t)]$	Premis
2.	$(p \wedge q) \wedge r$	Premis
3.	$p \wedge q$	2, Penyederhanaan
4.	$p \Rightarrow (s \wedge t)$	1, 3, Modus ponen
5.	p	3, Penyederhanaan
6.	$s \wedge t$	4, 5, Modus ponen
7.	s	6, Penyederhanaan
8.	$\therefore s \vee t$	7, Penambahan

Jadi argumen tersebut di atas adalah valid

Contoh 6. 13

Jika pengetahuan logika diperlukan atau pengetahuan aljabar diperlukan, maka semua orang akan belajar matematika. Pengetahuan logika diperlukan dan pengetahuan geometri diperlukan. Karena itu semua mahasiswa akan belajar matematika.

Validkah argumentasi di atas?

Jawab:

Argumen di atas akan diterjemahkan kedalam bentuk simbol-simbol. Misal

a = pengetahuan logika diperlukan

b = pengetahuan aljabar diperlukan

c = semua orang akan belajar matematika

d = pengetahuan geometri diperlukan

Maka:

1.	$(a \vee b) \Longrightarrow c$	Premis
2.	$a \wedge d$	Premis
3.	a	2, Penyederhanaan
4.	$a \vee b$	3, Penambahan
5.	$\therefore d$	1, 4 Modus ponen

2. Pembuktian Tidak Langsung

a. Pembuktian dengan Kontraposisi

Pembuktian dengan kontraposisi ini, dilandasi bahwa suatu pernyataan konditional ekuivalensi logis dengan kontraposisinya. Kita telah membuktikan pada topik sebelumnya bahwa $\sim q \Rightarrow \sim p \equiv p \Rightarrow q$, sehingga argumen dengan kontraposisi juga merupakan argumen yang valid.

Premis 1: $\sim q \Rightarrow \sim p$

Konklusi: $p \Rightarrow q$

Contoh 6. 14

Buktikan teorema "Jika $a + b > 10$ maka $a > 5$ *atau* $b > 5$"

Bukti :

Teorema di atas berbentuk p ⇒ q dengan

$p \equiv a + b > 10$ dan

$q \equiv a > 5$ *atau* $b > 5$

Sedangkan $\sim p \equiv a + b \leq 10$ dan $\sim q \equiv a \leq 5$ dan $b \leq 5$

Sehingga jika $a \leq 5$ dan $b \leq 5$ maka $a + b \leq 5 + 5 = 10$

Jadi jika $\sim q$ benar maka terbukti $\sim p$ juga benar

Contoh 6. 15

Misalkan n bilangan bulat. Buktikanlah bahwa jika 3n + 2 bilangan ganjil maka n bilangan ganjil.

Bukti:

Kita diberikan premis bahwa "n bilangan bulat". Konklusi berbentuk $P \Rightarrow Q$ dimana P adalah pernyataan "$3n + 2$ bilangan ganjil" dan Q adalah pernyataan "n bilangan ganjil"

Dengan pembuktian ini, kontraposisi dari tujuan kia berbentuk $\sim Q \Rightarrow \sim P$ dimana $\sim Q$ adalah pernyataan "n bilangan genap" dan $\sim P$ adalah pernyataan $3n + 2$ bilangan genap

Misalkan n bilangan bulat dan n bilangan genap

n bilangan genap maka n dapat dituliskan menjadi

$$n = 2p;\ p \epsilon Z$$
$$3n + 2 = 3(2p) + 2$$
$$= 6p + 2 = 2(3p + 1)$$

Maka $3n + 2$ bilangan genap

Jadi jika $3n + 2$ bilangan ganjil maka n bilangan ganjil

b. Pembuktian dengan Kontradiksi

Model pembuktian ini agak lain dari model pembuktian yang ada, tetapi sering digunakan dalam membuktikan teorema dalam matematika analisis. Terdapat dua bentuk bukti dengan kontradiksi. Pertama untuk membuktikan bahwa pernyataan p benar, ditunjukkan bahwa $\sim p$ suatu pernyataan yang salah atau kontradiksi. Kedua, untuk membuktikan teorema $p \Rightarrow q$, dengan mengasumsikan bahwa p dan $\sim q$ bernilai benar dan mendeduksikan pernyataan c yang bernilai salah. Karena $p \wedge \sim q \Rightarrow c$ bernilai benar dan c bernilai salah maka dapat disimpulkan bahwa $p \wedge \sim q$ dalam kalimat konditional ini bernilai salah. Sehingga $\sim(p \wedge \sim q) \equiv p \Rightarrow q$ bernilai benar.

Secara simbolik argumen di atas dapat ditulis sebagai berikut.

- *Bentuk pertama*

  Premis 1: $\sim p \Rightarrow c$

  Konklusi: p

  Tabel kebenarannya

p	$\backsim p$	c	$\sim p \Rightarrow c$	$(\sim p \Rightarrow c) \Leftrightarrow p$
B	S	S	B	B
S	B	S	S	B

Contoh 6. 16

Misalkan akan dibuktikan bahwa "Baso lahir di Makassar" benar, maka cukup ditunjukkan bahwa "Baso tidak lahir di Makassar" adalah salah.

- *Bentuk Kedua*

  Premis 1: $p \wedge \sim q \Rightarrow c$

  Konklusi: $p \Rightarrow q$

Tabel kebenarannya

p	q	$\backsim q$	$p \wedge \sim q$	c	$(p \wedge \sim q) \Rightarrow c$	$p \Rightarrow q$	$[(p \wedge \sim q) \Rightarrow c] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
B	B	S	S	S	B	B	B
B	S	B	B	S	S	S	B
S	B	S	S	S	B	B	B
S	S	B	S	S	B	B	B

Dari tabel di atas terlihat bahwa $(p \wedge \sim q) \Rightarrow c$ ekuivalen dengan $p \Rightarrow q$ karena memiliki nilai kebenaran yang sama, akibatnya $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow c] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ merupakan tautologi.

Contoh 6. 17

Misalkan n bilangan bulat positif. Buktikanlah bahwa jika $3n + 2$ bilangan ganjil maka n bilangan ganjil

Bukti:

Kita diberikan premis bahwa "n bilangan bulat positif". Konklusi berbentuk P ⇒ Q dimana P adalah pernyataan "$3n + 2$ bilangan ganjil" dan Q adalah pernyataan "n bilangan ganjil".

Dengan pembuktian ini, kita asumsikan anteseden "$3n + 2$ bilangan ganjil" dan negasi dari konsekuen yaitu "n bilangan genap" benar. Tujuan kita adalah menemukan kontradiksi.

Misalkan n bilangan bulat positif

Misalkan $3n + 2$ bilangan ganjil

Asumsikan n bilangan genap maka $n = 2a,\ a \in Z^+$

$$\begin{aligned} 3n + 2 &= 3(2a) + 2 \\ &= 2(3a) + 2 \\ &= 2(3a + 1) \\ 3n + 2 &= 2b,,\ b \in Z^+ \end{aligned}$$

Ternyata $3n + 2$ adalah bilangan genap. Berarti terdapat kontradiksi antara asumsi semula dan hasil pembuktian.

Jadi jika $3n + 2$ bilangan ganjil maka n bilangan ganjil

3. BAGIAN EVALUASI (PENGALAMAN BELAJAR)

Forum Diskusi: Argumen dan Kevalidannya

Mahasiswa yang berbahagia, setelah mempelajari materi silahkan Anda lanjutkan dengan berdiskusi bersama teman-teman mahasiswa lainnya untuk memecahkan masalah berikut.

1. Diantara argumen-argumen berikut, makah yangmerupakan argumen valid? Tentukan juga tipe argumen yang digunakan!
   a. Jika udara dingin, saya akan tinggal di rumah
      Jika udara dingin, saya akan minum kopi panas
      ___
      Jika saya tinggal di rumh, maka saya akan minum kopi panas
   b. Saya menyanyi
      jika saya menyanyi, suara saya serak
      ___
      Suara saya serak
   c. Jika kamu membca buku, kamu akan tahu banyak hal
      Kamu tidak tahu banyak hal
      ___
      Kamu tidak banyak membaca buku

2. Tunjukkanlah bahwa argumen berikut valid!

   a. $(h \wedge a) \Rightarrow b$

      $b \Rightarrow \backsim p$

      $a \wedge p$

      $\therefore \backsim h$

   b. $(a \vee b) \Rightarrow (c \wedge d)$

      $d \vee e \Rightarrow f$

      $\therefore a \Rightarrow f$

3. Buktikan pernyataan berikut dengan menggunakan kontradiksi

   "Jika k bilangan bulat ganjil, maka $k + 1$ adalah genap"

BAGIAN II: MATERI AJAR 7

TOPIK VII:

KONSEP DASAR HIMPUNAN

1. PENGANTAR TOPIK MATERI AJAR

Sapaan

Assalaamu alaikum wa rohmatullaahi wa barokaatuh

Apa kabar mahasiswa hebat? Semoga tetap semangat dalam menuntut ilmu sebagai bagian dari ibadah kepada Allah Rabbul Alamiin. Mari kita awali kegiatan belajar ini dengan membaca doa

رَضِيْتُ بِاللهِ رَبًّا وَبِالْاِسْلاَمِ دِيْنًا وَبِمُحَمَّدٍ نَبِيًّا وَرَسُوْل رَبِّىْ زِدْنِيْ عِلْمًا نَافِعًا وَرْزُقْنِيْ فَهْمًا

Rodhiitu billaahi robbaa, wa bil islaami diinaaa, wa bi muhammadin nabiyyaw wa rosuulaa. Robbii zidnii 'ilman naafi'aan warzuqnii fahmaa

Artinya: Aku ridho Allah sebagai tuhanku, Islam sebagai agamaku, dan Nabi Muhammad sebagai nabi dan rasul. Ya Allah, tambahkanlah kepadaku ilmu yang bermanfaat dan berilah aku karunia untuk dapat memahaminya.

Deskripsi Materi Ajar

Satu dari sekian banyak hal yang sangat penting dalam matematika adalah teori himpunan, karena kenyataan menunjukkan bahwa matematika dapat dipelajari dari gambar himpunan dengan melengkapi struktur-strukturnya yang dikenal dengan sistem matematika. Pada bab ini akan dibahas tentang konsep dasar himpunan, operasi pada himpunan, relasi dan juga fungsi. Teori himpunan secara formal mulai dikembangkan oleh matematikawan Georg Cantor (1845 – 1918) pada akhir abad ke-19, dan saat ini telah menjadi salah satu unsur pokok dalam landasan matematika. Materi himpunan yang telah dipelajari kemudian diperluas dan diperdalam agar dapat menunjang bab-bab selanjutnya. Pada bab ini materi yang akan dikaji adalah definisi himpunan dan definisi-definisi sederhana lainnya serta cara menyatakan suatu himpunan.

Sub Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

1. Menjelaskan defenisi himpunan, notasi pembentuk himpunan, himpunan kosong, himpunan semesta dan himpunan finit dan infinit
2. Memahami himpunan dan bukan himpunan

Indikator Capaian Pembelajaran

1. Memahami pengertian himpunan dan cara menyatakan himpunan
2. Memahami definisi himpunan kosong, himpunan semesta, dan himpunan finit serta himpunan infinit

Skenario Pembelajaran

Topik VII ini akan kita bahas selama 1 kali pertemuan tatap muka (offline) ataupun secara daring (online). Setelah mempelajari materi ini, ada beberapa tagihan pembelajaran sebagai bentuk pengelaman belajar bagi Anda. Tagihan pembelajaran berupa forum diskusi, tugas, ataupun bentuk evaluasi lainnya. Oleh karena itu diharapkan kepada Anda untuk mempersiapkan diri dalam mempelajari materi ini. Anda dapat melakukan aktivitas pembelajaran secara mandiri dengan cara mengakses materi ajar maupun berkolaborasi dengan teman yang lain.

2. MATERI AJAR

A. Pendahuluan

Himpunan merupakan objek dasar dari semua objek yang dipelajari dalam matematika selain fungsi. Pada saat sesorang belajar matematika, mulai tingkat dasar sampai tingkat lanjut, selalu berhadapan dengan himpunan. Teori himpunan secara formal mulai dikembangkan oleh matematikawan Jerman Georg Cantor (1845 – 1918) pada akhir abad ke-19. Pada awalnya konsep himpunan tidak diterima selama bertahun-tahun, namun tahun 1920 para matematikawan pada saat itu baru mempertimbangkan pendapatnya.

Konsep himpunan kita kenal dan pergunakan dalam kehidupan sehari-hari. Kata himpunan biasanya dipadankan dengan kumpulan, gerombolan, kelompok, atau grup. Misalnya kumpulan mahasiswa jurusan matematika, kumpulan bilangan ganjil, kumpulan buah, dan lain sebagainya. Namun, tidak semua kumpulan termasuk himpunan. Contohnya kumpulan siswa yang pandai, kumpulan siswa yang berbadan tinggi. Mengapa demikian? Untuk memperoleh jawabannya, lakukan kegiatan berikut.

Mengamati dan Bertanya: Pengetahuan Awal

Coba amati beberapa kumpulan berikut yang merupakan kumpulan himpunan dan bukan himpunan.

Kumpulan yang termasuk himpunan

1. Kumpulan siswa laki-laki
2. Kumpulan hewan yang diawali huruf A
3. Kumpulan buah yang diawali huruf M

Kumpulan yang termasuk bukan himpunan

1. Kumpulan mahasiswa yang pandai di kelasmu
2. Kumpulan orang cantik di kelasmu
3. Kumpulan mata kuliah yang disenangi mahasiswa

Setelah mengamati kumpulan tersebut jawablah pertanya berikut.

1. Mengapa kumpulan siswa laki-laki termasuk himpunan?
2. Mengapa kumpulan mahasiswa yang pandai bukan termasuk himpunan?
3. Apa perbedaan kumpulan yang termasuk himpunan dan kumpulan yang bukan himpunan?
4. Dapatkah kalian menyebutkan contoh kumpulan lain di sekitar kalian yang merupakan himpunan dan bukan himpunan?

B. Himpunan

a. Definisi Himpunan

Kata himpunan dalam matematika merupakan istilah yang tidak didefinisikan atau merupakan pengertian pangkal. Untuk memahaminya himpunan sering diartikan sebagai **kumpulan objek-objek (abstrak atau konkret) yang didefinisikan dengan jelas (*well defined*)**, jadi keanggotaannya harus jelas. Didefinisikan dengan jelas, berarti himpunan dapat mengklasifikasikan objek kedalam anggota atau bukan anggota himpunan itu.

Sebagai contoh himpunan mahasiswa dengan IPK minimal 3,00. Himpunan ini mempunyai batasan yang jelas. Anggota dari himpunan ini adalah semua mahasiswa yang mempunyai IPK 3,00 atau lebih besar dari 3,00. Najib yang mempunyai IPK 3,01 adalah anggota himpunan tersebut, tetapi Yusrah yang mempunyai IPK 2,79 bukan anggota himpunan tersebut.

Kumpulan mahasiswa yang cerdas mempunyai batasan yang relatif. Jika ditinjau dari aspek akademik Zahrah yang mempunyai IPK 2,45 mungkin tidak termasuk dalam kumpulan mahasiswa cerdas. Tetapi jika ditinjau berdasarkan tes TOEFL, Zahrah yang mendapat nilai 560 dapat digolongkan sebagai mahasiswa cerdas.

Berdasarkan pengertian himpunan klasik, kumpulan mahasiswa cerdas tidak dapat dinyatakan sebagai suatu himpunan. Tetapi menurut teori himpunan kabur (*fuzzy set*), kumpulan mahasiswa cerdas merupakan suatu himpunan. Setiap anggota dalam suatu himpunan kabur mempunyai derajat keanggotaan yang berada pada interval [0,1]. Himpunan kabur tidak dibahas lebih lanjut dalam buku ini, uraian selanjutnya didasarkan pada himpunan klasik.

Suatu himpunan biasa dinotasikan dengan menggunakan huruf kapital. Objek dalam suatu himpunan disebut *anggota* (atau *elemen* atau *unsur*). Untuk menyatakan suatu himpunan digunakan simbol "{….}". Anggota (elemen) himpunan biasanya dilambangkan dengan menggunakan huruf kecil a, b, c, d, dan seterusnya. Pada himpunan klasik, dua atau lebih anggota yang sama hanya didata satu kali. Misalkan A adalah himpunan huruf penyusun kata "unismuh", maka dapat dituliskan A = {u, n, i, s, m, h}.

Anggota (elemen) dari suatu himpunan dinyatakan dengan menggunakan lambang "$\in$ " dan untuk menyatakan bukan anggota himpunan digunakan lambang " $\notin$". Jika x anggota himpunan A maka ditulis dalam notasi $x \in A$ dan jika bukan anggota A ditulis $x \notin A$. Misalkan A adalah himpunan bilangan bulat. 5 adalah bilangan bulat, berarti 5 merupakan anggota dari A, pernyataan ini dinotasikan 5 $\in$ A. $\frac{1}{2}$ bukan bilangan bulat, berarti $\frac{1}{2}$ bukan anggota dari A, pernyataan ini dinotasikan $\frac{1}{2} \notin$ A. Jika T adalah himpunan huruf konsonan dalam abjad, maka $f \in T$ dan o $\notin$ T.

b. Cara Menyatakan Himpunan

Terdapat beberapa cara dalam menyajikan suatu himpunan. Dalam modul ini akan dikemukakan tig acara sebagai berikut.

1. Enumerasi

Suatu himpunan dapat disajikan menggunakan enumerasi atau mendaftarkan anggota himpunannya jika himpunan tersebut merupakan himpunan terbatas dan tidak terlalu besar. Penyajian himpunan menggunakan enumerasi berarti menuliskan atau mendaftarkan semua anggota-anggotanya secara jelas, dituliskan dalam kurung kurawal, dan setiap anggota dipisahkan oleh tanda koma. Misalkan P adalah himpunan bilangan prima yang kurang dari sepuluh, dituliskan P = {2, 3, 5, 7}.

Untuk menuliskan himpunan yang memiliki jumlah anggota yang besar dan telah memiliki pola tertentu, dapat dituliskan dengan menggunakan tanda "..." (ellipsis).

Contoh 7. 1

- Himpunan alfabet ditulis sebagai $\{a, b, c, \dots, y, z\}$. Himpunan 50
- Himpunan bilangan asli pertama dapat ditulis $\{1, 2, 3, \dots, 49, 50\}$.

2. Mendeskripsikan Syarat Keanggotaannya

Himpunan dapat pula dinyatakan dengan cara mendeskripsikan syarat keanggotaannya dalam bentuk kalimat atau menggunakan notasi pembentuk himpunan.

Contoh 7. 2

- P adalah himpunan bilangan prima kurang dari 10, maka dituliskan P = {bilangan prima kurang dari 10}.
- N adalah himpunan bilangan cacah yang kurang dari 7, maka dituliskan N = {bilangan cacah kurang dari 7}

3. Notasi Pembuat Himpunan

Cara penyajian dengan metode ini adalah himpunan dinyatakan dengan menuliskan syarat yang harus dipenuhi oleh anggotanya, namun anggota himpunan dinyatakan dalam suatu peubah.. peubah yang biasa digunakan adalah x dan y. Penulisan notasi pada metode tersebut biasanya seperti berikut.

$$\{x|\text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x\}$$

Aturan yang digunkan dalam menuliskan syarat keanggotan yaitu:

a. Bagian kiri tanda "|" melambangkan elemen himpunan

b. Tanda "|" dapat dibaca dimana, yangmana, atau sedemikian hingga.

c. Bagian tanda “|” menunjukan syarat keanggotaan himpunan.

d. Setiap tanda “,” atau “;” di dalam syarat keanggotaan dibaca dan.

Contoh 7. 3

- P adalah himpunan bilangan prima kurang dari 10 dapat dinyatakan dengan P = $\{x \mid x < 10, x$ bilangan prima$\}$.
- N adalah himpunan bilangan cacah yang kurang dari 7, maka dinyatakan N = $\{x \mid x < 7, x$ bilangan cacah$\}$.

c. Himpunan Semesta

Himpunan semesta atau semesta pembicaraan adalah himpunan yang memuat semua objek yang dibicarakan. Himpunan semesta biasa dinotasikan dengan S atau U (singkatan dari *universal set*). Notasi yang digunakan dalam uraian selanjutnya adalah S. Misalkan R = {Indonesia, Malaysia, Singapura}, dapat ditetapkan himpunan semesta untuk R, yaitu S = {nama negara di Asia}

d. Himpunan Kosong

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota, himpunan kosong dinotasikan dengan { } atau ∅.

Contoh 7. 4

- Misalkan T = $\{x \mid x2 - 3 = 0, x$ bilangan bulat$\}$, karena tidak ada bilangan bulat x yang mengakibatkan $x^2 - 3 = 0$ bernilai benar, maka T = ∅
- N = $\{x|x$ adalah bilangan asli kurang dari 1$\}$
- C = $\{x \mid x \neq x\}$ juga merupakan himpunan kosong.
- K = $\{x \mid x + 1 = 1\}$

Catatan

Perhatikan bahwa { 0 } tidak sama dengan { } atau { 0 } ≠ { }. { 0 } bukan himpunan kosong, sebab mempunyai anggota, yaitu 0. { } tidak mempunyai anggota, maka disebut himpunan kosong.

e. Diagram Venn

Diagram Venn adalah gambar yang merepresentasikan himpunan. Kata Venn diambil dari nama John Venn, seorang ahli logika berkebangsaan Inggris yang memperkenalkan diagram ini.

Pada diagram Venn, himpunan semesta digambarkan sebagai daerah yang dibatasi oleh suatu persegi Panjang, sedangkan himpunan lainnya disajikan dalam bentuk lingkaran di dalam bentuk segi empat tersebut. Pada salah satu sudut persegi panjang dituliskan S sebagai simbol dari himpunan semesta. Setiap anggota himpunan yang dituliskan dalam daerah yang dibatasi dan dilengkapi dengan noktah, tetapi kadang noktah ini ditiadakan. Atau dapat juga anggota himpunan tidak dituliskan, diganti dengan bilangan cardinal himpunan itu. Ada kemungkinan dua himpunan atau lebih memiliki anggota yang sama, sehingga gambar pada diagram venn saling beririsan. Anggota himpunan semesta (S) yang tidak termasuk anggota himpunan manapun digambarkan di luar lingkaran.

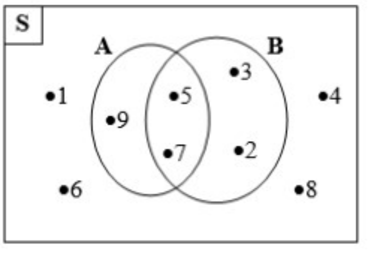
Contoh 7. 5

S = {bilangan asli kurang dari sepuluh}

A = {x | 3 < x < 10, x bilangan ganjil}= {5,7,9}

B = {2, 3, 5, 7}

Diagram Venn untuk merepresentasikan himpunan-himpunan tersebut adalah sebagai berikut.



f. Himpunan Berhingga (Finit) dan Himpunan Tak Berhingga (Infinit)

Himpunan dikatakan berhingga jika ia mempunyai anggota-anggota yang banyaknya berhingga. Sedangkan himpunan dikatakan tak berhingga jika himpunan tersebut mempunyai anggota-anggota yang banyaknya tak berhingga.

Contoh 7. 6

- Q = $\{x \mid x < 7, x$ bilangan cacah$\}$
  Berarti anggotanya {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, jadi Q disebut himpunan berhingga
- R = $\{x \mid x =$ bilangan cacah$\}$
  Berarti anggotanya {0, 1, 2, 3, ...}, jadi R disebut himpunan tak berhingga

g. Kardinalitas

Bilangan kardinal adalah bilangan yang menyatakan banyak anggota suatu himpunan. Kardinalitas himpunan dinotasikan dengan: $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A})$ atau $|\boldsymbol{A}|$; dengan A merupakan sebuah himpunan.

Contoh 7. 7

- P = {bilangan prima kurang dari sepuluh}, {2,3,5,7} maka bilangan kardinal dari P adalah 4, dinotasikan n(P) = 4.
- C = $\{x \mid x \neq x\}$ merupakan himpunan kosong maka n(C) = 0
- K = {x | x + 1 = 1} = {0} maka n(K) = 1

3. BAGIAN EVALUASI (PENGALAMAN BELAJAR)

Forum Diskusi: Konsep Dasar Himpunan

Mahasiswa yang berbahagia, setelah mempelajari materi silahkan Anda lanjutkan dengan berdiskusi bersama teman-teman mahasiswa lainnya untuk memecahkan masalah berikut.

1. Dari pernyataan berikut, tentukan yang termasuk himpunan dan bukan himpunan, serta jelaskan alasannya!
   a. Kumpulan segitiga pada bidang datar
   b. Kumpulan binatang berkaki dua
   c. Kumpulan orang tinggi
   d. Kumpulan Gedung tinggi di kota Makassar
2. Nyatakan himpunan berikut dengan kata-kata, kemudian daftarkan anggotanya
   a. A = {x | x adalah huruf-huruf dalam kata "matematika"}
   b. B = {x | x < 20, x bilangan cacah kelipatan 2}

3. Kelompokkan himpunan berikut mana yang merupakan himpunan finite atau himpunan infinite, serta jelaskan alasannya! Tentukan kardinalitasnya jika himpunan tersebut merupakan himpunan finite!
   a. P = {bilangan asli yang kurang dari 10}
   b. Q = {bilangan cacah kelipatan 5}
   c. R = {x | x huruf abjad latin}
   d. S = {x | x akar-akar dari persamaan $x^2 - 2x = -1$}
   e. T = {x | x bilangan ganjil}

BAGIAN II: MATERI AJAR 8

TOPIK VIII:
RELASI HIMPUNAN

1. PENGANTAR TOPIK MATERI AJAR

Sapaan

Assalaamu alaikum wa rohmatullaahi wa barokaatuh

Apa kabar mahasiswa hebat? Semoga tetap semangat dalam menuntut ilmu sebagai bagian dari ibadah kepada Allah Rabbul Alamiin. Mari kita awali kegiatan belajar ini dengan membaca doa

رَضِيْتُ بِاللهِ رَبًّا وَبِالْاِسْلاَمِ دِيْنًا وَبِمُحَمَّدٍ نَبِيًّا وَرَسُوْل رَبِّىْ زِدْنِيْ عِلْمًا نَافِعًا وَرْزُقْنِيْ فَهْمًا

Rodhiitu billaahi robbaa, wa bil islaami diinaaa, wa bi muhammadin nabiyyaw wa rosuulaa. Robbii zidnii ’ilman naafi’aan warzuqnii fahmaa

Artinya: Aku ridho Allah sebagai tuhanku, Islam sebagai agamaku, dan Nabi Muhammad sebagai nabi dan rasul. Ya Allah, tambahkanlah kepadaku ilmu yang bermanfaat dan berilah aku karunia untuk dapat memahaminya.

Deskripsi Materi Ajar

Satu dari sekian banyak hal yang sangat penting dalam matematika adalah teori himpunan, karena kenyataan menunjukkan bahwa matematika dapat dipelajari dari gambar himpunan dengan melengkapi struktur-strukturnya yang dikenal dengan system matematika. Pada bab ini akan dikaji tentang relasi-relasi himpunan yang terdiri dari himpunan sama, himpunan ekuivalen, himpunan saling lepas, himpunan bagian, himpunan kuasa.

Sub Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

1. Menjelaskan relasi antara himpunan dan contohnya
2. Memahami perbedaan gambar diagram venn euler

Indikator Capaian Pembelajaran

1. Memahami defenisi himpunan bagian (subset), himpunan yang sama, dua himpunan finit yang ekuivalen, himpunan yang saling lepas, himpunan bagian, dan himpunan kuasa
2. Mampu memberikan contoh masing-masing dari relasi antara himpunan serta diagram venn

Skenario Pembelajaran

Topik VIII ini akan kita bahas selama 1 kali pertemuan tatap muka (offline) ataupun secara daring (online). Setelah mempelajari materi ini, ada beberapa tagihan pembelajaran sebagai bentuk pengelaman belajar bagi Anda. Tagihan pembelajaran berupa forum diskusi, tugas, ataupun bentuk evaluasi lainnya. Oleh karena itu diharapkan kepada Anda untuk mempersiapkan diri dalam mempelajari materi ini. Anda dapat melakukan aktivitas pembelajaran secara mandiri dengan cara mengakses materi ajar maupun berkolaborasi dengan teman yang lain.

2. MATERI AJAR

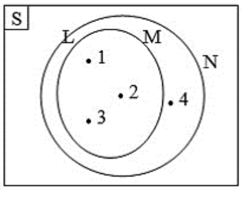
A. Himpunan Sama

Himpunan A dinyatakan sama dengan himpunan B jika dan hanya jika keduanya memiliki elemen yang sama. Dengan kata lain A sama dengan B jika setiap anggota A adalah anggota B dan setiap anggota B adalah anggota A. Kesamaan dua himpunan ini dinotasikan $A = B$.

Jika terdapat paling sedikit satu anggota A yang bukan anggota B atau sebaliknya, maka A dan B tidak sama, dinotasikan $A \neq B$.

Contoh 8. 1

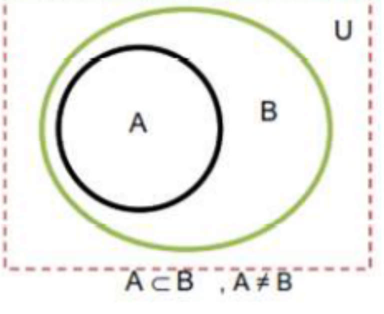
Misalkan L = {1, 2, 3}, M = {x | 4 – x > 0, x bilangan asli}, dan N = {bilangan asli kurang dari lima}, maka L = M tetapi L ≠ N.

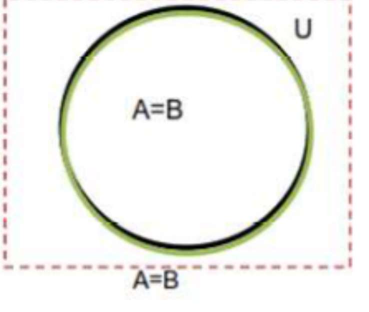


Terdapat tiga hal yang perlu diperhatikan dalam menentukan dua kesamaan himpunan:

1. Urutan anggota dalam himpunan tidak perlu diperhatikan. Jadi $\{a, b, c\} = \{c, b, a\} = \{a, c, b\} = \{c, a, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\}$
2. Pengulangan anggota tidak mempengaruhi kesamaan dua himpunan. Jadi $\{a, b, c\} = \{a, b, b, c, c\}$
3. Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma:
   a. $A = A$, $B = B$, dan $C = C$
   b. Jika $A = B$, maka $B = A$
   c. Jika $A = B$, $B = C$, maka $A = C$

Kesamaan dua himpunan digambarkan dalam diagram venn dan sekaligus jika dibandingkan dengan himpunan bagian dapat terlihat sebagai berikut.





Gambar 8.1 (a) $A \neq B$ dan (b) $A = B$

B. Himpunan Ekuivalen

Dua himpunan dikatakan ekuivalen jika jumlah anggota dari kedua himpunan tersebut sama. Dengan kata lain, himpunan A dikatakan ekuivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama. Himpunan A ekuivalen dengan himpunan B dinotasikan $A{\sim}B$. Sehingga berdasarkan definisi tersebut dapat dinotasikan $A{\sim}B \leftrightarrow |A| = |B|$

Contoh 8. 2

- Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A{\sim}B$ sebab |A| = |B| = 4
- Jika $M = \{a, b, c, d, e\}$ dan $N = \{2, 5, 6, 8, 10\}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B|$

Jika dua himpunan sama, maka kedua himpunan tersebut pasti ekuivalen. Tetapi dua himpunan yang ekuivalen belum tentu sama

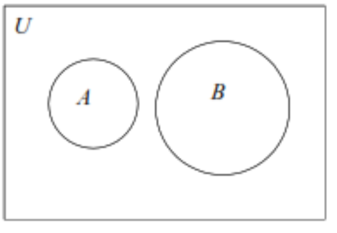
C. Himpunan Lepas

Dua himpunan, A dan B, dinyatakan saling lepas jika tidak ada anggota A yang juga merupakan anggota B dan tidak ada anggota B yang juga merupakan anggota A. Dengan kata lain A dan B saling lepas jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama. A dan B saling lepas dinotasikan A // B.

Contoh 8. 3

- Jika $A = \{x|x \leq 10, x \in P\}$ dan $B = \{x|x > 10, x \in P\}$, maka $A//B$
- Jika $M = \{x|x < 8, x \in P$ dan $N = \{10, 20, 30, \ldots\}$, maka $M//N$

Himpunan saling lepas jika digambarkan dengan diagram venn sebagai berikut.



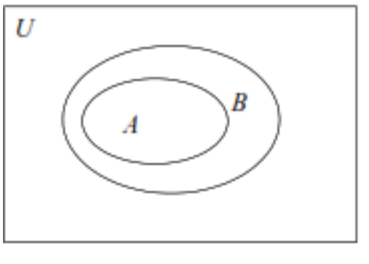
Gambar 8.2 Diagram Venn $A//B$

D. Himpunan Bagian

Misalkan A dan B dua himpunan berbeda. A disebut himpunan bagian (subset) dari B jika dan hanya jika setiap anggota dari A merupakan anggota dari B. Himpunan bagian dinotasikan dengan ⊆. Definisi dari himpunan bagian dalam bahasa matematika dapat dinotasikan dengan

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall\, x \in A \Rightarrow x \in B$$

Untuk memahami secara mudah tentang himpunan bagian dapat dipahami melalui diagram venn. $A \subseteq B$ dalam diagram venn digambarkan sebagai berikut.



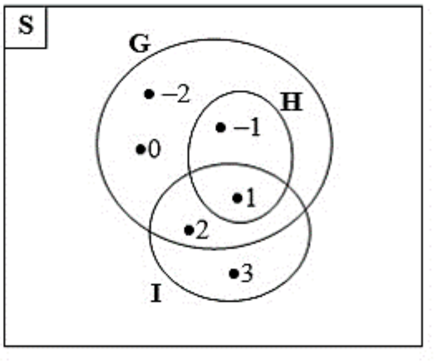
Gambar 8.3 Diagram Venn $A \subseteq B$

Penulisan $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$. Jika kita ingin menekankan bahwa A adalah himpunan dari B dan $A \neq B$ maka kita dapat menulisnya dengan $A \subset B$, dan dapat kita katakan bahwa katakan bahwa A merupakan himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B

Sebaliknya pernyataan $A \subseteq B$ digunakan untuk menyatakan bahwa A merupakan himpunan bagian (subset) dari B yang memungkinkan $A = B$. Sebagai contoh $\{a\}$ dan $\{b, c\}$ merupakan proper subset dari $\{a, b, c\}$, dapat dinotasikan $\{a\} \subset \{a, b, c\}$ dan $\{b, c\} \subset \{a, b, c\}$ karena sudah jelas bahwa $\{a\} \neq \{a, b, c\}$ dan $\{b, c\} \neq \{a, b, c\}$. Akan tetapi jika keanggotaan dari sebuah himpunan belum jelas, maka kita dapat menulikannya dengan tanda subset ($\subseteq$). Jika terdapat paling sedikit satu anggota A yang bukan anggota B, maka A bukan himpunan bagian B, dinotasikan A $\not\subset$ B.

Contoh 8. 4

Misalkan G = $\{x \mid -3 < x < 3, x$ bilangan bulat$\}$, H = $\{x \mid x^2 = 1\}$ dan I = {1, 2, 3}. Diagram Venn yang merepresentasikan ketiga himpunan tersebut adalah sebagai berikut.



Setiap anggota H adalah anggota G, tetapi ada anggota G yang bukan anggota H, berarti H $\subset$ G tetapi G $\not\subset$ H. Karena ada anggota I yang bukan anggota G, maka I $\not\subset$ G.

Untuk mengetahui banyak himpunan bagian dari suatu himpunan, perhatikan tabel berikut.

Himpunan	Himpunan bagian	Banyak himpunan bagian ditinjau dari banyak anggota himpunan bagian tersebut	Banyak himpunan bagian
$\varnothing$	$\varnothing$	1 himp. bag. y byk anggotanya 0	$1 = 2^0$
{a}	$\varnothing$, {a}	1 himp. bag. y byk anggotanya 0 1 himp. bag. y byk anggotanya 1	$2 = 2^1$
{a, b}	$\varnothing$, {a}, {b}, {a,b}	1 himp. bag. y byk anggotanya 0 2 himp. bag. y byk anggotanya 1 1 himp. bag. y byk anggotanya 2	$4 = 2^2$
{a, b, c}	$\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a, b, c}	1 himp. bag. y byk anggotanya 0 3 himp. bag. y byk anggotanya 1 3 himp. bag. y byk anggotanya 2 1 himp. bag. y byk anggotanya 3	$8 = 2^3$
{a, b, c, d}	$\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {d}, {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, {a, b, c, d}	1 himp. bag. y byk anggotanya 0 4 himp. bag. y byk anggotanya 1 6 himp. bag. y byk anggotanya 2 4 himp. bag. y byk anggotanya 3 1 himp. bag. y byk anggotanya 4	$16 = 2^4$

Banyak himpunan bagian dari suatu himpunan yang mempunyai n anggota adalah 2^n.

Jika diperhatikan banyak himpunan bagian dari suatu himpunan ditinjau dari banyak anggota himpunan bagian tersebut bersesuaian dengan segitiga Pascal

1 $\Rightarrow$ banyak himpunan bagian dari himpunan kosong

1 1 $\Rightarrow$ banyak himpunan bagian dari himpunan dengan 1 anggota

1 2 1 $\Rightarrow$ banyak himpunan bagian dari himpunan dengan 2 anggota

1 3 3 1 $\Rightarrow$ banyak himpunan bagian dari himpunan dengan 3 anggota

1 4 6 4 1 $\Rightarrow$ banyak himpunan bagian dari himpunan dengan 4 anggota

dan seterusnya

Secara umum, banyak himpunan bagian yang mempunyai k anggota dari suatu himpunan dengan n anggota adalah $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Sebagai contoh Z = {a, b, c}, banyaknya himpunan bagian dari Z yang mempunyai dua anggota adalah $C_2^3 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$, yaitu {a,b}, {a,c}, dan {b,c}.

Sifat-Sifat Himpunan Bagian

Misalkan A, B, dan C himpunan, maka berlaku sifat

1. **Refleksif.** $A \subseteq A$

   Setiap anggota dari A adalah anggota dari A sehingga $A \subseteq A$. A merupakan himpunan bagian tidak sejati (*improper subset*) dari A.
2. **Transitif**. Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

   $A \subseteq B$ berarti setiap anggota A adalah anggota B. $B \subseteq C$ berarti setiap anggota B adalah anggota C. Karena setiap anggota A merupakan anggota B dan setiap anggota B merupakan anggota C, berarti setiap anggota A merupakan anggota C. Dengan demikian $A \subseteq C$.
3. **Anti simetris.** Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$, maka A = B

   $A \subseteq B$ berarti setiap anggota A adalah anggota B dan $B \subseteq A$ berarti setiap anggota B adalah anggota A, dengan demikian A dan B adalah himpunan yang sama.
4. Himpunan kosong selalu menjadi himpunan bagian dari setiap himpunan. Himpunan kosong juga merupakan himpunan bagian tidak sejati (*improper subset*)

   Untuk membuktikan sifat ini dapat dilakukan melalui kaidah dari definisi himpunan bagian:

   $\emptyset \subseteq B$ ↔ $\forall\, x \in \emptyset \Rightarrow x \in B$, melalui "implikasi" kita akan menunjukan bahwa $\emptyset \subseteq B$ bernilai "benar". Syarat tersebut dapat dipenuhi jika $x \in \emptyset \Rightarrow x \in B$ juga bernilai "benar". Untuk $x \in B$ jelas ini akan bernilai "benar". akan tetapi $x \in \emptyset$ ini bernilai "salah" karena himpunan kosong tidak memiliki anggota, sehingga $x \notin \emptyset$ atau bernilai "salah". sehingga berdasarkan pendekatan implikasi dapat ditunjukan tabel kebenaran sebagai berikut:

$\emptyset \subseteq B$	$x \in \emptyset$	$x \in B$	$\forall\, x \in \emptyset \Rightarrow x \in B$
Benar	Salah	Benar	Benar

Sebagai akibat dari sifat 4, diperoleh teorema bahwa **terdapat satu dan hanya satu himpunan kosong**

Bukti:

Misalkan $\emptyset_1$ dan $\emptyset_2$ adalah himpunan kosong. Berdasarkan sifat 4, $\emptyset_1$ merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan, demikian pula $\emptyset_2$, berarti $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$ dan $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$. Dengan demikian $\emptyset_1$ dan $\emptyset_2$ adalah dua himpunan yang sama. Jadi hanya ada satu himpunan kosong, meskipun diperoleh dari syarat keanggotaan yang berbeda.

E. Himpunan Kuasa

Himpunan kuasa (power set) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri. Himpunan kuasa dinotasikan "P" sebagai simbol atau singkatan dari huruf awal kata "*power*". Sehingga dapat dinotasikan $P(A) = \{B: B \subseteq A\}$

Jika banyak anggota A adalah n, maka banyak anggota P(A) sama dengan banyak himpunan bagian dari A, yaitu adalah 2^n. $n(P(A)) = 2^{n(A)}$. Jika $|A| = m$, maka $P(A)| = 2^m$

Contoh 8. 5

- Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\emptyset\}$ adalah $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
- Jika $G = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, maka $P(G) = \{\varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$. Jadi, $n(P(G)) = 2^3 = 8$
- Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \}\}$

3. BAGIAN EVALUASI (PENGALAMAN BELAJAR)

Forum Diskusi: Relasi Himpunan

Mahasiswa yang berbahagia, setelah mempelajari materi silahkan Anda lanjutkan dengan berdiskusi bersama teman-teman mahasiswa lainnya untuk memecahkan masalah berikut.

1. Jika A = {2, 5, 7, 11}, berapakah banyak himpunan bagian dari A? Tuliskan semua himpunan bagian tersebut!
2. Diketahui P = {jajargejang}, Q = {belah ketupat}, R = {bujur sangkar}, dan T = {persegi Panjang} pada bidang datar
   a. Tentukan himpunan-himpunan mana yang menjadi subset-subset dari himpunan yang lain
   b. Tentukan diagram venn untuk himpunan P, Q, R, dan T!
   c. Apakah setiap himpunan mempunyai subset? Jelaskan!

BAGIAN II: MATERI AJAR 9

TOPIK IX:

OPERASI HIMPUNAN

1. PENGANTAR TOPIK MATERI AJAR

Sapaan

Assalaamu alaikum wa rohmatullaahi wa barokaatuh

Apa kabar mahasiswa hebat? Semoga tetap semangat dalam menuntut ilmu sebagai bagian dari ibadah kepada Allah Rabbul Alamiin. Mari kita awali kegiatan belajar ini dengan membaca doa

رَضِيْتُ بِاللهِ رَبًّا وَبِالْاِسْلاَمِ دِيْنًا وَبِمُحَمَّدٍ نَبِيًّا وَرَسُوْل رَبِّىْ زِدْنِيْ عِلْمًا نافِعًا وَرْزُقْنِيْ فَهْمًا

Rodhiitu billaahi robbaa, wa bil islaami diinaaa, wa bi muhammadin nabiyyaw wa rosuulaa. Robbii zidnii 'ilman naafi'aan warzuqnii fahmaa

Artinya: Aku ridho Allah sebagai tuhanku, Islam sebagai agamaku, dan Nabi Muhammad sebagai nabi dan rasul. Ya Allah, tambahkanlah kepadaku ilmu yang bermanfaat dan berilah aku karunia untuk dapat memahaminya.

Deskripsi Materi Ajar

Seperti pada himpunan bilangan telah dikenal operasi penjumlahan, perkalian, pengurangan dan pembagian. Pada himpunan juga dikenal beberapa operasi, yaitu suatu aturan untuk mendapatkan sebuah himpunan tunggal dari beberapa himpunan yang diketahui.. Konsep ini kemudian dikenal sebagai operasi himpunan. Operasi himpunan sendiri tidak terlepas dari himpunan semesta, yakni himpunan yang berisi semua elemen himpunan atau superset dari setiap himpunan. Pada topik ini akan dikaji mengenai operasi himpunan yaitu gabungan, irisan, selisih dan komplemen.

Sub Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

1. Menjelaskan operasi himpunan (komplemen, gabungan, irisan, selisih, beda setangkup) dan contohnya
2. Menjelaskan sifat-sifat operasi himpunan

Indikator Capaian Pembelajaran

1. Memahami definisi himpunan gabungan, irisan, komplemen, selisih dua himpunan, serta beda setangkup dua himpunan
2. Memahami sifat-sifat operasi himpunan

Skenario Pembelajaran

Topik IX ini akan kita bahas selama 2 kali pertemuan tatap muka (offline) ataupun secara daring (online). Setelah mempelajari materi ini, ada beberapa tagihan pembelajaran sebagai bentuk pengelaman belajar bagi Anda. Tagihan pembelajaran berupa forum diskusi, tugas, ataupun bentuk evaluasi lainnya. Oleh karena itu diharapkan kepada Anda untuk mempersiapkan diri dalam mempelajari materi ini. Anda dapat melakukan aktivitas pembelajaran secara mandiri dengan cara mengakses materi ajar maupun berkolaborasi dengan teman yang lain.

2. MATERI AJAR

A. Pendahuluan

Salam sehat mahasiswa semuanya, sebelumnya kita telah membahas mengenai pengertian himpunan sebagai kumpulan-kumpulan objek atau benda yang dapat didefinisikan dengan jelas. Dalam perjalanannya, dua himpunan atau lebih dpat dioperasikan sehingga menghasilkan himpunan baru. Konsep ini kemudian dikenal sebagai operasi himpunan. Secara garis besar, ada operasi himpunan yang perlu diketahui, termasuk gabungan, irisan, selisih, dan komplemen. Pada materi ini akan dikaji satu per satu operasi himpunan beserta sifat-sifatnya. Nah, sebelum membahas lebih jauh tentang operasi himpunan, coba jawab pertanyaan berikut.

Pertanyaan Awal

Dalam suatu kelas yang terdiri atas 40 siswa, diketahui 24 siswa gemar membaca buku, 23 siswa menonton drama, dan 11 siswa gemar kedua-duanya. Gambarlah diagram Venn dari keterangan tersebut, kemudian tentukan banyaknya siswa:

a. yang hanya gemar membaca buku;

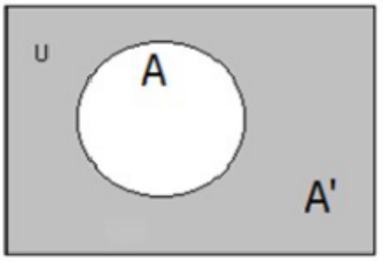
b. yang hanya gemar menonton drama;

c. yang tidak gemar kedua-duanya.

B. Komplemen

Jika A suatu himpunan, maka Komplemen dari suatu himpunan A terhadap himpunan semesta U adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen U yang bukan elemen A. Secara simbolik dapat ditulis sebagai $\boldsymbol{A^C = \{x \mid x \in U \text{ dan } x \notin A\}}$.

Diagram venn untuk A^C digambarkan sebagai berikut dimana bagian yang diarsir merupakan daerah A^C.



Gambar 9.1 Diagram Venn A^C

Contoh 9. 1

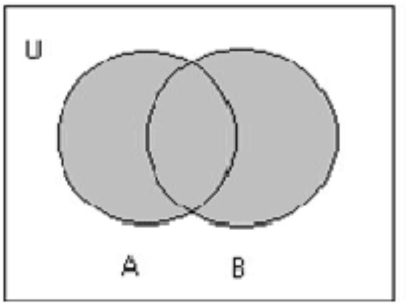
Misalkan S = {1, 2, 3, …, 8, 9}, A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 8}

- Himpunan A^C terdiri atas elemen – elemen yang terdapat dalam S tetapi tidak dalam A. Oleh karena itu A' = {5, 6, 7, 8, 9}.
- Himpunan yang terdiri atas elemen – eleman yang terdapat dalam S tidak dalam B adalah B^C = {1, 3, 5, 7, 9}

C. Gabungan (Union)

Misalkan A dan B sebarang himpunan. Gabungan A dan B dinyatakan dengan A ∪ B adalah himpunan yang memiliki anggota A atau anggota B. Secara simbolik dapat ditulis sebagai $\mathbf{A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}}$.

Diagram venn untuk A ∪ B digambarkan sebagai berikut dimana bagian yang diarsir merupakan daerah A ∪ B.



Gambar 9.2 Diagram Venn A ∪ B

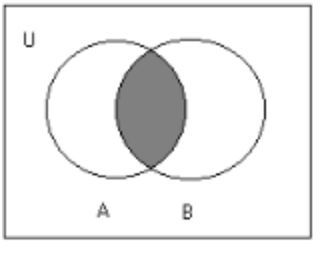
Contoh 9. 2

- Jika A = {2, 5, 8} dan B = {7, 5, 22}, maka A ∪ B = {2, 5, 7, 8, 22}
- Misalkan K = {a, b, c} dan L = {a, i, u, e, o}, maka K ∪ L = {a, b, c, i, u, e, o}
- $A \cup \emptyset = A$

D. Irisan

Misalkan A dan B himpunan, maka irisan A dan B dinyatakan dengan A ∩ B adalah himpunan semua elemen yang merupakan anggota A dan juga merupakan anggota B. Secara simbolik dapat ditulis sebagai $\boldsymbol{A \cap B = \{x | x \in A}$ **dan** $\boldsymbol{x \in B\}}$**.**

Jika dua himpunan saling lepas, maka irisan dari kedua himpunan adalah himpunan kosong. Karena tidak ada anggota yang sama yang terdapat dari kedua himpunan tersebut. Diagram venn untuk $A \cap B$ digambarkan sebagai berikut.



Gambar 9.3 Diagram Venn $A \cap B$

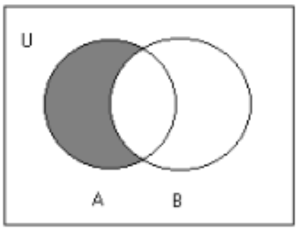
Contoh 9. 3

- Jika A = {2, 4, 6, 8, 10} dan B = {4, 10, 14, 18}, maka $A \cap B$ = {4, 10}
- Misalkan K = {a, b, c} dan L = {a, i, u, e, o}, maka K ∩ L = {a}

- Jika $A = \{(x, y) | x + y = 7, x, y \in \mathbf{R}\}$ dan $B = \{(x, y) | x - y = 3, x, y \in \mathbf{R}\}$, maka $A \cap B = \{(5,2)\}$ yang merupakan titik potong dari garis $x + y = 7$ dan $x - y = 3$

E. Selisih

Selisih dari dua himpunan A dan B suatu himpunan yang anggotanya merupakan anggota A tetapi bukan merupakan anggota dari B. Selisih A dan B dilambangkan dengan $A - B$ atau $\boldsymbol{A \setminus B = \{x | x \in A \text{ dan } x \notin B\} = A \cap B^C}$. Selisih antara A dan B $(A - B)$ dapat juga dikatakan sebagai komplemen himpunan B relatif terhadap himpunan A. Diagram venn untuk $A \setminus B$ digambarkan sebagai berikut.



Gambar 9. 4 Diagram venn $A \setminus B$

Contoh 9. 4

- Misalkan A = {1, 2, 3, 4} dan B = {2, 4, 6, 8}

Himpunan $A - B$ terdiri atas elemen–elemen dalam A yang tidak berada dalam B,

karena A = {1, 2, 3, 4} dan 2,4 ∈ B, maka A – B = {1, 3}.

- Jika $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Maka $A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, tetapi $B - A = \emptyset$

- {1, 3, 5} – {1, 2, 3} = {5}, tetapi {1, 2, 3} – {1, 3, 5} = {2}

Dari contoh yang diberikan, dapat disimpulkan bahwa selisih dua buahhimpunan yang keduanya bukan himpunan kosong bersifat tidakkomutatif, artinya $A - B \neq B - A$.

F. Beda Setangkup Himpunan

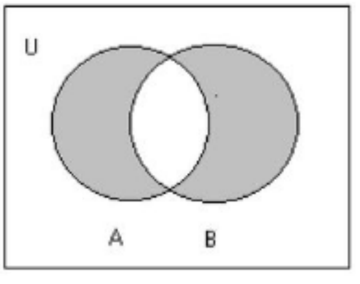
Operasi himpunan beda setangkup menghasilkan himpunan baru dengan anggota-anggota yang bukan merupakan irisan dari himpunan-himpunan yang dioperasikan. Jika A dan B adalah himpunan, maka beda setangkup dari A dan B

adalah suatu himpunan yang anggotanya ada pada A atau B tetapi tidak pada keduanya. Secara simbolik definisi tersebut dapat dituliskan Dari definisi di atas, dapat dinotasikan

$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$ atau $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) =$ = {x | x ∈ A \ B atau x ∈ B \ A}

Beda setangkup bukanlah penjumlahan himpunan (+). Dalam himpunan tidak ada istilah penjumlahan himpunan. Istilah beda setanggkup dalam beberapa referensi lebih familiar dengan menggunakn istilah "**selisih simetris**" yang diambil dari bahasa inggris dan juga referensi laur negeri yang banyak menggunakan "***Symmetric Difference***". Tujuan penggunaan istilah beda setangkup pada buku ini agar lebih mudah dalam membedakan antara selisih himpunan dengan selisih simetris himpunan.

Diagram venn untuk $A \oplus B$ digambarkan sebagi berikut.



Gambar 9. 5 Diagram Venn $A \oplus B$

Contoh 9. 5

- Misalkan K = {a, b, c} dan L = {a, i, u, e, o}, maka K ⊕ L = {b,c, i, u, e, o }
- Jika $A = \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

  Maka $A \oplus B = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$ dan $B \oplus A = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$
- Misalkan :

  U = himpunan mahasiswa
  P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80
  Q = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80
  Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua
  ujian di bawah 80.

- "Semua mahasiswa yang mendapat nilai A": $P \cap Q$
- "Semua mahasiswa yang mendapat nilai B": $P \oplus Q$
- "Semua mahasiswa yang mendapat nilai C": $U - (P \cup Q)$

G. Perkalian Cartesius

jika A dan B adalah himpunan, maka perkalian kartesian dari A dan B adalah himpunan yang anggotanya adalah pasangan berurutan (*ordered pairs*) yang terbentuk dari komponen pertama (dari himpunan A) dan komponen kedua (dari himpunan B). Perkalian Cartesius A dan B dinotasikan $A \times B$. Perkalian Cartesius A dan B dapat pula dituliskan sebagai $\boldsymbol{A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}}$.

Jika n(A) = p dan n(B) = q, maka n(A × B) = pq

Contoh 9. 6

- Jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{2, 4, \}$.

  Maka $A \times B = \{(1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (3,2), (3,4)\}$

- Misalkan C = { 1, 2, 3 }, dan D = { a, b }, maka C × D = {(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)}
- Misal E = $\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$ dan F = $\{y \mid y \in \mathbf{R}\}$, maka E × F adalah himpunan semua titik pada bidang datar. Artinya semua pasangan berurutan (titik-titik) pada bidang datar.

Catatan:

1. Jika A dan B himpunan berhingga (finite set), maka: $|A \times B| = |A| \times |B|$
2. Pasangan berurutan (ordered pairs) (x, y) berbeda dengan (y, x). Sehingga $(x, y) \neq (y, x)$ sehingga mengakibatkan: $A \times B \neq B \times A$. Sehingga disimpulakn bahwa perkalian kartesian tidak komutatif dengan syarat A atau B bukan himpunan kosong (memiliki angota).
3. Jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$, maka $A \times B = B \times A = \emptyset$

H. Sifat-Sifat Operasi Himpunan

Misalkan A, B, dan C adalah himpunan, maka berlaku sifat-sifat berikut:

1. Berkaitan dengan komplemen himpunan
   a. $(A^c)^c = A$

b. $S^c = \varnothing$

c. $\varnothing^c = S$

2. Berkaitan dengan gabungan dua himpunan dan irisan dua himpunan

a. Sifat Komutatif

- Sifat komutatif gabungan : $A \cup B = B \cup A$

Bukti:

misalkan $p: x \in A, q: x \in B$

ingat $p \vee q \equiv q \vee p$

$A \cup B$ berarti $x \in A$ atau $x \in B$

berarti p atau q

berarti q atau p

berarti $x \in B$ atau $x \in A$

berarti $B \cup A$

- sifat komutatif irisan : $A \cap B = B \cap A$

b. Sifat Asosiatif

- sifat asosiatif gabungan : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- sifat asosiatif irisan : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Sifat asosiatif untuk tiga atau lebih himpunan dapat dinyatakan menggunakan himpunan indeks $I = \{1, 2, 3, ...\}$

i. Jika banyak himpunan berhingga, maka

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

ii. Jika banyak himpunan tak berhingga, maka

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... = \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... = \bigcap_{i \in I} A_i$$

c. Sifat Distributif

- Sifat distributif gabungan terhadap irisan :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- Sifat distributif irisan terhadap gabungan :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Sifat distributif untuk tiga atau lebih himpunan dapat dinyatakan menggunakan himpunan indeks I = {1, 2, 3, ...}

i. Jika banyak himpunan berhingga, maka

$$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n) = A \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n) = A \bigcap_{i=1}^{n} B_i$$

ii. Jika banyak himpunan tak berhingga, maka

$$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap ...) = A \bigcup_{i \in I} B_i$$

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup ...) = A \bigcap_{i \in I} B_i$$

d. Sifat Idempoten

- sifat idempoten gabungan : $A \cup A = A$
- sifat idempoten irisan : $A \cap A = A$

e. Sifat Identitas

- sifat identitas gabungan : $A \cup \varnothing = A$ dan $A \cup S = S$
- sifat identitas irisan : $A \cap S = A$ dan $A \cap \varnothing = \varnothing$

f. Sifat Komplemen

- sifat komplemen gabungan : $A \cup A^c = S$
- sifat komplemen irisan : $A \cap A^c = \varnothing$

g. Hukum De Morgan

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

3. Berkaitan dengan selisih dua himpunan

a. $A \setminus A = \varnothing$
d. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

b. $A \setminus \varnothing = A$
e. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

c. $A \setminus B = A \cap B^c$

4. Berkaitan dengan perkalian Cartesius dua himpunan

   a. Jika $A = \varnothing$ dan $B = \varnothing$, maka $A \times B = \varnothing$

   b. $A \times B = B \times A$ jika dan hanya jika $A = B$

   c. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

   d. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

   e. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

   f. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$